BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1982

MÜNCHEN 1983

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Gibbs-Darstellung bedingter Wahrscheinlichkeiten

von **Gottlieb Leha** in Erlangen

vorgelegt von Heinz Bauer in der Sitzung vom 2. Juli 1982

Einleitung

Für das Studium von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Produkträumen, also sog. *Stochastischer Felder*, gibt man sich häufig eine *lokale Spezifikation* vor, d. h. ein System von Übergangskernen, die bedingte Wahrscheinlichkeiten bezüglich gewisser σ-Unteralgebren repräsentieren sollen (s. z. B. Dobrushin, Georgii (1974), Preston (1976)).

Nun ist ein solches Vorgehen in der Statistischen Gleichgewichtsmechanik wohlbekannt: Dort geht man von *Potentialen* aus und gewinnt die zu studierenden Übergangskerne durch das sog. Gibbssche Postulat (s. z. B. Ruelle).

Eine sich sofort ergebende Fragestellung lautet dann: Man charakterisiere diejenigen bedingten Wahrscheinlichkeiten (oder die sie bestimmenden Verteilungen), die mit Hilfe von Potentialen via einer *Gibbs-Darstellung* definiert werden können.

Diese Frage wurde von vielen Autoren diskutiert (z. B. Averintsev, Spitzer, Grimmet, Sullivan, Kozlow). Einen gewissen Abschluß erreichte die Diskussion durch die Arbeit von Sullivan (s. auch Kozlow), in der das zentrale Ergebnis lautet:

Jedes positive Fast-Markoffsche Feld auf einem Produktraum mit abzählbar vielen endlichen Faktorräumen besitzt eine Gibbs-Darstellung.

Dabei heißt ein Stochastisches Feld *Fast-Markoffsch*, wenn die bedingten Verteilungen in beschränkten Gebieten in stetiger Weise von den Randbedingungen abhängen.

Um nun die Rolle der Stetigkeit zu verdeutlichen, betrachten wir eine Gibbs-Darstellung anhand eines einfachen Beispiels, nämlich des Münzwurfmodells:

Ist $p \in (0, 1)$ der für jeden Einzelwurf gleiche Erfolgsparameter und P die zugehörige Produktverteilung auf $\{0,1\}^N$, dann sieht die Gibbs-Darstellung der (bedingten) Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem endlichen Bereich $V \subset \boldsymbol{N}$ die Ergebnisse $u(i)$, $i \in V$, realisieren, wenn außerhalb von V die Konfiguration $x_{N \setminus V} \in \{0,1\}^{N \setminus V}$ vorliegt, bekanntlich folgendermaßen aus:

$$(0.1) \quad \pi_V(u \mid x_{N \setminus V}) = (1-p)^{|V|} \exp\left(-\sum_{i \in V} u(i) \ln \frac{1-p}{p}\right), \text{ wobei}$$

$|V|$ die Kardinalität von V bezeichne.

Man erhält also das (hier von der Randbedingung $x_{N \setminus V}$ unabhängige) π_V ausgehend von dem Potential

$$(0.2) \qquad \boldsymbol{U}(B, x) = \begin{cases} x(i) \ln \frac{1-p}{p}, & B = \{i\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

für endliches $B \subset N$ und $x \in \{0,1\}^N$.

Dies beruht aber wesentlich auf der Annahme, daß der Parameter p a priori bekannt ist. Diese Annahme ist sicher dann notwendig, wenn das Ergebnis x des „gesamten Münzwurfs" nicht bekannt ist.

In den in der Statistischen Gleichgewichtsmechanik betrachteten Modellen geht man jedoch davon aus, daß die „Situation außerhalb des endlichen Bereiches V", also $x_{N \setminus V}$ bekannt ist. (Dies bedeutet im obigen Modell, daß die Münze nicht sukzessive, sondern daß unendlich viele Münzen gleichzeitig geworfen werden.)

Will man nun die Information darüber, was außerhalb von V geschieht, in das obige Modell miteinbeziehen, so kann dies in naheliegender Weise dadurch geschehen, daß man den Parameter p als Funktion von $x_{N \setminus V}$ ansieht, also etwa

$$(0.3) \qquad p(x) = p(x_{N \setminus V}) = \limsup_{\substack{W \uparrow N \\ W \text{ endlich}}} \frac{1}{|W|} \sum_{i \in W} x(i)$$

Dann hat die bedingte Verteilung π_V die Form

$$(0.4) \qquad \pi_V(u \mid x_{N \setminus V}) = (1-p(x))^{|V|} \exp\left(-\sum_{i \in V} u(i) \ln \frac{1-p(x)}{p(x)}\right)$$

(wobei für $p(x) = 0$ oder $p(x) = 1$ eine gesonderte Festlegung zu treffen ist).

Das durch (0.4) gegebene Modell ist nun leistungsfähiger als das ursprüngliche, aber mit ihm konsistent und zwar in dem Sinne, daß nun alle „austauschbaren" Verteilungen auf $\{0, 1\}^N$ als Gleichgewichte auftreten, während die Gleichgewichte des alten Modells spezielle, nämlich extremale Gleichgewichte sind.

(Wir werden am Schluß der Arbeit sehen, daß dem hier gesagten ein allgemeinerer Sachverhalt zugrundeliegt.)

Jedoch hängt nun π_V nicht mehr in stetiger Weise von der Randbedingung $x_{N\setminus V}$ ab, besitzt aber dennoch eine Gibbs-Darstellung mit dem Potential

$$\boldsymbol{U}(B, x) = \begin{cases} x(i) \ln \frac{1-p(x)}{p(x)}, & B = \{i\} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Während bei festem p keine Interaktion zwischen dem Münzwurf „an der Stelle $i \in N$" und den übrigen Würfen besteht, liegt nunmehr eine Interaktion vor, nämlich eine Abhängigkeit des i-ten Wurfes von der „globalen Situation" $x \in \{0, 1\}^N$.

Dieser Sachverhalt drückt sich im Modell dadurch aus, daß das Potential $\boldsymbol{U}(B, x)$ auch von den Werten der Konfiguration x außerhalb von B abhängt.

Um nun auch derartige Modelle in Aussagen über Gibbs-Darstellungen miteinzubeziehen, verallgemeinern wir den Begriff des Potentials in der angegebenen Weise, sprechen aber dann von einem *verallgemeinerten Potential* (vgl. hierzu die Anmerkung am Schluß der Arbeit).

Es werden dann die beiden folgenden Fragen untersucht:

1. Welche verallgemeinerten Potentiale sind „zulässig" in dem Sinne, daß sie via Gibbs-Darstellung zu „vernünftigen" Übergangskernen führen?
2. Welche Übergangskerne können in Gibbsscher Form mit zulässigen verallgemeinerten Potentialen dargestellt werden?

Bei der Behandlung dieser Fragen lassen wir beliebige individuelle Zustandsräume zu, also z. B. auch Modelle mit „unbeschränkter Spinvariable".

In Abschnitt 2 wird die erste Frage behandelt; Hauptergebnis ist dabei das Theorem 2.8, welches zeigt, daß für ein zulässiges Potential $\boldsymbol{U}(B, x)$ die Abhängigkeit von den Werten der Konfiguration x außerhalb von B tailmeßbar sein muß.

Die zweite Frage wird im 3. Abschnitt dahingehend beantwortet (Theorem 3.2), daß eine strikt positive lokale Charakteristik genau dann eine Gibbs-Darstellung besitzt, wenn ein „lokales Stetigkeitsverhalten" vorliegt und eine Summierbarkeitsbedingung erfüllt ist.

Das oben vorgestellte einfache Beispiel des Münzwurfmodells weist somit bereits alle typischen Merkmale auf.

1. Notationen und Definitionen

1.1. Es seien gegeben:

Eine endliche oder abzählbar unendliche Menge A (z. B. $A = \mathbb{Z}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$), sowie für jedes $a \in A$ ein Maßraum $(S_a, \boldsymbol{S}_a, \lambda_a)$ und ein ausgezeichnetes Element $\omega_a \in S_a$.

1.2. Wir benutzen dann die folgenden Bezeichnungen:

Für $B \subset A$: $S_B = \prod_{a \in B} S_a$, $\boldsymbol{S}_B = \bigotimes_{a \in B} \boldsymbol{S}_a$.

Ist speziell $B = A$, so schreiben wir

$E = S_A$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{S}_A$.

Für $x, y \in S_B$: $\{x = y\} = \{a \in B : x(a) = y(a)\}$

Für $B, C \subset A$, $x \in S_B$, $y \in S_C$:

$$xy(a) = \begin{cases} x(a), & a \in B \\ y(a), & a \in C \setminus B \end{cases}$$

$p_B : E \to S_B$ sei die kanonische Projektion,

$x_B = p_B(x)$ für $x \in E$.

$\boldsymbol{E}_B = \{p_B^{-1}(\mathfrak{S}) : \mathfrak{S} \in \boldsymbol{S}_B\}$

$\boldsymbol{V} = \{V \subset A : 0 < |V| < \infty\}$ ist das System der nichtleeren, endlichen Teilmengen von A ($|V|$ = Kardinalität von V).

Für $V \in \boldsymbol{V}$:

$$\mathfrak{D}(V) = \{B \in \boldsymbol{V} : B \cap V \neq \emptyset\}$$
$$\lambda_V = \bigotimes_{a \in V} \lambda_a$$
$$\boldsymbol{E}_\infty = \bigcap_{V \in \boldsymbol{V}} \boldsymbol{E}_{A \setminus V} \text{ ist das „tail-field“.}$$

ω bezeichne die Abbildung $a \to \omega_a$ ($a \in A$), ω heißt „Vakuumkonfiguration“ in E.

Schließlich schreiben wir für $x \in E$:

$$\hat{x} = \{a \in A : x(a) \neq \omega_a\} \text{ und}$$
$$\hat{E} = \{x \in E : \hat{x} \in \boldsymbol{V} \cup \{\emptyset\}\}.$$

1.3. Eine beliebige Funktion $f : \boldsymbol{V} \times E \to \boldsymbol{R}$ nennen wir

- *meßbar*, falls $x \to f(B, x)$ $\boldsymbol{E}$-meßbar ist für jedes $B \in \boldsymbol{V}$
- *adaptiert*, falls $x \to f(B, x)$ sogar $\boldsymbol{E}_B$-meßbar ist für jedes $B \in \boldsymbol{V}$
- *lokal-adaptiert*, falls $x \to f(B, x)$ $\boldsymbol{E}_B \vee \boldsymbol{E}_\infty$-meßbar ist für jedes $B \in \boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{E}_B \vee \boldsymbol{E}_\infty$ ist die von $\boldsymbol{E}_B$ und $\boldsymbol{E}_\infty$ erzeugte σ-Algebra)
- *lokal-summierbar*, falls $B \to f(B, x)$ auf $\mathfrak{D}(V)$ summierbar ist für jedes $V \in \boldsymbol{V}$ und $x \in E$.

1.4. Eine meßbare Funktion $\boldsymbol{U} : \boldsymbol{V} \times E \to \boldsymbol{R}$, die lokal-summierbar ist, nennen wir ein *verallgemeinertes Potential*. Ist $\boldsymbol{U}$ sogar adaptiert, so heißt $\boldsymbol{U}$ ein *Potential*.

Wir bemerken:

Ist $\boldsymbol{U}$ nur lokal adaptiert, dann hängt der Wert $\boldsymbol{U}(B, x)$ des Potentials $\boldsymbol{U}$ auf B von den Werten der Konfiguration x auf B und von dem „globalen Verhalten“ von x ab (d. h. „lokale“ Änderungen von x außerhalb von B haben auf $\boldsymbol{U}(B, x)$ keinen Einfluß).

Ein verallgemeinertes Potential $\boldsymbol{U}$ heißt *normiert*, falls $\boldsymbol{U}(B, x) = 0$ ist, sobald ein $a \in B$ existiert mit $x(a) = \omega_a$.

1.5. Ist $\boldsymbol{U}$ ein verallgemeinertes Potential, so definiert man die Abbildung $\boldsymbol{H}_U : \boldsymbol{V} \times E \to \boldsymbol{R}$ durch

$$(1.1) \quad \boldsymbol{H}_U(V, x) = \sum_{B \in \mathfrak{D}(V)} \boldsymbol{U}(B, x)$$

$\boldsymbol{H}_U$ heißt die zu $\boldsymbol{U}$ gehörige *Energiefunktion*.

Von $\boldsymbol{H}_U$ leitet man in üblicher Weise eine lokale Spezifikation ab: Man setzt zunächst für $V \in \boldsymbol{V}$, $x \in E$:

$$(1.2) \quad \boldsymbol{Z}_U(V, x) = \int_{S_V} \exp\left(-\boldsymbol{H}_U(V, u\, x)\right) \lambda_V(du)$$

und definiert dann

$$(1.3) \quad \pi_V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\boldsymbol{Z}_U(V, x)} \exp\left(-\boldsymbol{H}_U(V, x)\right), & 0 < \boldsymbol{Z}_U(V, x) < \infty \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen $u \to \pi_V(ux)$ sind dann die Dichten bezüglich λ_V der zu studierenden Kerne, wobei die Gleichungen (1.1), (1.2), (1.3) deren *Gibbs-Darstellung* bezeichnen.

1.6. Ist $0 < \boldsymbol{Z}_U(V, x) < \infty$ für jedes $V \in \boldsymbol{V}$ und $x \in E$, dann ist $(\pi_V)_{V \in \boldsymbol{V}}$ *positiv*, d. h. $\pi_V(x) > 0 \ \forall \ V \in \boldsymbol{V}, x \in E$, und es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen $\boldsymbol{H}_U$ und $(\pi_V)_{V \in \boldsymbol{V}}$ vermöge (1.2) und (1.3) und

$$\boldsymbol{H}_U(V, x) = -\ln \frac{\pi_V(x)}{\pi_V(\omega_V x)}.$$

Die Frage nach der Gibbs-Darstellung lautet dann also:

Welche Energiefunktionen $\boldsymbol{H}$ lassen sich in der Form (1.1) darstellen?

Wir definieren daher:

Eine Energiefunktion $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{V} \times E \to \boldsymbol{R}$ heißt vom *Gibbsschen Typ*, falls ein verallgemeinertes Potential $\boldsymbol{U}$ existiert mit $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_U$ gemäß (1.1).

1.7. Von wirklichem Interesse sind jedoch nur Dichten $(\pi_V)_{V \in \boldsymbol{V}}$, die (zumindest fast sicher) folgende Konsistenzbedingung erfüllen (s. z. B. Preston (1976), section 5):

$$\pi_W(x) = \pi_V(x) \int_{S_W} \pi_W(ux)\, \lambda_V(du) \quad (V \subset W \in \boldsymbol{V},\ x \in E). \tag{1.4}$$

Dies ist in dem in 1.6. angegebenen Fall äquivalent zu

$$\boldsymbol{H}(V \cup W, x) = \boldsymbol{H}(V, x) + \boldsymbol{H}(W, \omega_V x) \quad (V, W \in \boldsymbol{V}, x \in E) \tag{1.5}$$

Wir nennen daher eine Energiefunktion $\boldsymbol{H}$ *konsistent*, falls die Bedingung (1.5) gilt.

Die in der Einleitung gestellte Frage nach der Zulässigkeit von Potentialen wird dann sein: Welche verallgemeinerten Potentiale führen gemäß (1.1) zu konsistenten Energiefunktionen?

2. Zulässige Potentiale

Es sei eine Energiefunktion, also eine beliebige Funktion $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{V} \times E \to \boldsymbol{R}$ gegeben.

Wir setzen $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{D}(V) : V \in \boldsymbol{V}\}$
und betrachten für jedes $x \in E$ die Abbildung
$m(\cdot, x) : \mathfrak{B} \to \boldsymbol{R}$, die gegeben ist durch

$$m(\mathfrak{D}(V), x) = \boldsymbol{H}(V, x) \quad \text{für } V \in \boldsymbol{V}. \tag{2.1}$$

m ist wohldefiniert, da die Abbildung $V \to \mathfrak{D}(V)$ von $\boldsymbol{V}$ auf $\mathfrak{B}$ offenbar eine Bijektion ist.

Die Abbildung m führen wir deswegen ein, weil sich zeigen wird, daß $\boldsymbol{H}$ genau dann vom Gibbsschen Typ ist, wenn für jedes $x \in E$ gilt: Die Abbildung $m(\cdot, x)$ läßt sich zu einem σ-additiven Maß auf die von $\mathfrak{B}$ erzeugte σ-Algebra fortsetzen.

Daher wollen wir zunächst den von $\mathfrak{B}$ erzeugten Ring $\mathfrak{R}$ und dann die erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}$ beschreiben:

Wir setzen für $V \in \boldsymbol{V}$ und $U \subset V$:

$$\mathfrak{D}(V : U) = \{B \in \mathfrak{D}(V) : B \cap V = U\}. \tag{2.2}$$

Dann ist offenbar $\{\mathfrak{D}(V:U):\emptyset \neq U \subset V\}$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathfrak{D}(V)$.

Wir bezeichnen weiter mit $\mathfrak{R}_V$ den von $\{\mathfrak{D}(V:U):\emptyset \neq U \subset V\}$ erzeugten Ring. (Er ist endlich mit den Atomen $\mathfrak{D}(V:U), \emptyset \neq U \subset V$).

Wie man sofort sieht, gelten dann die Beziehungen:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{V \in \boldsymbol{V}} \mathfrak{R}_V \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}) \tag{2.4}$$

(2.5) Ist A endlich, dann ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$.

Für das Weitere entscheidend ist nun folgender Sachverhalt:

2.1. Satz: Die Abbildung $m(\cdot, x)$ von $\mathfrak{B}$ nach $\boldsymbol{R}$ läßt sich stets auf genau eine Weise zu einer additiven Mengenfunktion auf den Ring $\mathfrak{R}$ fortsetzen.

Beweis: Setzt man für $V \in \boldsymbol{V}$ und $U \subset V$:

$$m(\mathfrak{D}(V:U), x) = -\sum_{V \setminus U \subset U' \subset V} (-1)^{|U \cap U'|}\, m(\mathfrak{D}(U'), x) \tag{2.6}$$

mit $m(\emptyset, x) = 0$, so ergeben sich durch direktes Nachrechnen die Beziehungen

$$\sum_{\emptyset \neq U \subset V} m(\mathfrak{D}(V:U), x) = m(\mathfrak{D}(V), x) = \boldsymbol{H}(V, x) \tag{2.7}$$

$$m(\mathfrak{D}(V:U), x) = \sum_{U' \subset W \setminus V} m(\mathfrak{D}(W:U \cup U'), x) \quad \text{für} \quad V \subset W \in \boldsymbol{V},\ \emptyset \neq U \subset V \tag{2.8}$$

Daraus folgt sofort die Existenz der Fortsetzung.

Die Eindeutigkeit kann z. B. mittels vollständiger Induktion über $|V|$ und $|U|$ für $V \in \boldsymbol{V}$, $U \subset V$ gezeigt werden.

2.2. Bemerkungen.

1. Die Formel (2.6) drückt eine Analogie zur Möbius'schen Inversionsformel aus, die für die Frage der Gibbs-Darstellung von entscheidender Bedeutung ist (s. z. B. Grimmet).

2. Der Satz 2.1. folgt auch direkt aus Theorem 3 in der Arbeit von Evstigneev.

Wir nennen die gemäß Satz 2.1. auf $\mathfrak{R} \times E$ definierte Mengenfunktion *m das zu $\boldsymbol{H}$ gehörige Maß.*

Aus Satz 2.1. ergeben sich sofort folgende Konsequenzen:

2.3. Korollar: Für $\boldsymbol{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\boldsymbol{H}$ ist vom Gibbsschen Typ

b) Für das zu $\boldsymbol{H}$ gehörige Maß m gilt: Für jedes $x \in E$ besitzt $m(\cdot, x)$ eine Fortsetzung zu einem σ-additiven signierten Maß $\mu(\cdot, x)$ auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, das auf jedem $\mathfrak{D}(V)$ $(V \in \boldsymbol{V})$ endliche Variation besitzt.

Beweis: Man setze $\mu(\{B\}, x) = \boldsymbol{U}(B, x)$ und vice versa.

2.4. Korollar: Ist $\boldsymbol{H}$ vom Gibbsschen Typ, dann ist das zugehörige verallgemeinerte Potential eindeutig bestimmt.

Beweis: Für jedes $x \in E$ ist $m(\cdot, x)$ eindeutig bestimmt und σ-endlich.

Als unmittelbares Ergebnis zur Existenzfrage einer Gibbs-Darstellung erwähnen wir:

2.5. Korollar: Ist A endlich, dann ist $\boldsymbol{H}$ stets vom Gibbsschen Typ.

Beweis: Folgt aus (2.5).

Bisher haben wir von der Konsistenz-Bedingung (1.5) noch keinen Gebrauch gemacht. Nun wollen wir die Bedingung (1.5) auf m übertragen:

2.6. Satz: $\boldsymbol{H}$ erfüllt genau dann die Konsistenzbedingung (1.5), wenn gilt:

(2.9) Für jedes $x \in E$ und $V \in \boldsymbol{V}$ gilt:

$$m(R \setminus \mathfrak{D}(V), x) = m(R, \omega_V x) \qquad (R \in \mathfrak{R}).$$

Beweis: Setzt man für $x \in E$, $V \in \boldsymbol{V}$:

$$m'(R, x) = m(R \setminus \mathfrak{D}(V), x) \qquad (R \in \mathfrak{R}),$$ so ist m' offenbar

additiv auf $\mathfrak{R}$ und es gilt für alle $W \in \boldsymbol{V}$:

$$m'(\mathfrak{D}(W), x) = m(\mathfrak{D}(W) \setminus \mathfrak{D}(V), x) = m(\mathfrak{D}(V \cup W) \setminus \mathfrak{D}(V), \mathrm{x})$$
$$= m(\mathfrak{D}(V \cup W), x) - m(\mathfrak{D}(V), x) = \boldsymbol{H}(V \cup W, x) - \boldsymbol{H}(V, x)$$
und $m(\mathfrak{D}(W), \omega_V x) = \boldsymbol{H}(W, \omega_V x)$.

Damit folgt (2.9) aus (1.5), während sich die umgekehrte Richtung aus der Eindeutigkeit von $m(\cdot, \omega_V x)$ ergibt.

2.7. Korollar: Ist $\boldsymbol{H}$ konsistent, dann wird für jedes $x \in E$ das zu $\boldsymbol{H}$ gehörige Maß $m(\cdot, x)$ „von der Menge

$$\boldsymbol{T}(x) = \{B \in \boldsymbol{V} : B \subset \hat{x}\}$$

getragen“, d. h. es gilt:

$$m(R, x) = m(R \setminus \mathfrak{D}(V), x), \text{ sofern } \boldsymbol{T}(x) \cap \mathfrak{D}(V) = \emptyset.$$

Beweis: Es ist $\boldsymbol{T}(x) \cap \mathfrak{D}(V) = \emptyset$ genau dann, wenn $V \cap \hat{x} = \emptyset$ ist; also in diesem Fall: $m(R, x) = m(R, \omega_V x) = m(R \setminus \mathfrak{D}(V), x)$.

Nunmehr können wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts formulieren:

2.8. Theorem: Es sei $\boldsymbol{H}$ vom Gibbsschen Typ mit zugehörigem verallgemeinerten Potential $\boldsymbol{U}$. Dann sind äquivalent:

a) $\boldsymbol{H}$ ist konsistent

b) $\boldsymbol{U}$ ist normiert und lokal adaptiert.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) Wegen der Konsistenz von $\boldsymbol{H}$ erfüllt nach Satz 2.6 das zugehörige Maß m die Bedingung (2.9). Ferner gibt es zu jedem $x \in E$ eine σ-additive Fortsetzung $\mu(\cdot, x)$ von $m(\cdot, x)$ auf $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$. Sei $B \in \boldsymbol{V}$ mit $V := B \cap (A \setminus \hat{x}) \neq \emptyset$. Dann ist $B \in \mathfrak{D}(V)$ und für $W \in \boldsymbol{V}$ mit $B \subset W$ und $R := \mathfrak{D}(W : B)$ gilt:

$R \setminus \mathfrak{D}(V) = \emptyset$, also $0 = m(R \setminus \mathfrak{D}(V), x) = m(R, x)$ nach Korollar 2.7. Also ist

$$U(B, x) = \mu(\{B\}, x) = \lim_{W \uparrow A} m\bigl(\mathfrak{D}(W : B), x\bigr) = 0.$$

Dies aber ist die Normiertheit von $\boldsymbol{U}$.

In analoger Weise folgt aus (2.9) die Beziehung:

$$\mu\bigl(\{B\} \setminus \mathfrak{D}(V), x\bigr) = \mu(B, \omega_V x) \quad \text{für alle } B,\ V \in \boldsymbol{V}, x \in E.$$

Also ist $\boldsymbol{U}(B, x) = \mu(\{B\}, x) = \mu(\{B\}, \omega_V x) = \boldsymbol{U}(B, \omega_V x)$ für $B \cap V = \emptyset$. Somit ist $\boldsymbol{U}$ auch lokal adaptiert.

Die Richtung b) $\Rightarrow$ a) ergibt sich durch direktes Nachrechnen.

Auch hier ergibt sich wieder eine unmittelbare Konsequenz, die Existenzfrage betreffend:

2.9. Korollar: Ist $\boldsymbol{H}$ konsistent, dann gilt:

a) Für jedes $x \in \hat{E}$ existiert das zugehörige „Potential" $\boldsymbol{U}(\cdot, x)$; $\boldsymbol{U}$ ist adaptiert.

b) Falls zu $x \in E$ eine (bezüglich der Inklusion) kofinale Folge $(W_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ in $\boldsymbol{V}$ existiert mit

$$\boldsymbol{H}(V, x) = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{H}(V, x_{W_n}\, \omega) \text{ für alle } V \in \boldsymbol{V}, \tag{2.10}$$

dann existiert ein „Potential" $\boldsymbol{U}(\cdot, x)$ mit

$$\boldsymbol{H}(V, x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{B \in \mathfrak{D}(V) \\ B \subset W_n}} \boldsymbol{U}(B, x) \qquad (V \in \boldsymbol{V}) \tag{2.11}$$

$\boldsymbol{U}$ ist adaptiert.

B e w e i s: a) nach Korollar 2.7. wird für jedes $x \in E$ $m(\cdot, x)$ von der Menge $\boldsymbol{T}(x) = \{B \in \boldsymbol{V} : B \subset \hat{x}\}$ getragen. Für $x \in \hat{E}$ ist diese Menge jedoch endlich, also ist $\mathfrak{R} \cap \boldsymbol{T}(x) = \mathfrak{A} \cap \boldsymbol{T}(x)$ und $m(\cdot, x)$ besitzt eine σ-additive Fortsetzung auf $\mathfrak{A}$, die wieder von $\boldsymbol{T}(x)$ getragen wird. Also existiert das zu $\boldsymbol{H}(\cdot, x)$ gehörige Potential $\boldsymbol{U}(\cdot, x)$. Wegen $x = x_V\, \omega$ mit $V = \hat{x} \in \boldsymbol{V}$ und der lokalen Adaptiertheit von $\boldsymbol{U}$ gilt: $\boldsymbol{U}(B, x) = \boldsymbol{U}(B, \omega_{V \setminus B}\, x) = \boldsymbol{U}(B, x_B\, \omega)$ für jedes $B \in \boldsymbol{V}$. Also ist $\boldsymbol{U}$ adaptiert.

b) Sei $x \in E$, $(W_n)_{n \in N}$ kofinale Folge in $\boldsymbol{V}$ mit (2.10). Dann gilt für $B, W, W' \in \boldsymbol{V}$ mit $B \subset W \cap W'$:

$\boldsymbol{U}(\cdot, x_W\omega)$ und $\boldsymbol{U}(\cdot, x_{W'}\omega)$ existieren nach a) und sind adaptiert, also:

$$\boldsymbol{U}(B, x_W\omega) = \boldsymbol{U}(B, x_B\omega) = \boldsymbol{U}(B, x_{W'}\omega).$$

Setzt man also für $B \in \boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{U}(B, x) := \boldsymbol{U}(B, x_W\omega)$ mit $B \subset W \in \boldsymbol{V}$, dann ist $\boldsymbol{U}(B, x)$ wohldefiniert und es gilt für $W \in \boldsymbol{V}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{B \in \mathfrak{D}(V) \\ B \subset W_n}} \boldsymbol{U}(B, x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{B \in \mathfrak{D}(V) \\ B \subset W_n}} \boldsymbol{U}(B, x_{W_n}\omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{H}(V, x_{W_n}\omega) = \boldsymbol{H}(V, x).$$

2.10. Bemerkungen:

1. Die Aussage b) des obigen Korollars 2.9. schließt den Fast-Markoffschen und damit den Markoffschen Fall (hier aber für beliebige individuelle Zustandsräume S_a) mit ein. Wir sprechen jedoch von einem „Potential", da die lokale Summierbarkeit nicht notwendig erfüllt ist. (Sie gilt jedoch für jedes $x \in \hat{E}$.)

2. Ist A endlich, dann ist offenbar lokal-adaptiert nichts anderes als adaptiert; es handelt sich dann also stets um eine „übliche" Gibbs-Darstellung mit einem „gewöhnlichen" Potential.

3. Existenz einer Gibbs-Darstellung

Nachdem in den Korollaren 2.5 und 2.9 bereits Existenzaussagen für spezielle Fälle gemacht wurden, wollen wir nun den allgemeinen Fall auf die Existenz einer Gibbs-Darstellung hin untersuchen. Wir setzen dazu voraus, daß eine konsistente Energiefunktion, also eine beliebige Funktion $\boldsymbol{H}: \boldsymbol{V} \times E \to \mathsf{R}$ gegeben sei, die der Bedingung (1.5) genügt.

Dann sei m das, durch (2.6) definierte, zu $\boldsymbol{H}$ gehörige Maß auf $\mathfrak{R}$. Das Problem besteht nun darin, Bedingungen an $\boldsymbol{H}$ anzugeben, die garantieren, daß eine σ-additive Fortsetzung von m zu einem Maß μ auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ existiert, welches eine endliche Variation auf jedem $\mathfrak{D}(V)$ $(V \in \boldsymbol{V})$ besitzt.

Sei dazu $x \in E$ fest.

Wir schreiben kurz m für $m(\cdot, x)$ und setzen für $W \in \boldsymbol{V}$ die Abbildung $m_W: \boldsymbol{V} \to \mathsf{R}$ fest durch

$$(3.1) \qquad m_W(B) = \begin{cases} m(\mathfrak{D}(W:B)), & B \subset W \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt zunächst folgendes:

3.1. Lemma: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) m ist σ-additiv fortsetzbar zu einem Maß μ auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, das σ-additiv ist und endliche Variation auf jedem $\mathfrak{D}(V)$ $(V \in \boldsymbol{V})$ besitzt.

b) Das Netz der Abbildungen $(m_W)_{W \in \boldsymbol{V}}$ ($\boldsymbol{V}$ durch Inklusion geordnet) ist punktweise konvergent und auf jedem $\mathfrak{D}(V)$ gleichgradig integrierbar bezüglich des Zählmaßes ϱ_V auf $\mathfrak{D}(V)$.

Beweis: a)$\Rightarrow$b) Wegen $\mathfrak{D}(W:B) \downarrow \{B\}$ für $W \uparrow A$ ist $(m_W)_{W \in \boldsymbol{V}}$ punktweise konvergent.

Sei $V \in \boldsymbol{V}$, $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $W_0 \in \boldsymbol{V}$ mit $\sum\limits_{\substack{B \in \mathfrak{D}(V) \\ B \not\subset W_0}} |\mu(B)| < \varepsilon$.

Setzt man $g : \mathfrak{D}(V) \to \boldsymbol{R}$ fest durch

$$g(B) = \begin{cases} \max\{|m|(B) : W \subset W_0\} + 1, & B \subset W_0 \\ |\mu(B)| & , B \not\subset W_0 \end{cases}$$

dann ist g offenbar integrierbar bezüglich ϱ_V.

Ferner gilt für beliebiges $W \in \boldsymbol{V}$:

$|m_W|(B) \leq |m_{W \cap W_0}|(B)$, also für $B \subset W_0$:

$|m_W|(B) < g(B)$. Somit ist

$$\sum_{\{|m_W| \geq g\} \cap \mathfrak{D}(V)} |m_W(B)| \leq \sum_{\substack{B \in \mathfrak{D}(V) \\ B \not\subset W_0}} |m_W|(B) \leq \sum_{\substack{B \in \mathfrak{D}(V) \\ B \not\subset W_0}} |\mu(B)| < \varepsilon.$$

b) $\Rightarrow$ a) Ist $(m_W)_{W \in \boldsymbol{V}}$ punktweise konvergent, dann ist
$\mu(B) = \lim\limits_{W \uparrow A} m_W(B)$
für $B \in \boldsymbol{V}$ wohldefiniert.

Ferner konvergiert $(m_W)_{W \in \boldsymbol{V}}$ gegen μ in $L^1(\varrho_V)$, also ist μ auf $\mathfrak{D}(V)$ summierbar, d. h. besitzt endliche Variation auf $\mathfrak{D}(V)$

($V \in \boldsymbol{V}$). Wegen der L^1-Konvergenz gilt für jedes $R \in \mathfrak{R}$ (jedes R ist in einem $\mathfrak{D}(V)$ enthalten): $m(R) = \sum_{B \in R} m_W(B) = \sum_{B \in R} \mu(B)$.

Um nun die Konvergenz der Abbildungen $(m_W)_{W \in \boldsymbol{V}}$ besser auf $\boldsymbol{H}$ übertragen zu können, formulieren wir $m_W(B)$ mit Hilfe der Konsistenzbedingung (1.5) um:

Für $W \in \boldsymbol{V}$, $\emptyset \neq B \subset W$ ist

$$m_W(B) = -\sum_{W \setminus B \subset U \subset W} (-1)^{|B \cap U|} \boldsymbol{H}(U, x) =$$
$$= -\sum_{U \subset B} (-1)^{|U|} \boldsymbol{H}(U \cup (W \setminus B), x) =$$
$$= -\sum_{U \subset B} (-1)^{|U|} (\boldsymbol{H}(W \setminus B, x) + \boldsymbol{H}(U, \omega_{W \setminus B} x)) =$$
$$= -\sum_{U \subset B} (-1)^{|U|} \boldsymbol{H}(U, \omega_{W \setminus B} x).$$

Wir schreiben nun für $x \in E$, $W \in \boldsymbol{V}$:

$$f_W(B, x) = \begin{cases} -\sum_{U \subset B} (-1)^{|U|} \boldsymbol{H}(U, \omega_{W \setminus B} x), & \emptyset \neq B \subset W \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Dann gilt für alle $x \in E$ und alle $V, W \in \boldsymbol{V}$ mit $V \subset W$:

$$\sum_{B \in \mathfrak{D}(V)} f_W(B, x) = \sum_{B \in \mathfrak{D}(V)} m(\mathfrak{D}(W : B), x) = m(\mathfrak{D}(V), x) = \tag{3.3}$$
$$= \boldsymbol{H}(V, x).$$

Nun können wir den folgenden Existenzsatz beweisen:

3.2. Theorem: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) $\boldsymbol{H}$ ist vom Gibbsschen Typ

b) $\boldsymbol{H}$ ist vom Gibbsschen Typ, wobei das zugehörige verallgemeinerte Potential $\boldsymbol{U}$ eindeutig bestimmt, normiert und lokal adaptiert ist.

c) Für jedes $x \in E$ und jedes $U, V \in \boldsymbol{V}$ mit $U \subset V$ existiert $\lim_{W \uparrow A} \boldsymbol{H}(U, \omega_{W \setminus V}\, x)$ in $\boldsymbol{R}$ und für jedes $x \in E$ und $V \in \boldsymbol{V}$ ist die Familie $(f_W)_{W \in \boldsymbol{V}}$ der Abbildungen $f_W : \boldsymbol{V} \to R$, die definiert ist durch (3.2), gleichmäßig auf $\mathfrak{D}(V)$ summierbar (d. h. gleichgradig integrierbar bezüglich des Zählmaßes ϱ_V auf $\mathfrak{D}(V)$).

Beweis: Die Äquivalenz von a) und b) ergibt sich aus Korollar 2.4 und Theorem 2.8. Der Rest ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.1 und den dem Theorem 3.2 vorangehenden Bemerkungen.

Wir gehen nun noch kurz auf die Bedingung der Stetigkeit von $\boldsymbol{H}$ ein: Versieht man jedes $S_a (a \in A)$ mit der diskreten und E mit der zugehörigen Produkttopologie, dann ist für jedes $V \in \boldsymbol{V}$ die Abbildung $x \to \boldsymbol{H}(V, x)$ genau dann stetig in $x \in E$, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $W \in \boldsymbol{V}$ mit $|\boldsymbol{H}(V, x) - \boldsymbol{H}(V, y)| < \varepsilon$ für alle $y \in E$, für die $W \subset \{x = y\}$ ist.

Für kompaktes E ist dies äquivalent zu

$$(3.4) \qquad \lim_{W \uparrow A} \boldsymbol{H}(V, x_W \omega) \text{ existiert}$$

d. h. verbal: „Ändert man die Konfiguration x weit draußen ab zur Vakuumkonfiguration ω, dann ändert sich die Energie in V nur wenig."

Die in Theorem 3.2 c) auftretende Bedingung

$$(3.5) \qquad \lim_{W \uparrow A} \boldsymbol{H}(V, \omega_{W \setminus V}\, x) \text{ existiert}$$

besagt verbal: „Ändert man die Konfiguration x weit draußen, aber nur *lokal*, d. h. in einem endlichen Bereich, ab zur Vakuumkonfiguration ω, dann ändert sich die Energie in V nur wenig".

Wir nennen daher $\boldsymbol{H}$ *lokal stetig*, wenn (3.5) gilt. Mit Hilfe der Konsistenzbedingung (1.5) sieht man leicht, daß dies äquivalent ist zu der in 3.2 c) formulierten Konvergenzbedingung. Dann gilt also:

$\boldsymbol{H}$ ist genau dann vom Gibbsschen Typ, wenn $\boldsymbol{H}$ lokal stetig ist und die in Theorem 3.2 c) formulierte Summierbarkeitsbedingung erfüllt ist. Dabei ist das zugehörige Potential im allgemeinen lokal adaptiert. Die Adaptiertheit des Potentials kann nun noch wie folgt charakterisiert werden:

3.3. Bemerkung: Ist $\boldsymbol{H}$ vom Gibbsschen Typ mit verallgemeinertem Potential $\boldsymbol{U}$, dann ist $\boldsymbol{U}$ genau dann adaptiert (also ein Potential), wenn $\boldsymbol{H}$ die Bedingung (3.4) erfüllt.

Denn: Erfüllt $\boldsymbol{H}$ (3.4), dann ist $\boldsymbol{U}$ adaptiert nach Korollar 2.9 b). Ist andererseits $\boldsymbol{U}$ adaptiert, dann ist

$$\lim_{W\uparrow A} \boldsymbol{H}(V, x_W\omega) = \lim_{W\uparrow A} \sum_{B\in\mathfrak{D}(V)} \boldsymbol{U}(B, x_W\omega) =$$

$$= \lim_{W\uparrow A} \sum_{\substack{B\in\mathfrak{D}(V)\\ B\subset W}} \boldsymbol{U}(B, x_W\omega) = \lim_{W\uparrow A} \sum_{\substack{B\in\mathfrak{D}(V)\\ B\subset W}} \boldsymbol{U}(B, x) = \boldsymbol{H}(V, x).$$

Um zu zeigen, daß auch in unserem verallgemeinerten Sinne nicht jede konsistente Energiefunktion $\boldsymbol{H}: \boldsymbol{V}\times E \to R$ vom Gibbsschen Typ ist, geben wir ein Beispiel für eine konsistente Funktion $\boldsymbol{H}: \boldsymbol{V}\times E \to R$, das die in Theorem 3.2 c) formulierte Bedingung nicht erfüllt:

Sei $A = Z$, $S_a = S = \{0, 1\}$ für alle $a \in A$. Also $E = \{0, 1\}^Z$.

Wir definieren $\boldsymbol{H}: \boldsymbol{V}\times E \to R$ durch

$$\boldsymbol{H}(V, x) = \begin{cases} 1, & x \equiv 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boldsymbol{H}$ ist offenbar konsistent und lokal stetig.

Mit den Bezeichnungen von (3.2) gilt jedoch:

$$f_W(B, x) = \begin{cases} 1, & B = W, x \equiv 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $(f_W)_{W\in V}$ auf keinem $\mathfrak{D}(V)$ gleichmäßig summierbar und damit nach Theorem 3.2 $\boldsymbol{H}$ nicht vom Gibbsschen Typ.

(Mit

$$\boldsymbol{U}(B, x) = \begin{cases} 1, & B = Z, x \equiv 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt zwar $\boldsymbol{H}(V, x) = \sum_{\substack{B \cap V \neq \emptyset \\ B \subset Z}} \boldsymbol{U}(B, x)$ für alle $x \in E$, $V \in \boldsymbol{V}$, aber für $x \equiv 1$ ist $\boldsymbol{H}(V, x) = 1 \neq 0 = \sum_{B \in \mathfrak{D}(V)} \boldsymbol{U}(B, x)$).

Abschließend gehen wir noch kurz auf das eingangs diskutierte Beispiel des Münzwurfmodells ein:

Dem dort aufgetretenen Phänomen, daß die durch die lokale Spezifikation (0.4) bestimmten Gleichgewichte diejenigen als Extremalpunkte enthalten, die durch (0.1) bestimmt sind, liegt ein allgemeinerer Sachverhalt zugrunde: Es ist bekannt, daß man in gewissen Interaktionsmodellen die Extremalpunkte der kanonischen Gibbsmaße als Vereinigung der Extremalpunkte der großkanonischen Gibbsmaße erhält, wenn der Parameter der „chemischen Aktivität" z alle Werte in $[0, +\infty]$ durchläuft (s. Georgii (1976), Preston (1979)). (In unserem Beispiel entspricht $\ln \frac{1-p}{p}$ der „chemischen Aktivität" z.) Wie nun H. O. Georgii in seiner Arbeit (Theorem 3.1) gezeigt hat, gewinnt man in bestimmten Fällen durch Ersetzen von z durch eine geeignete tailmeßbare Funktion $z(\cdot)$ eine lokale Spezifikation, deren Gleichgewichte gerade die kanonischen Gibbsmaße sind. Bemerkt man nun noch, daß die Menge der Gleichgewichte, für die $z(\cdot)$ fast sicher konstant ist, eine Seite in der konvexen Menge aller Gleichgewichte ist, dann erhält man einen geometrischen Zugang zu oben angegebener Extremalpunktbeziehung.

Anmerkung: Obwohl der vorliegenden Arbeit keine physikalischen, sondern allein mathematische Fragestellungen zugrundeliegen, könnte der Einwand erhoben werden, daß durch die Betrachtung verallgemeinerter Potentiale gegen den Grundsatz der strikten Trennung von mikroskopischen und makroskopischen Größen verstoßen werde. Daher sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß bei den in der Physik betrachteten sogenannten „mean field theories" (vgl. z. B. Cassandro-Jona-Lasinio, pp. 921 u. 925) eine derartige Trennung bereits aufgehoben ist. Es sei hierzu auch K. G. Wilson zitiert, der zu den „mean field theories" von J. D. van der Waals, Pierre Weiss,

L. D. Landau schreibt (p. 151 des zitierten Artikels): „In all these theories the state of any selected particle is determined by the average properties of the material as a whole, properties such as the net magnetization. In effect all particles in the system contribute equally to the force at every site, which is equivalent to assuming that the forces have infinite range."

Literatur:

Averintsev, M. B.: Description of Markovian random fields by Gibbsian conditional probabilities. Theory of Prob. and Appl. 17, 20–32 (1972).

Cassandro M.–Jona-Lasinio G.: Critical point behaviour and probability theory. Advances in Physics 27, 913–941 (1978).

Dobrushin, R. L.: Description of a random field by means of conditional probabilities and the conditions governing its regularity. Theory of Prob. and Appl. 13, 197–224 (1968).

Evstigneev, I. V.: A Note on Gibbs Representation. Lecture Notes in Math., Vol. 653, 194–202 (1978).

Georgii, H. O.: Stochastische Felder und ihre Anwendungen auf Interaktionssysteme. Vorlesungs-Ausarbeitung Univ. Heidelberg (1974).

Georgii, H. O.: On Canonical Gibbs States, Symmetric and Tail Events. Zeitschrift für Wahrsch.-Theorie 33, 331–341 (1976).

Grimmet, R. G.: A theorem about random fields. Bull. London Math. Soc. 5, 81–84 (1973).

Kozlow, O. K.: Gibbsian Description of a system of random quantities. Problems of Inform. Transmission 10, 94–103 (1974).

Preston, C.: Random Fields. Lecture Notes in Math., Vol. 534 (1976).

Preston, C.: Canonical and Microcanonical Gibbs States. Zeitschr. für Wahrsch.-Theorie 46, 125–158 (1979).

Ruelle, D.: Thermodynamic Formalism. Addison Wesley Publ. Comp., Reading Mass. (1978).

Spitzer, F.: Random Fields and Interacting Particle Systems. Amer. Math. Monthly 78, 142–154 (1971).

Sullivan, W. G.: Potentials for almost Markovian random fields. Comm. Math. Phys. 33, 61–74 (1973).

Wilson, K. G.: Problems in Physics with Many Scales of Length. Scientific American, Aug. 1979.