BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1981

MÜNCHEN 1982

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Dynamische Symmetrien klassisch relativistischer Zweiteilchensysteme

Fritz Bopp

§ 1. Einleitung

Heisenberg hat vermutet, die neuen Symmetrien der Elementarteilchenphysik seien in der Mehrteilchenphysik verankert. Dabei hat er auf verwandte empirische Eigenschaften der Festkörperphysik hingewiesen. Diese Auffassung wird wegen überwältigender Erfolge der Quarktheorien überwiegend abgelehnt.

Sine ira et studio fragen wir hier, ob es die von Heisenberg vermuteten dynamischen Symmetrien wirklich gibt. Dabei beschränken wir uns auf klassisch physikalische relativistische Mehrteilchensysteme und betrachten insbesondere die aus zwei Materiepunkten.

Das Ergebnis lautet: Dynamische Symmetrien sind allgegenwärtig. Seien f die Anzahl der kanonischen Variablenpaare und n die Parameterzahl der Symmetriegruppe, so ist $n \geq 2f$, speziell bei zwei Materiepunkten größer als 12. Neben der Poincaréinvarianz besteht O4-Invarianz. Bei geringem Abstand der Partner kann es außerdem näherungsweise U3-Symmetrie geben.

§ 2. Kanonische Gleichungen

Wir betrachten abgeschlossene Systeme, also solche, deren Wechselwirkung mit der Umwelt vernachlässigbar ist. Ihre Lage werde durch f Koordinaten

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2 \cdot \cdot q_\alpha \cdot \cdot q_f) \tag{2.1}$$

beschrieben, die durch Messungen definiert seien und weitgehend willkürlich wählbar sind. Zu jeder Koordinate q_α gehöre eine Bewegungsgröße p_α. Wie die Lage des Systems durch $\boldsymbol{q}$, so wird seine Bewegung durch

$$p = (p_1, p_2 \,..\, p_\alpha \,..\, p_f) \tag{2.2}$$

dargestellt. Mit $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ wird der Zustand des Systems vollständig erfaßt. Somit sind $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ die Zustandsvariablen.

Nach den Definitionen III und IV von Newton[1] heißen die Ursachen für Lage- und Bewegungsänderungen Trägheit (vis insita) und Kraft (vis impressa). Das führt zu den Gleichungen

$$\frac{dq_\alpha}{d\tau} = I_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \tau), \qquad \frac{dp_\alpha}{d\tau} = F_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \tau). \tag{2.3}$$

Bei abgeschlossenen Systemen fehlen nach Voraussetzung Einwirkungen von außen. Darum können $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2 \ldots I_f)$ und $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2 \ldots F_f)$ nur von $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ und einem zunächst willkürlichen Zeitordnungsparameter τ abhängen. Hiernach wird die Bewegung durch $2f$ Funktionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{F}$ beschrieben, die zunächst noch unbekannt sind.

Die Willkür der Wahl von τ kann man einengen. Für Bahnen im Zustandsraum folgen aus (2.3) die Gleichungen

$$I_\alpha dp_\alpha - F_\alpha dq_\alpha = 0, \qquad \alpha \in (1, 2 \,..\, f).$$

Die f Differentialformen auf der linken Seite haben integrierende Nenner gemäß

$$\frac{1}{N_\alpha}(I_\alpha dp_\alpha - F_\alpha dq_\alpha) = dH_\alpha.$$

Daraus folgt

$$I_\alpha = N_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_\alpha}, \qquad F_\alpha = -N_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\alpha}.$$

Führen wir für jedes α mittels

$$dt_\alpha = N_\alpha d\tau$$

einen eigenen durch das System selbst nahegelegten Zeitparameter ein, so ergibt sich nach Substitution in (2.3)

$$\frac{dp_\alpha}{dt_\alpha} = -\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{dq_\alpha}{dt_\alpha} = +\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_\alpha}.$$

---

[1] Newton, I.: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Streater, London 1687; hier: Definitionen III und IV.

Hiernach gibt es im allgemeinen keinen gemeinsamen integrierenden Nenner und damit keine gemeinsame systemeigene Zeit. Doch ist es physikalisch vernünftig, beides zu fordern. Das geschieht durch das Zeitpostulat, nach dem die Summe der f Differentialformen einen integrierenden Nenner[2] habe. Aus

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha}(I_\alpha dp_\alpha - F_\alpha dq_\alpha) = dH \tag{2.4}$$

folgt

$$I_\alpha = +N\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad F_\alpha = -N\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

und mit der nunmehr gemeinsamen systemeigenen Zeit

$$dt = N d\tau \tag{2.5}$$

erhält man durch Substitution in (2.3) die kanonischen Gleichungen von Hamilton

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{dq_\alpha}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \tag{2.6}$$

Es genügt das Zeitpostulat, um auf direktem Wege von den Newtonschen Definitionen III und IV zu den kanonischen Gleichungen zu gelangen. Dabei spielt die Frage, ob und wie die Lagekoordinaten im Raum eingebettet sind, noch keine Rolle. Die Bewegungsgesetze existieren, noch bevor wir Genaueres über Raum und Zeit wissen.

Nach Hinzunahme des Zeitpostulats in (2.4) bestimmen sich die 2f Komponenten von Trägheit und Kraft aus einer einzigen noch unbekannten Funktion, der Hamiltonfunktion H. Trotz unbekanntem H gelangt man von (2.6) zur gesamten kanonischen Mechanik. Wir werden sie im weiteren als bekannt voraussetzen[3] und erinnern nur daran, daß die kanonischen Gleichungen bei den durch

[2] An die formale Verwandtschaft mit der Definition von Temperatur und Entropie in der Thermodynamik sei erinnert.

[3] Sommerfeld, A. (u. a.): Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. I, Mechanik, AVG, Leipzig 1930; hier: Kapitel VIII.

$$\left(\sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - H dt\right) + \left(\sum_\alpha q'_\alpha dp'_\alpha - t' dH'\right) = dE(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{p}', H') \tag{2.7}$$

definierten kanonischen Transformationen

$$(\boldsymbol{p}, -H; \boldsymbol{q}, t) \to (\boldsymbol{p}', -H'; \boldsymbol{q}', t')$$

invariant sind. Die weitgehend willkürlich wählbare Funktion E heißt „erzeugende Funktion der kanonischen Transformation". H und t sind also nur bis auf kanonische Transformationen bestimmt. Zu ihrer Festlegung braucht man weitere Prinzipien.

§ 3. Symmetrieprinzipien

Jede Lösung der kanonischen Gleichungen (2.6) beschreibt ein spezielles physikalisches System und sein Verhalten. Verschiedene Lösungen sind auf unterschiedliche Systeme bezogen. Unter diesen gibt es solche, die wir als gleichartig betrachten, z. B. einen Tisch hier und einen gleichartigen dort. Die kanonischen Gleichungen lassen allein noch nicht erkennen, ob zwei verschiedene Systeme gleichartig sind. Gleichartigkeit kann sich nur in speziellen Eigenschaften der Hamiltonfunktion zeigen. Kriterien zur Beurteilung der Gleichartigkeit müssen darum zu einer genaueren Bestimmung der Hamiltonfunktion führen. Wie man hier weiterkommt, zeigt das Beispiel der Geometrie von Euklid.

In der Euklidschen Geometrie werden Dinge nicht durch Lösungen von kanonischen Gleichungen, sondern durch starr gedachte Gebiete[4] im Raum beschrieben. Das Verhalten der Dinge bleibt außer Betracht. Gleichartig sind kongruente Gebiete, also solche, die durch bestimmte Transformationen zur Deckung gebracht werden. Da Gleichartigkeit eine Äquivalenzrelation ist, bilden die Deckoperationen eine Gruppe, nämlich die Euklidsche Gruppe, die aus dreidimensionalen Translationen und Rotationen besteht. (Im herkömmlichen Namen Bewegungsgruppe steckt ein antiquierter Bewegungsbegriff (Bewegung ≡ Lageänderung), den man in der Physik vermeiden sollte.)

---

[4] Hier ist nicht an die Euklidschen Axiome gedacht, sondern an die auf Dinge bezogenen Vorstellungen, die den Axiomen zugrundeliegen.

An die Stelle der Gebiete im Raum treten hier Lösungen der kanonischen Gleichungen. Wir haben darum nach einer Gruppe zu fragen, deren Transformationen Lösungen der kanonischen Gleichungen in andere Lösungen derselben kanonischen Gleichungen überführen. Da vor und nach der Transformation kanonische Gleichungen gelten, kommen nur kanonische Transformationen ins Spiel. Es genügt, infinitesimale Transformationen zu betrachten. Die erzeugende Transformation

$$E = \sum_\alpha q_\alpha p'_\alpha - tH' + \eta(q, t; p,' H')$$

mit infinitesimalem η liefert für $\delta q_\alpha = q'_\alpha - q_\alpha$ usw.

$$\begin{aligned} \delta p_\alpha &= -\frac{\partial \eta}{\partial q_\alpha}, \quad & \delta H &= +\frac{\partial \eta}{\partial t}; \\ \delta q_\alpha &= +\frac{\partial \eta}{\partial p_\alpha}, \quad & \delta t &= -\frac{\partial \eta}{\partial H}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sei t die bereits anzustrebende Zeit, so muß $\delta t = -\partial\eta/\partial H = 0$ sein, also

$$\eta = \eta\,(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}, t). \tag{3.2}$$

Für beliebige Funktionen $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ folgt aus den kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial t} + [H, G], \\ [H, G] &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

als zeitliche Änderung. Darin ist $[H, G]$ eine Poissonklammer. Entsprechend erhält man aus (3.1/2) als Änderung bei der kanonischen Transformation η

$$\delta G = [\eta, G]. \tag{3.4}$$

Bei Deckoperationen müssen Lösungen der kanonischen Gleichungen wieder in solche derselben Gleichungen übergehen. Darum darf es bei ihnen nicht darauf ankommen, ob wir erst mit η und dann mit H transformieren oder umgekehrt. Es muß also

$$\frac{d\,\delta G}{dt} = \delta\,\frac{dG}{dt}$$

sein. Daraus folgt

$$\left[\frac{d\eta}{dt}, G\right] + \left[\eta, \frac{\partial G}{\partial t} + [H, G]\right] = \left[\eta, \frac{\partial G}{\partial t} + [H, G]\right]$$

oder

$$\left[\frac{d\eta}{dt}, G\right] = 0.$$

Da das identisch in G gilt, also auch für $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$, muß

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{d\eta}{dt}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{d\eta}{dt}\right) = 0$$

sein. Danach könnte $d\eta/dt$ noch eine von $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ unabhängige Zeitfunktion sein, wodurch zu η das entsprechende von $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ unabhängige Zeitintegral hinzuträte. Da dieser Zusatz ohne Einfluß auf δG in (3.4) ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + [H, \eta] = 0 \tag{3.5}$$

setzen. Die Symmetrieoperationen η sind also Konstante der Bewegung[5]:

$$\eta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) = \text{const.} \tag{3.6}$$

Umgekehrt liefert jede Konstante der Bewegung eine Symmetrieoperation. Jedes η muß Lösung der Differentialgleichung (3.5) sein.

Bei gegebenem H und unabhängigen $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ hat die Differentialgleichung (3.5) genau $2f$ unabhängige Integrale[6].

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2 \,..\, \eta_2 \,..\, \eta_{2f}). \tag{3.7}$$

Jedes Integral von (3.5) läßt sich als Funktion von $\boldsymbol{\eta}$ darstellen. Da die Poissonklammern

---

[5] Der von E. Noether entdeckte Zusammenhang zwischen Invarianz und Erhaltungsgrößen wird in zahlreichen einschlägigen Lehrbüchern behandelt, vor allem in quantenfeldtheoretischen.

[6] Kamke, E. (u. a.): Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion als Bd. II von Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, AVG, Leipzig, 1950.

(3.8) $$[\eta_i, \eta_k] = \eta_{ik}(\boldsymbol{\eta})$$

wegen

$$\frac{d}{dt}[\eta_i, \eta_k] = \left[\frac{d\eta_i}{dt}, \eta_k\right] + \left[\eta_i, \frac{d\eta_k}{dt}\right] = 0$$

Integrale von (3.5) sind, lassen sich die η_{ik} als Funktionen von $\boldsymbol{\eta}$ darstellen. Wären diese Funktionen linear in $\boldsymbol{\eta}$, so hätten wir bereits die Liealgebra einer Gruppe. Denn Poissonklammern sind schiefsymmetrisch und genügen der Jacobischen Identität

$$[A, B] = -[B, A], \; [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Im allgemeinen sind die Funktionen η_{ik} nicht linear. Da sie jedoch Integrale sind, gehören sie zu einer größeren Mannigfaltigkeit von linear unabhängigen Integralen

(3.9) $$f(\boldsymbol{\eta}) = (f_1(\boldsymbol{\eta}), f_2(\boldsymbol{\eta}) \dots f_n(\boldsymbol{\eta})),$$

für die

(3.10) $$[f_\alpha, f_\beta] = \sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} f_\gamma$$

ist. Man kann das stets erreichen. Denn jeder nichtlineare Term auf der rechten Seite von (3.8) kann zu einer Erweiterung des Satzes linear unabhängiger Funktionen $f(\boldsymbol{\eta})$ benutzt werden. Doch ist es nicht von vorneherein sicher, ob die so entstehende Liealgebra endlich oder unendlich viele Dimensionen hat.

Dazu ein Beispiel: Im Falle $f = 1$ gibt es zwei vollständig unabhängige Integrale η_1, η_2 und damit nur eine Poissonklammer, etwa

$$[\eta_1, \eta_2] = \eta_2^2.$$

Daraus folgt

$$[\eta_1, \eta_2^n] = n\eta_2^{n+1}.$$

Somit liefert

$$f = (\eta_1, \eta_2, \eta_2^2 \dots \eta_2^n \dots)$$

die Liealgebra einer Gruppe mit unendlich vielen Parametern. Doch kann man in diesem Beispiel die Parameterzahl reduzieren und sogar den kleinst möglichen Wert $f = 2$ erreichen. Denn

$$f_1 = \eta_1, f_2 = e^{-1/\eta_2}$$

führt zu

$$[f_1, f_2] = f_2.$$

Die zweidimensionale Darstellung dieser Liealgebra lautet

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Sie liefert die Transformationen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, 0 \\ b, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; a > 0,$$

und das Kompositiongesetz

$$\begin{pmatrix} a, 0 \\ b, 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a', 0 \\ b', 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa', & 0 \\ ba' + b', & 1 \end{pmatrix}.$$

Danach führt $a = 1$, $b = 0$ zur Identität und $a' = 1/a$, $b' = -b/a$ zur reziproken Transformation. Die eindimensionale Darstellung

$$x \rightarrow x' = ax + b, \; a > 0,$$

besteht aus Translationen und Dilatationen (ohne Spiegelung).

Somit ist der wichtigste Symmetriesatz bewiesen: Jede Hamiltonfunktion liefert eine Symmetriegruppe, deren Parameterzahl $n \geq 2f$ ist. Für größere Werte von f gibt es darum viel Platz für die von Heisenberg erwarteten dynamischen Symmetrien. Diese sind allgegenwärtig. Doch ist die umgekehrte Frage von größerer Bedeutung: Welche Hamiltonfunktionen ergeben sich bei vorgegebener Symmetrie?

§ 4. Poincaréinvarianz

Die kanonischen Gleichungen (2.6) liefern das Gesetz für Bewegungen. Das soll sich im Laufe der Zeit nicht ändern. Darum muß H ein Integral der Bewegung sein. H definiert also Zeittranslationen, und das Integral heißt Energie (E. Noether). Danach folgt aus (3.3)

$$\text{(4.1)} \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ und } H = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = W = \text{const.}$$

Sei τ der zugehörige Gruppenparameter, so liefern die Zeittranslationen $\eta = H$ nach (3.4)

$$\delta G = \frac{dG}{d\tau} = [H, G]. \tag{4.2}$$

Für Größen G, die nicht explizit von der Zeit abhängen, ist also

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{dG}{dt}. \tag{4.3}$$

Danach ist die Zeit t der Gruppenparameter für Zeittranslationen. Hierdurch ist die Zeit gruppentheoretisch definiert. Man beachte, daß (4.3) nicht mehr gelten kann, wenn $\partial_t G \neq 0$ ist. Denn dann folgt aus (4.2) und (3.3)

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{dG}{dt} - \frac{\partial G}{\partial \tau}.$$

Darum sind physikalische Größen durch Funktionen $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ definiert[7], die nicht mehr explizit von der Zeit abhängen. Eine explizit zeitabhängige Funktion ist im Laufe der Zeit auf wechselnde Größen bezogen, so daß (4.3) nicht fortzubestehen braucht.

Der Raum, in dem sich die Systeme bewegen, sei dreidimensional[8], d.h. es gibt drei unabhängige Größen $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, die Lösungen von kanonischen Gleichungen in andere Lösungen derselben überführen, für die also

$$\delta_i G \equiv [P_i, H] = 0 \tag{4.4}$$

und

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = [H, \boldsymbol{P}] = 0, \ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \text{const}, \tag{4.5}$$

gilt. Diese Transformationen heißen Translationen im Raum und liefern als Integrale den dreikomponentigen Impuls $\boldsymbol{P}$.

Die Poissongleichungen in (4.4/5) lauten explizit

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) \boldsymbol{P} \equiv D\boldsymbol{P} = 0.$$

[7] Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ in der Liouvilleschen Gleichung ist ein Beispiel für eine im allgemeinen explizit zeitabhängige Lösung von Gl. (3.5).

[8] Die Dreidimensionalität muß hier ausdrücklich vorausgesetzt werden. Alle andern Aussagen über $\boldsymbol{P}$ gehören zur Definition.

Darin ist D ein Differentialoperator erster Ordnung. Diese Differentialgleichung hat $2f-1$ unabhängige Lösungen. Sobald $f \geq 2$ ist, gibt es bei beliebigem H drei Funktionen $\boldsymbol{P}$ (und im allgemeinen mehr), die den Bedingungen (4.4/5) genügen. Nun ist (4.5) nichts anderes als der Newtonsche Trägheitssatz, der hier nicht als Axiom, sondern als Folgesatz erscheint, sobald f hinreichend groß ist.

Tatsächlich ist $f > 2$, so daß man für $\boldsymbol{P}$ noch weitere Bedingungen fordern kann. Man darf annehmen, daß auch die Impulse translationsinvariant sind, daß also die Gleichungen

$$\delta_i P_k = [P_i, P_k] = 0 \tag{4.6}$$

gelten. Das sind Differentialgleichungen für alle P_k:

$$D P_k = 0, \quad D_i P_k = 0,$$

worin D und D_i die Differentialoperatoren

$$D = \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right),$$

$$D_i = \sum_\alpha \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial P_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right)$$

sind. Jede dieser Differentialgleichungen hat genügend viele Lösungen, wenn nur f hinreichend groß ist, und auch simultane, weil die Differentialgleichungen (4.5/6) miteinander verträglich sind. Denn alle Poissonklammern in (4.5/6) sind mit H und allen $\boldsymbol{P}$ Poissonsch vertauschbar. Auch (4.6) ist darum kein neues Axiom. Die Gleichung entspringt einer möglichen Präzisierung der Definition von $\boldsymbol{P}$.

Bei beliebig vorgegebenem $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ gibt es also vier Größen

$$P_\mu = P_\mu(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \quad \mu \in (0, 1, 2, 3), \tag{4.7}$$

nämlich

$$P_0 = -H, \quad (P_1, P_2, P_3) = \boldsymbol{P}, \tag{4.8}$$

die den Poissonschen Gleichungen

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{4.9}$$

genügen. Das ist die Liealgebra einer vierdimensionalen Abelschen Gruppe. Die Vorzeichenwahl in $P_0 = -H$ ist willkürlich, aber im weiteren bequem, und wird bereits durch die beiden Klammerausdrücke auf der linken Seite von (2.7) nahegelegt. Dieser vierdimensionalen Symmetrie entsprechend nennt man $\boldsymbol{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ Viererimpuls.

Im Sinne des Erlanger Programms von F. Klein[9] definiert die Abelsche Gruppe (4.9) eine Raum-Zeitgeometrie. Bezeichnen wir die zu P_μ gehörigen Gruppenparameter mit x^μ, so folgt für irgendwelche Größen $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$

$$\frac{dG}{dx^\mu} = [P_\mu, G] \equiv D_\mu G,$$

und durch Integration erhält man

$$G(x) = e^{ix^\mu D_\mu} G, \quad G = G(\boldsymbol{o}). \tag{4.10}$$

Hiernach beschreiben die x^μ einerseits die Deckoperationen bei einer Translation x und spannen andererseits die Raum-Zeit relativ zu $x = 0$ auf.

Allein aus der Annahme $\boldsymbol{P}$ unabhängiger H und der Forderung, daß der Raum dreidimensional bzw. die Raum-Zeit vierdimensional sei, ergibt sich die Raum-Zeit als vierdimensionales Punktkontinuum, und zwar eines ohne Gefäßeigenschaften, eines das nur durch die möglichen Translationen definiert ist. Es ist also ein Ordnungsgefüge relativ zu einem Bezugskörper, in abstracto zu einem Koordinatensystem.

Bis zu diesem Zeitpunkt sind drei Ergebnisse besonders bemerkenswert: (1) Bei beliebiger Hamiltonfunktion existiert eine Abelsche Gruppe, die zu einer homogenen Raum-Zeit führt. An der Existenz der Abelschen Gruppe zu zweifeln hieße, die kanonische Mechanik in Frage stellen. – (2) Obwohl wir von ausgedehnten Körpern ausgegangen sind, ist die Raum-Zeit ein Punktkontinuum. Punkte sind hier weder Gebiete, die keine Teile

---

[9] Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872; Math. Ann. *43* (1893); Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, Berlin 1921, S. 460.

haben (Euklid[10]), noch Basiselemente im Sinne der Hilbertschen Axiomatik[11] der Geometrie. Sie ergeben sich hier allein aus den Gruppeneigenschaften von Deckoperationen. – (3) Die Raum-Zeit ist durch die Bewegungsgesetze bestimmt. Wie erstmals A. Einstein[12] in der Allgemeinen Relativitätstheorie bemerkt hat, schafft sich die Physik ihren Raum. Man sollte darum lieber von der Physikalisierung der Geometrie als von der Geometrisierung der Physik sprechen. Was mit dem so beliebten Ziel der Geometrisierung gemeint ist, wird von dem Newtonschen Programm der Mathematisierung der Physik (= Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) umschlossen.

Die durch (4.9) bestimmte Raum-Zeit ist eine affine Mannigfaltigkeit, in der es zunächst noch keine Metrik gibt. Denn (4.9) bleibt bei beliebigen linearen Transformationen der P_μ invariant. Auch (4.10) bleibt unverändert, wenn sich die Raum-Zeitkoordinaten x^μ kontragredient zu P_μ transformieren. Die P_μ bilden also ko- und die x^μ kontravariante Vektoren.

Die Metrik hat eine andere Wurzel. Sie folgt aus dem Schwerpunktssatz. Der Schwerpunkt[13] sei eine dreikomponentige physikalische Größe $(Q_1, Q_2, Q_3) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, die sich zum Gesamtimpuls verhalte wie jede Koordinate q_α zur entsprechenden Bewegungsgröße p_α, d.h.

$$(4.11) \qquad [P_i, P_k] = 0, \quad [P_i, Q_k] = \delta_{ik}, \quad [Q_i, Q_k] = 0.$$

---

[10] Euklid, Axiom I.: Punkt ist, was keine Teile hat. – Innerhalb der Gebietsvorstellung ist das Axiom nicht so inhaltsleer, wie Hilbert von anderen Vorstellungen herkommend meint (l. c. 11). Der Punkt ist ein Gebiet, das ganz in einem anderen liegt oder überhaupt nicht. Es gibt keine echten Teile, die es mit anderen Gebieten gemeinsam haben könnte. Man beachte, daß damit der Euklidsche Punkt nicht als ein auf Null schrumpfendes Gebiet betrachtet wird.

[11] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 3. Auflage, Leipzig 1909. Das Buch ist richtungsweisend für die radikale Abkopplung der Axiome von ihrem anschaulichen Hintergrund, woraus sich u. a. die radikale Ablehnung von Euklid's Axiom I ergibt.

[12] Weyl, H.: Raum-Zeit-Materie, 5. Auflage, Springer, Berlin, 1925; hier § 29.

[13] Diese Definition bewahrt die Eigenschaft, daß sich ein Körper nach außen wie ein Materiepunkt verhält. Sie unterscheidet sich von der in der Feldtheorie üblichen als Energiemittelpunkt.

Diese Gleichungen sind für $f > 3$ stets lösbar, für $f = 3$ z. B. durch den Ansatz $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q}$. Die Komponenten von $\boldsymbol{Q}$ sind keine Integrale der Bewegung. Doch soll die Schwerpunktsgeschwindigkeit gemäß

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = [H, \boldsymbol{Q}] = \boldsymbol{v}, \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = [H, \boldsymbol{v}] = 0 \tag{4.12}$$

konstant sein.[14]

Hier kommt Newtons Definition II ins Spiel,[15] nach der $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{v}$ proportional und der Faktor eine systemabhängige Konstante, Masse genannt, sein sollen. Bisher haben wir neben $\boldsymbol{P}$ nur eine einzige systemabhängige Konstante, nämlich H. Ohne ad hoc eine neue einzuführen, ersetzen wir darum Newtons Definition II durch

$$\boldsymbol{P} = H\boldsymbol{v}. \tag{4.13}$$

Das wird die einzige Abänderung an Newtons Mechanik bleiben. Sie genügt zur Begründung der relativistischen Mechanik von A. Einstein und wird die Lorentz-Minkowskische Metrik liefern.[16]

Multiplizieren wir nämlich die Gleichungen in (4.12) und die mittlere Gleichung in (4.11) mit H, und führen wir durch Definition die Größe

$$\boldsymbol{M}^0 = H\boldsymbol{Q} \tag{4.14}$$

ein, so ergeben sich neben der bereits bekannten Relation $[H, \boldsymbol{P}] = 0$ die Gleichungen

$$[H, \boldsymbol{M}^0] = \boldsymbol{P}, \quad [P_i, M_k^0] = \delta_{ik}. \tag{4.15}$$

Die zugehörige Konstante der Bewegung liefert den Schwerpunktssatz

---

[14] Hierdurch entfällt die für den Energiemittelpunkt charakteristische relativistische Zitterbewegung. Die Definition durch (4.11/12) liefert sozusagen den Mittelpunkt der Zitterbewegung.

[15] l. c. 1, Definition II; vgl. auch l. c. 3, hier: S. 2.

[16] Das ist vielleicht der einfachste Zugang zur Speziellen Relativitätstheorie. Die Frage nach der Konforminvarianz, zu der die Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit führt, tritt in der relativistischen Mechanik nicht auf.

(4.16) $$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}^0 - \boldsymbol{P}t = \text{const},$$

wie aus

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t} + [H, \boldsymbol{K}] = -\boldsymbol{P} + [H, \boldsymbol{M}^0] = 0$$

hervorgeht. Damit kommen zur Energie H und zum Impuls $\boldsymbol{P}$ die drei Konstanten $\boldsymbol{K}$ des Schwerpunktssatzes hinzu. Schließlich gibt es die abgeleiteten Konstanten

(4.17) $$M_{ik} = [M_i^0, M_k^0], \boldsymbol{M} = (M_{23}, M_{31}, M_{12}).$$

Im Ganzen erhält man so die zehn Konstanten der Liealgebra der Poincarégruppe, neben der Energie H und dem Drehimpuls $\boldsymbol{P}$ den sogenannten Boost $\boldsymbol{M}^0$ und den Drehimpuls $\boldsymbol{M}$.

Zunächst betrachten wir den Boost. Aus (4.15) folgt

$$[\boldsymbol{M}^0, H^2 - \boldsymbol{P}^2] = 0.$$

Nach (4.17) folgt daraus ferner

$$[\boldsymbol{M}, H^2 - \boldsymbol{P}^2] = 0.$$

Erst recht sind H und $\boldsymbol{P}$ mit $H^2 - \boldsymbol{P}^2$ vertauschbar. Somit ist

(4.18) $$H^2 - \boldsymbol{P}^2 = m^2 = \text{const}$$

ein Integral, das sich bei allen zehn Transformationen nicht ändert. Das Poincaréinvariante Integral heißt Masse des abgeschlossenen Systems. Sie ist im Falle $\boldsymbol{P} = 0$ bzw. $\boldsymbol{v} = 0$ gleich der Ruhenergie des Systems, bleibt aber anders als die Energie bei allen Transformationen invariant.

Die Boostgleichungen (4.15) liefern die eigentlichen Lorentztransformationen, z. B. die in 1-Richtung

(4.19) $$P_2' = \frac{P_1 + uH}{\sqrt{1-u^2}}, \; P_2' = P_2, P_3' = P_3, H' = \frac{H + uP_1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ausgehend vom Ruhsystem $\boldsymbol{P} = 0$ erhält man speziell

$$P_1' = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2}}, \; P_2' = P_3' = 0, \; H' = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Darin ist die Geschwindigkeit

(4.20) $$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{P}'}{H'} = \boldsymbol{u}.$$

Die eigentlichen Lorentztransformationen beschreiben hiernach u.a. den Übergang von einem ruhenden zu einem bewegten System. Daran soll das amerikanische Wort Boost erinnern, das soviel wie Schubs bedeutet.

Der Drehimpuls $\boldsymbol{M}$ ist eine abgeleitete Größe. Wir müssen noch die $\boldsymbol{M}$-haltigen Teile der Liealgebra der Poincarégruppe bestimmen. Zunächst folgen aus (4.15) und (4.17) die Gleichungen

$$[\boldsymbol{M}, H] = 0 \tag{4.21}$$

und

$$[M_{ik}, P_l] = P_i \delta_{kl} - P_k \delta_{il}, \tag{4.22}$$

sowie entsprechende Gleichungen für $\boldsymbol{v}$. Daraus erhält man

$$[H, \boldsymbol{P}^2] = 0, \tag{4.23}$$

so daß $\boldsymbol{M}$ räumliche Drehungen von $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{v}$ beschreibt. Diese Größen sind also Vektoren im Raum. Entsprechend sind $\boldsymbol{P}^2$ und H räumliche Skalare.

Etwas weniger leicht sind die Vertauschungsrelationen von $\boldsymbol{M}$ mit $\boldsymbol{M}^0$ und $\boldsymbol{M}$ zu begründen. Zwar kann man leicht nachrechnen, daß die Gleichungen

$$[M_{ik}, M_l^0] = M_i^0 \delta_{kl} - M_k^0 \delta_{il} \tag{4.24}$$

und

$$[M_{ik}, M_{jl}] = M_{il}\delta_{kj} - M_{kl}\delta_{ij} + M_{kj}\delta_{il} - M_{ij}\delta_{kl} \tag{4.25}$$

mit der Definition (4.17) verträglich sind. Außerdem folgt (4.25) durch Kommutation von (4.24) mit M_j^0. Doch erhält man statt (4.24) nur die Vertauschbarkeit von $[M_{ik}, M_l^0]$ mit H und $\boldsymbol{P}$.

Es könnten also auf der rechten Seite von (4.24) noch Terme auftreten, die mit H und $\boldsymbol{P}$ vertauschbar sind, zunächst einmal solche, die zu erweiterten Symmetriegruppen führen würden. Das kann man um so weniger ausschließen, als es mit wachsendem f umfassendere Gruppen gibt. Einstweilen scheint es keine Hinweise auf eine Rückwirkung der dynamischen Symmetrien auf die Poincarégruppe zu geben. Darum lassen wir solche Terme nicht zu.

Damit scheiden auf der rechten Seite von (4.24) auch Zusatzterme aus, die in H, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}^0$ und $\boldsymbol{M}$ nicht linear sind. Sie gäben ebenfalls Anlaß, zu weiteren linear unabhängigen Konstanten überzugehen.

Danach müssen mögliche Zusatzterme in (4.24) linear von H, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}^0$ und $\boldsymbol{M}$ abhängen. $\boldsymbol{M}^0$ und $\boldsymbol{M}$ scheiden von vorneherein aus, weil sie nicht mit H und $\boldsymbol{P}$ vertauschbar sind. Zunächst erscheint noch folgender Zusatz als möglich:

$$[M_{ik}, M_l^0] = \ldots + a_{ikl} H + \sum_r b_{iklr} P_r.$$

Durch Kommutation mit M_j^0 erhält man neben den Termen in (4.25)

$$[M_{ik}, M_{lj}^0] = \ldots + a_{ikl} P_j + b_{iklj} H.$$

Danach ist $a_{ikl} = 0$. Denn der erste Summand ist in lj nicht schiefsymmetrisch. Aus der Jacobischen Identität

$$[M_{ik}, M_l^0] + [M_{kl}, M_i^0] + [M_{li}, M_k^0] = 0$$

erhält man für die b-Terme

$$b_{iklr} + b_{klir} + b_{likr} = 0.$$

Daraus folgt wegen der Symmetrieeigenschaften

$$b_{iklj} = -b_{kilj} = b_{kijl} = b_{ikjl} = -b_{ljik},$$

daß auch $b_{iklr} = 0$ sein muß. Es gibt also keine Zusatzglieder. Die Liealgebra der Poincarégruppe wird durch (4.24/25) vervollständigt und ist abgeschlossen. Sie ist durch (4.9), (4.15), (4.17), (4.21) und (4.24/25) bestimmt. Aus dem Grobschema

(4.26)

	P	M
P	O	P
M	P	M

für $P = (P_0, \boldsymbol{P})$ und $M = (\boldsymbol{M}^0, \boldsymbol{M})$ folgt, daß die Translationsgruppe P eine invariante Untergruppe ist.[17] Die Konstanten M liefern die Lorentzgruppe mit folgender Feinstruktur

[17] Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik; Hirzel-Verlag, Leipzig 1928; hier: S. 105.

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \boldsymbol{M}^0 & \boldsymbol{M} \\
\hline
\boldsymbol{M}^0 & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}^0 \\
\boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}^0 & \boldsymbol{M}
\end{array} \tag{4.27}
$$

Von den zehn linear unabhängigen Größen der Liealgebra sind nur sechs völlig unabhängig, nämlich $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{M}^0$, wie aus $H^2 = \boldsymbol{P}^2 + m^2$ und $M_{ik} = [M_i^0, M_k^0]$ hervorgeht. Danach bleiben von den $2f$ unabhängigen Integralen $2(f-3)$ für dynamische Symmetrien übrig, speziell für $f = 3$ keine, so daß Hamiltonfunktion und Liealgebra bei einem Materiepunkt bis auf kanonische Transformationen allein durch die Poincarégruppe bestimmt sind. Bei 2-Punktsystemen ist $2f = 12$, so daß sechs unabhängige Integrale für dynamische Symmetrien zur Verfügung stehen.

§ 5. Relativistische Ein- und Zweipunktsysteme

In 1-Punktsystemen gibt es drei Lagekoordinaten $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und drei Impulskoordinaten $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Da sie bereits den Vertauschungsrelationen (4.11) genügen, kann man sie gemäß

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{r}$$

mit dem Impuls und dem Schwerpunkt identifizieren. Aus

$$[\boldsymbol{P}, H] = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$$

folgt

$$H = H(\boldsymbol{p}).$$

Substitution in die zweite Gleichung (4.15) ergibt

$$\frac{\partial M_k^0}{\partial x_i} = H(\boldsymbol{p})\delta_{ik}, \quad \boldsymbol{M}^0 = H(\boldsymbol{p})\boldsymbol{r},.$$

Damit erhält man aus der ersten

$$H \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}, \quad H = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}.$$

Schließlich liefert (4.17) wegen $[H, \boldsymbol{r}] = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/H$

$$M_{ik} = [Hx_i, Hx_k] = x_i p_k - x_k p_i.$$

Somit lauten die Elemente der Liealgebra

$$(5.1) \qquad H + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\,, \ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}, \ \boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{r}\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}, \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$

Sie sind bis auf eine Massenkonstante m (und bis auf kanonische Transformationen) eindeutig bestimmt.

Entsprechende Gleichungen gelten für zwei Materiepunkte ohne Wechselwirkung. Denn auch

$$(5.2) \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \ H = \sqrt{\boldsymbol{p}_1{}^2 + m^2} + \sqrt{\boldsymbol{p}_2{}^2 + m^2}, \\ &\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{r}_1 \sqrt{\boldsymbol{p}_1{}^2 + m^2} + \boldsymbol{r}_2 \sqrt{\boldsymbol{p}_2{}^2 + m^2} \end{aligned}$$

genügt der Liealgebra der Poincarégruppe, weil bei der Kommutation die ersten und die zweiten Summanden unter sich bleiben. Einfachheitshalber ist angenommen, daß beide Teilchen gleiche Masse haben.

Man könnte meinen, daß es in der Punktmechanik bei Wechselwirkung keine relativistischen Gleichungen gebe[18]. Denn Wechselwirkung bedeutet Energieaustausch. Wegen der endlichen Laufzeiten muß es Energie auf dem Wege geben. Das ist in der Punktmechanik nicht vorgesehen. Doch bedeutet auf dem Wege befindliche Energie, daß sie von den Materiepunkten abgegeben wird. Sie könnte sich in veränderlichen Massen kund tun. Darum gehen wir von folgendem Ansatz aus

$$(5.3) \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \ H = \sqrt{\boldsymbol{p}_1{}^2 + f} + \sqrt{\boldsymbol{p}_2{}^2 + f}\,,$$

worin $f = f(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1; \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}_2)$ eine Funktion der kanonischen Variablen sein kann. Wiederum wählen wir in beiden Summanden einfachheitshalber die gleiche Funktion.

Im Grenzfall großer Abstände muß sich die Liealgebra freier Teilchen einstellen, es muß also

$$\lim_{r \to \infty} f(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1; \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}_2) = m^2, \ r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|,$$

---

[18] Man spricht in diesem Zusammenhang von No-Go-Theoremen. Der Beweis, daß es „doch geht“, ist hier eine Frucht der Anwendung der Liealgebra bei gleichzeitigem Verzicht auf eine explizit kovariante Notation.

sein. Setzen wir $f = m^2 + mg$, so muß g asymptotisch verschwinden. Sei ferner hinreichend weit draußen $g \ll m$, so erhält man im nichtrelativistischen Grenzfall

$$H = 2m + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_1^2 + \boldsymbol{p}_2^2) + g.$$

Das ist in der Tat die Hamiltonfunktion für ein nichtrelativistisches Zweiteilchensystem mit der Wechselwirkungsenergie g. Wenn man (5.3) zu einer vollständigen Liealgebra ergänzen kann, hat man die Gleichungen für ein relativistisches Zweiteilchensystem im Griff.

Die Funktion f hängt nur von den Relativkoordinaten ab gemäß

$$f = f(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2. \tag{5.4}$$

Das folgt aus

$$[\boldsymbol{P}, H] = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_2} = 0.$$

Entsprechend erhält man aus der zweiten Boostgleichung in (4.15)

$$[P_i, M_k^0] = \frac{\partial M_k^0}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial M_k^0}{\partial x_{2i}} = H\delta_{ik},$$

woraus sich, da H von $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$ unabhängig ist,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}^0 = H\boldsymbol{R} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{R} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2), \\ &\boldsymbol{R} = (X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ergibt. Damit erhält man aus der ersten Boostgleichung in (4.15)

$$[H, \boldsymbol{M}^0] = H[H, \boldsymbol{R}] + [H, \boldsymbol{N}] = \boldsymbol{P},$$

also wegen $[P_i, R_k] = \delta_{ik}$

$$[H, \boldsymbol{N}] = -\frac{1}{2}[H^2 - \boldsymbol{P}^2, \boldsymbol{R}]. \tag{5.6}$$

Das führt bei beliebig vorgegebenem f zu den unabhängigen inhomogenen Differentialgleichungen vom Pfaffschen Typ[19]

[19] I, c. 6, hier: S. 35.

$$\begin{aligned}(5.7)\qquad &\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\boldsymbol{N}=-\frac{1}{2}\,[H^2-\boldsymbol{P}^2,\boldsymbol{R}],\\ &\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2).\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen sind bei beliebigem f, auch bei asymptotisch verschwindendem integrierbar, wenn auch im allgemeinen nicht leicht explizit lösbar. Eine passend ausgewählte Lösung der homogenen Gleichung muß dafür sorgen, daß sich für $r\to\infty$ der Boost für freie Teilchen aus (5.2) ergibt. Das ist möglich, weil $\boldsymbol{M}^0$ aus (5.2) Lösung von (5.7) für H aus (5.2) ist.

Hat man $\boldsymbol{N}$, so sind $\boldsymbol{M}^0$ durch (5.5) und $\boldsymbol{M}$ durch (4.17) bestimmt. Nach dem in § 4 bewiesenen Satz gelangt man so zur vollständigen Liealgebra der Poincarégruppe. Jedes asymptotisch richtige f führt also zu einem Poincaréinvarianten 2-Punktsystem mit Wechselwirkung.

§ 6. Dynamische Symmetrien

In abgeschlossenen Systemen ist es vorteilhaft, zum Schwerpunktssystem überzugehen, in dem der Impuls $\boldsymbol{P}=0$ ist (Wignersche Kleingruppe[20]). Mit den Lösungen im Schwerpunktssystem erfaßt man die Dynamik vollständig. Durch einen Boost, also durch eine rein kinematische Transformation kann man jede Lösung mit einem von 0 verschiedenen Impuls erreichen. Zwei unabhängige Aufgaben werden dadurch voneinander getrennt.

Im Schwerpunktssystem lautet die Hamiltonfunktion für zwei Materiepunkte

$$(6.1)\qquad H=2\sqrt{\boldsymbol{p}^2+f}\,,\; f=f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}).$$

Solchen Hamiltonfunktionen sieht man nicht mehr an, ob sie zu einer Poincaréinvarianten Theorie gehören. Es kommt allein darauf an, daß sie aus einer Liealgebra der Poincarégruppe hervorgehen, was nach § 5 für (6.1) zutrifft, falls f gemäß

$$(6.2)\qquad f=f\,(p,r,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})$$

[20] Wigner, E.: Ann. of Math. *40* (1939) 149.

kugelsymmetrisch ist, wonach der Drehimpuls

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{6.3}$$

ein Integral der Bewegung ist. H ist klarerweise drehinvariant. Von dynamischen Symmetrien sprechen wir, wenn H weitere Symmetrieeigenschaften hat.

Einige weitergehende Symmetrien sind bekannt. Der Ansatz

$$f = m^2 - \frac{am}{r} \tag{6.4}$$

führt zum relativistischen Keplerproblem, das wie das nichtrelativistische O4-invariant ist[21]. Zum relativistischen sphärischen Oszillator führt der Ansatz

$$f = + m^2 + \boldsymbol{r}^2, \tag{6.5}$$

der wie im nichtrelativistischen Fall U3-invariant ist[22].

Zunächst betrachten wir das Keplerproblem und schreiben

$$H = \sqrt{m^2 + \Lambda}\,, \quad \Lambda = \boldsymbol{p}^2 - \frac{am}{r}. \tag{6.6}$$

In diesem Fall ist der Lenzvektor

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{p} + \frac{am}{2r}\,\boldsymbol{r} \tag{6.7}$$

ein Integral der Bewegung; denn

$$[\Lambda, A] = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \times [\Lambda, \boldsymbol{p}] + \frac{am}{2}\left[\Lambda, \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]$$

$$= -\frac{am}{r^3}\left((\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}^2\boldsymbol{p}\right) = 0.$$

Danach ist bei zyklischen ikl

$$[M_k, \Lambda] = 0, \; [M_i, M_k] = -M_l, \; [M_i, A_k] = -A_l,$$
$$[M_l, A_l] = 0.$$

[21] Born, M.: Vorlesungen über Atommechanik, Springer, Berlin, 1925; hier: § 38. – M. Born, P. Jordan: Elementare Quantenmechanik; Springer, Berlin, 1930; hier: § 35.

[22] Lipkin, H. J.: Liegroups for Pedestrians; North-Holland Publ. Cy., 1965.

Denn Λ ist ein Skalar, und $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$ sind Vektoren. Etwas mühsame Rechnungen ergeben ferner

$$(6.8) \qquad [A_i, A_k] = \Lambda M_{ik}.$$

Daraus folgt mit

$$(6.9) \qquad \boldsymbol{A} = \sqrt{-\Lambda}\,\boldsymbol{N}: \;\; [N_i, N_k] = -M_{ik}.$$

Setzt man

$$(6.10) \qquad \boldsymbol{M} = (N_{23}, N_{31}, N_{12}),\; \boldsymbol{N} = (N_{14}, N_{24}, N_{34}),$$

so lauten die Vertauschungsrelationen für $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{N}$ bei unterschiedlichen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$(6.11) \quad [N_{\alpha\beta}, N_{\beta\gamma}] = N_{\alpha\gamma},\; [N_{\alpha\beta}, N_{\gamma\delta}] = 0,\;\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in (1,2,3,4).$$

Das ist die Liealgebra der Gruppe $O4$,[23] und H ist wie Λ wegen

$$(6.12) \qquad [N_{\alpha\beta}, \Lambda] = 0$$

$O4$-invariant.

Zum Beweis von (6.8) gehen wir von der Darstellung

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{r} + \frac{am}{2r}\,\boldsymbol{r}$$

aus. Danach ist

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_r} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}\delta_{ir} + x_r p_i - 2x_i p_r,$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial x_k} = -\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{am}{2r}\right)\delta_{kr} - \frac{am}{2r^3}\,x_r x_k + p_r p_k.$$

Der Kommutator $[A_i, A_k]$ entsteht, wenn man von dem Produkt dieser beiden Ausdrücke das mit vertauschten ik abzieht und über r summiert. Das ergibt M_{ik} mit dem Faktor

$$\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{am}{2r}\right) + \frac{am}{2r} + 2\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{am}{2r}\right) - 2\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}^2 - \frac{am}{r} = \Lambda$$

im Einklang mit (6.8).

Die Hamiltonfunktion für das relativistische Keplerproblem lautet nunmehr im Schwerpunktssystem explizit

---

[23] l. c. 21, Born-Jordan.

$$H = 2\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2 - \frac{am}{r}}\,. \tag{6.13}$$

Sie kann nicht unbegrenzt richtig sein, weil der Radikand für

$$r < \frac{a}{m} \tag{6.14}$$

negativ werden kann. Diese Wechselwirkung muß also für kleine Radien aufhören. Wenn man dabei an das Coulombfeld denkt, was eine voreilige Deutung sein dürfte,[24] liegt der Grenzradius für Elektronen etwa beim klassischen Wert.

Sei das wenigstens zur Veranschaulichung akzeptiert, sei der Atomkern, um mit dem einfachsten Modell zu beginnen, eine homogene Ladungskugel mit dem Radius $R = 3\alpha/2m > \alpha/m$, so tritt

$$V = \begin{cases} -m + \dfrac{4m^3}{27a^2}\,r^2 & \text{für } r \leq R, \\ -\dfrac{a}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases} \tag{6.15}$$

an die Stelle des Coulombpotentials. Für $r \geq R$ stimmt H mit (6.13) überein und ist $O4$-symmetrisch. Innerhalb der Ladungskugel erhält man die $SU3$-invariante Hamiltonfunktion

$$H = 2\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \frac{4m^4}{27a^3}\,\boldsymbol{r}^2}\,. \tag{6.16}$$

Der Radius in (6.15) ist der kleinste, bei dem keine negativen Integranden vorliegen. Allerdings ist der numerische Wert $4{,}28.10^{-13}$ cm reichlich groß. Doch braucht uns das innerhalb einer rein klassisch physikalischen Rechnung nicht zu stören. Es ist erstaunlich genug, daß ein so einfaches, im wesentlichen auf M. Abraham[25] und H. A. Lorentz[26] zurückgehendes Modell bei kleinen Abständen zur U3-Invarianz und zu einem Higgsfeld führt, welches beim Grenzradius $R = 3\alpha/2m$ aufhört und dabei mit der Poincaréinvarianz verträglich ist.

---

[24] Das zugehörige Eichfeld hat eine andere Struktur.

[25] Abraham, M.: Theorie der Elektrizität, Bd. II; Elektromagnetische Theorie der Strahlung; Teubner, Leipzig, 1905; hier: S. 193.

[26] Lorentz, H. A.: The theory of electrons; Teubner, Leipzig, 1909; hier: S. 46, § 179 (Schluß), Note 87.

Der Nachweis der U3-Invarianz stützt sich auf die einzeiligen Matrizen

$$e_1^\dagger = (1,0,0),\ e_2^\dagger = (0,1,0),\ e_3^\dagger = (0,0,1)$$

und die hermetisch konjugierten einspaltigen Matrizen e_1, e_2, e_3. Danach sind die dyadischen Produkte

$$e_{ik} = e_i e_k^\dagger$$

die infinitesimalen Transformationen einer dreidimensionalen Darstellung der Gruppe U3. Sie liefert die Liealgebra

$$(6.17) \qquad [e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}\,\delta_{jk} - e_{kj}\delta_{il}.$$

In kanonischer Darstellung erhält man dafür

$$(6.18) \qquad e_{ik} = x_i p_k.$$

Denn die zugehörigen Poissonklammern sind mit (6.17) identisch. Hiernach ist

$$(6.19) \qquad H = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}$$

eine U3-invariante Hamiltonfunktion.

Mit der kanonischen Transformation

$$(6.20) \qquad \boldsymbol{p} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{a} + i a \boldsymbol{p}\right),\ \boldsymbol{r} \to -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{a} - i a \boldsymbol{p}\right)$$

erhält man

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} \to -\frac{i a^2}{2} \left(\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{a^4} \boldsymbol{r}^2\right),$$

so daß der sphärische Oszillator wie oben behauptet U3-invariant ist. Für die infinitesimalen Transformationen erhält man aus $x_i p_k \pm x_k p_i$ mittels der kanonischen Transformation (6.20)

$$(6.21) \qquad M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i,\ N_{ik} = \frac{1}{a^2} (x_i x_k + a^4 p_i p_k).$$

Wie groß der Unterschied beider Symmetrien ist, zeigt sich darin, daß man bei gemeinsamem $\boldsymbol{M}$ im Coulombfall den Vektor N_i und im U3-Fall den symmetrischen Tensor N_{ik} hinzufügen muß.

Die vom Coulombfeld herrührende O4-Symmetrie ist in der relativistischen Mechanik schon bei kleinen, aber noch endlichen Abständen unhaltbar. Ein denkbar einfaches Modell liefert bei kleinen Abständen U3-Symmetrie, ein Higgsfeld und dessen Grenzen. Wie gering man auch die Bedeutung des Modells einschätzen wird, es zeigt mindestens qualitativ, wie die U3-Symmetrie ins Spiel kommen kann. Noch weniger wird der abrupte Übergang von der einen zur andern Symmetrie realistisch sein. Man darf auch nicht schließen, die Symmetriebrechung hätte eine grundsätzliche Bedeutung. Denn jedes V liefert eine Gruppe, wie bereits gezeigt ist. Vielleicht gibt es aber nur wenige Hamiltonfunktionen, die zu endlichdimensionalen Gruppen führen.

Damit ist gezeigt, daß es in der Punktmechanik dynamische Symmetrien gibt, und daß sie die Wechselwirkung bestimmen. Die leicht zu beherrschenden Gruppen liefern aber Wechselwirkungen, die nur in Teilbereichen gelten können. Dennoch kann die Existenz der von Heisenberg erwarteten dynamischen Symmetrien nicht mehr bezweifelt werden.

Doch gibt es seit Weyl[27] einen andern Zugang zu Wechselwirkungen jenseits der Grenzen der Punktmechanik, nämlich den der Einführung von Feldern mittels der Eichidee. Darauf gehen wir hier nicht ein, bemerken aber, daß man in diesem Fall von der Symmetrie wechselwirkungsfreier Gleichungen auszugehen pflegt. Damit sind zunächst Wechselwirkungen vom oben betrachteten Typ ausgeschlossen. Ob das grundsätzlich so sein muß oder nur historisch bedingt ist, mag eine offene Frage sein. Jedenfalls stoßen wir damit an die Gültigkeitsgrenzen der reinen Punktmechanik. Darum überlassen wir weitergehende Fragen quantenphysikalischen Untersuchungen.

Bei dem Versuch, dynamische Symmetrien in den Griff zu kriegen, sind wir auf neue Aspekte der klassischen Mechanik gestoßen.

(1) Die kanonischen Gleichungen ergeben sich mit dem Zeitpostulat ohne Umwege aus den Basisgleichungen von Newton. –

(2) Die zur affinen Raum-Zeit führende Abelsche Gruppe ist eine Folge der kanonischen Gleichungen, sofern H nicht explizit von der Zeit abhängt. –

[27] l. c. 17, hier: S. 88. Man beachte die Abkehr von l. c. 12, §§ 40–41.

(3) Die Poincaréinvarianz ergibt sich aus dem Schwerpunktssatz in Verbindung mit der abgeänderten Definition II von Newton $\boldsymbol{P} = H\boldsymbol{v}$. –

(4) Auch bei Wechselwirkungen zwischen Teilchen gibt es relativistische Gleichungen, die bei großen Teilchenabständen in solche freier Teilchen übergehen.