BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1982

MÜNCHEN 1983

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Gelfandringe und koabgeschlossene Untermoduln

von Helmut Zöschinger

Einleitung. Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Beobachtung, daß verschiedene Klassen von Moduln oder Ringen unter dem gemeinsamen Gesichtspunkt betrachtet werden können, daß sich jeder Untermodul von M durch einen einfacheren „approximieren" läßt. Damit meinen wir, daß zu jedem $U \subset M$ ein $U_1 \subset U$ existiert, so daß U_1 von einfacherer Struktur (oder ausgezeichneter Lage in M) ist und U/U_1 klein in M/U_1. Für die letzte Bedingung sagen wir, daß *U durch U_1 in M gestützt wird.*

So nennt Hinohara in [7] einen kommutativen Ring R *schwach-noethersch*, wenn sein Maximalspektrum Ω in der Zariski-Topologie noethersch ist, und er zeigt dort, daß das genau dann der Fall ist, wenn jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R durch ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}_1$ gestützt wird. Ein weiteres Beispiel ist die Klasse der *kommutativen semiperfekten* Ringe (d.h. endlich vieler Produkte von lokalen Ringen): Ein kommutativer Ring R gehört ihr genau dann an, wenn jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R durch einen direkten Summanden $\mathfrak{a}_1$ gestützt wird. Definiert man schließlich zu einem Punkt p eines vollständig regulären Raumes X im *Ring der stetigen reellen Funktionen* die Ideale $M_p = \{f \in C(X) \mid f(p) = 0\}$ und $O_p = \{f \in C(X) \mid f$ verschwindet in einer Umgebung von $p\}$, so sieht man sofort, daß M_p durch O_p in $C(X)$ gestützt wird, daß O_p das kleinste Ideal mit dieser Eigenschaft ist und daß überdies O_p rein in $C(X)$ ist.

Tatsächlich gilt das letzte Beispiel viel allgemeiner: Wir nennen einen kommutativen Ring R nach Carral [5] einen *Gelfandring*, wenn für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ die kan. Abbildung $R \to R_{\mathfrak{m}}$ surjektiv ist und zeigen in (1.4), daß das genau dann der Fall ist, wenn jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R durch ein reines Ideal $\mathfrak{a}_1$ gestützt wird. Das ist weiter äquivalent damit, daß jedes Primideal von R in nur einem maximalen Ideal liegt, und diese Klasse von Ringen wurde von DeMarco und Orsatti in [6] ausführlich untersucht.

Ein Ring R (in der ganzen Arbeit sei jetzt R kommutativ) ist daher genau dann semiperfekt, wenn er ein Gelfandring ist und wenn jedes reine Ideal von R bereits direkter Summand ist. Daraus folgt, daß über beliebigem R der Funktor $K(M) = \{x \in M \mid R/\mathrm{Ann}_R(x)$ ist semiperfekt$\}$ ein linksexakter Sockel ist, für den wir in (2.3) eine „Primärzerlegung“ $K(M) = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} K_{\mathfrak{m}}(M)$ angeben, in der die $K_{\mathfrak{m}}(M)$ auf natürliche Weise Moduln über den lokalen Ringen $R_{\mathfrak{m}}$ sind. Es ist das eine Verallgemeinerung der Matlis'schen Zerlegung von $T(M)$ über h-lokalen Integritätsringen (siehe [9]) auf beliebiges R. Sie läßt sich insbesondere auf jeden komplementierten Modul M über einem noetherschen Ring R anwenden, denn für ihn zeigen wir $K(M) = M$. Mit Hilfe der Ergebnisse von [14] erhalten wir so in (2.5) eine vollständige Beschreibung der reduzierten komplementierten Moduln über noetherschen Ringen.

In einem beliebigen Modul M braucht zu einem Untermodul U von M die Menge $\{Y \subset U \mid U/Y$ ist klein in $M/Y\}$ kein minimales Element zu haben. Falls sie aber doch eines besitzt, sagen wir U_1, so ist U_1 *koabgeschlossen* in M, d. h. aus U_1/X klein in M/X folgt $U_1/X = 0$. (In der dualen Situation hat bekanntlich die Menge $\{Y \subset M \mid U$ ist groß in $Y\}$ nach dem Zorn'schen Lemma stets ein maximales Element, und dieses ist im Sinne von Goldie abgeschlossen in M.) Während in jedem injektiven Modul die abgeschlossenen Untermoduln schon direkte Summanden sind, ist die entsprechende Aussage für projektive Moduln nicht richtig: Wir zeigen in (3.4), daß über noetherschen Ringen in jedem projektiven Modul die koabgeschlossenen Untermoduln gerade mit den reinen Untermoduln zusammenfallen. Als merkwürdige Folgerung erhalten wir, daß über einem noetherschen Ring R ein R-Modul M genau dann flach ist, wenn er keine wesentlichen Überdeckungen hat, d. h. wenn jeder wesentliche Epimorphismus $B \to M$ schon ein Isomorphismus ist.

In einem nicht notwendig projektiven Modul M scheint es angemessener zu fragen, wann jeder Untermodul U von M durch einen koabgeschlossenen (und nicht wie in (1.4) durch einen reinen) Untermodul U_1 gestützt wird. Über einem Dedekindring R geben wir darauf in (4.2) eine vollständige Antwort. Falls R unendlich viele maximale Ideale hat, können wir in (4.5) präziser für einen einzelnen Untermodul U von M, wenn nur M/U endlich erzeugt ist, beweisen: Genau dann wird U durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 gestützt, wenn dim $(\mathrm{Ann}_{M/U}(\mathfrak{m})) \leq \dim(T(M)/\mathfrak{m} \cdot T(M))$ ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$. Das liefert zum Schluß mehrere Kriterien für die Existenz von Komplementen, die in [13] nur im lokalen Fall gezeigt werden konnten.

0. Bezeichnungen und Definitionen. Stets ist R ein kommutativer Ring und Ω die Menge aller maximalen Ideale von R. Bei lokalen bzw. semilokalen Ringen wird keine Kettenbedingung angenommen. Ist M ein R-Modul, so heißt ein Untermodul U *rein* in M, wenn für alle R-Moduln A die induzierte Abb. $A \otimes_R U \to A \otimes_R M$ injektiv ist. Bei flachem M ist das äquivalent damit, daß auch M/U flach ist.

Ein Untermodul U von M heißt *klein* in M, wenn aus $X + U = M$ stets folgt $X = M$. Die Summe aller kleinen Untermoduln ist das Jacobson-Radikal $\mathrm{Ra}(M)$, und bekanntlich gilt $\mathrm{Ra}(M) = \bigcap \{\mathfrak{m} M \mid \mathfrak{m} \in \Omega\} = \bigcap \{X \mid X$ maximaler Untermodul von $M\}$. Ein Modul M heißt *radikalfrei* bzw. *radikalvoll*, wenn $\mathrm{Ra}(M) = 0$ bzw. $\mathrm{Ra}(M) = M$ ist. Den größten radikalvollen Untermodul von M bezeichnen wir mit $P(M)$, und falls $P(M) = 0$ ist, heißt M *reduziert*. M heißt *koatomar*, wenn jeder echte Untermodul von M in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Über noetherschen Ringen ist jeder koatomare Modul auch reduziert.

Ein Epimorphismus $\beta : B \to M$ heißt *wesentlich*, wenn $Ke\ \beta$ klein in B ist. Falls also $U_1 \subset U \subset M$ ist, wird U genau dann durch U_1 in M gestützt, wenn $M/U_1 \to M/U$ ein wesentlicher Epimorphismus ist. Dual heißt ein Monomorphismus $\alpha : M \to A$ wesentlich, wenn $Bi\ \alpha$ groß in A ist. Mit $E(M)$ bezeichnen wir die injektive Hülle von M.

M heißt *unzerlegbar*, wenn $M \neq 0$ ist und aus $X + Y = M$ stets folgt $X = M$ oder $Y = M$. Ist M beliebig und $V + U = M$, so heißt V *Komplement* (bzw. schwaches Komplement) von U in M, wenn $V \cap U$ klein in V (bzw. $V \cap U$ klein in M) ist.

Im ersten Fall ist V automatisch koabgeschlossen in M, und gibt es zu jeder Zerlegung $X + U = M$ ein Komplement V von U in M, mit $V \subset X$, so sagen wir, U habe *genügend viele Komplemente* in M. Hat schließlich jeder Untermodul von M ein Komplement (ein schwaches K., genügend viele K.) in M, so heißt M *komplementiert (schwach-komplementiert, supplementiert)*. R selbst ist genau dann komplementiert, wenn es Produkt von endlich vielen lokalen Ringen, d. h. semiperfekt ist. In diesem Fall ist sogar jeder endlich erzeugte R-Modul supplementiert.

1. Gelfandringe und der Funktor K(M). Die Frage, wann ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R durch ein reines Ideal gestützt wird, hängt eng mit dem Studium des Ideals

$$\mathfrak{a}' = \{ x \in R \mid x = ax \text{ für ein } a \in \mathfrak{a} \}$$

zusammen. Bei speziellen Ringen ist die Bildung von $\mathfrak{a}'$ wohlbekannt:

1) Ist $R = C(X)$ der Ring der stetigen reellen Funktionen auf einem vollständig regulären Hausdorff-Raum X, ist $p \in X$ und $\mathfrak{a}$ das Ideal der in p verschwindenden Funktionen, so ist $\mathfrak{a}'$ das Ideal der Funktionen, die in einer ganzen Umgebung von p verschwinden.

2) Ist R noethersch, so ist nach dem Krull'schen Durchschnittssatz $\mathfrak{a}' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i$.

In einem beliebigen Ring R ist genau dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, wenn $\mathfrak{a}$ rein in R ist. Wird aber $\mathfrak{a}$ nur durch ein reines Ideal $\mathfrak{a}_1$ gestützt, so folgt $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}'$ (siehe Punkt (b) des nachfolgenden Lemmas), d. h. $\mathfrak{a}_1$ ist eindeutig durch $\mathfrak{a}$ bestimmt.

Lemma 1.1. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Ideale von* R, *so gilt:*

(a) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})' = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$, $(\sqrt{\mathfrak{a}})' = \mathfrak{a}'$.

(b) *Ist* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ *klein in* $R/\mathfrak{b}$, *so folgt* $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}'$.

(c) *Wird* $\mathfrak{a}$ *durch ein reines Ideal gestützt, so folgt* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$.

Beweis. (a) ist leicht nachzurechnen, und bei (b) ist nur $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{b}'$ zu zeigen: Sei $x \in \mathfrak{a}'$, d. h. $x = a x$ für ein $a \in \mathfrak{a}$. Weil $\bar{\mathfrak{a}}$ im Radikal des Ringes $\bar{R} = R/\mathfrak{b}$ liegt, ist $1 - \bar{a}$ invertierbar, d. h. $1 = \bar{r}(1 - \bar{a})$ für ein $r \in R$. Mit $b = 1 - r(1 - a) \in \mathfrak{b}$ folgt $b x = x$, also $x \in \mathfrak{b}'$ wie gewünscht. (c) Stets ist $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b})' \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}'$, denn $x = (y + b) x$ mit $y \in \mathfrak{a}'$, $b \in \mathfrak{b}$ impliziert $y = a y$ für ein $a \in \mathfrak{a}$, also $b(1 - a)x = (1 - a)(1 - y)x = (1 - a)x$, d. h. $(1 - a)x \in \mathfrak{b}'$ und $x = a x + (1 - a) x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}'$. Wird nun $\mathfrak{a}$ durch ein reines Ideal $\mathfrak{a}_1$ gestützt, so wird auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}$ gestützt, und nach (b) folgt $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b})' \subset \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$, während die Inklusion $\supset$ trivial ist. (Auf die Voraussetzung an $\mathfrak{a}$ kann man nicht verzichten, wie jeder nichtlokale Integritätsring zeigt.)

Ist zunächst nur $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ klein in $R/\mathfrak{a}'$, so erhält man mit (b) auch $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}'$, d.h. $\mathfrak{a}'$ ist automatisch rein in R. Es gilt daher die sehr nützliche

Folgerung. *Genau dann wird $\mathfrak{a}$ durch ein reines Ideal in R gestützt, wenn $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ klein in $R/\mathfrak{a}'$ ist.*

Lemma 1.2.

(a) *Ist $\mathfrak{c}$ ein Primärideal und $\mathfrak{c} + \mathfrak{a} \neq R$, so folgt $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{c}$.*

(b) *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{p}$ minimal über $\mathfrak{a}'$, so folgt $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} \neq R$.*

Beweis. (a) Gäbe es ein $x \in \mathfrak{a}'$ mit $x \notin \mathfrak{c}$, so folgte $x = a x$ für ein $a \in \mathfrak{a}$, $(1 - a)^n \in \mathfrak{c}$ für ein $n \geq 1$, $1 - r a \in \mathfrak{c}$ und damit $\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = R$ entgegen der Annahme. (b) Definiert man die zwei multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen $S_1 = 1 + \mathfrak{a}$ und $S_2 = R \setminus \mathfrak{p}$, so gilt für alle $x \in S_1$, daß $\mathrm{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{a}'$, also $\mathrm{Ann}_R(x) \cap S_2 = \emptyset$ ist. Damit enthält die multiplikativ abg. Teilmenge $T = S_1 S_2$ nicht das Nullelement, so daß es ein Primideal $\mathfrak{p}_0$ gibt mit $\mathfrak{p}_0 \cap T = \emptyset$. Aus $\mathfrak{p}_0 \cap S_1 = \emptyset$ folgt $\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{a} \neq R$ und $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}_0$, aus $\mathfrak{p}_0 \cap S_2 = \emptyset$ auch noch $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$ wie gewünscht.

Punkt (a) liefert, falls das Nullideal von R eine Primärzerlegung $0 = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_n$ hat, eine neue Darstellung von $\mathfrak{a}'$: Bildet man zur Menge $A = \{1 \leq i \leq n \mid \mathfrak{c}_i + \mathfrak{a} \neq R\}$ die Ideale

$U = \bigcap_{i \in A} \mathfrak{c}_i$ und $V = \bigcap_{i \notin A} \mathfrak{c}_i$, so gilt wegen (a) die Inklusion $\mathfrak{a}' \subset U$. Andererseits folgt aus $V + \mathfrak{a} = R$, d.h. $1 - a_0 \in V$ für ein $a_0 \in \mathfrak{a}$, daß $(1 - a_0)\, x \in V \cap U = 0$ ist für alle $x \in U$, also auch $U \subset \mathfrak{a}'$.

Folgerung. *Besitzt das Nullideal von R eine Primärzerlegung $0 = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_n$, so folgt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R, daß $\mathfrak{a}' = \bigcap \{ \mathfrak{c}_i \mid \mathfrak{c}_i + \mathfrak{a} \neq R \}$ ist.*

Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ sind die Äquivalenzen (ii, iii, iv) des folgenden Satzes wohlbekannt (siehe [1] Proposition 1.6.1 für den Fall $\mathrm{Ra}(R) = 0$), denn in Punkt (iii) steht dann die kan. Abbildung $R \to R_{\mathfrak{m}}$. Sei ab jetzt $\mathrm{Spec}(R)$ mit der Zariski-Topologie versehen.

Satz 1.3. *Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R sind äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{a}$ wird durch ein reines Ideal gestützt.*

(ii) *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} \neq R$, so ist $(\mathfrak{p} + \mathfrak{a})/\mathfrak{p}$ klein in $R/\mathfrak{p}$.*

(iii) *Die kan. Abbildung $R \to R_S$, mit $S = 1 + \mathfrak{a}$, ist surjektiv.*

(iv) *Ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(R)$ mit $V(\mathfrak{a}) \cap Y = \emptyset$, so lassen sich $V(\mathfrak{a})$ und Y durch offene Umgebungen trennen.*

Beweis. (i $\leftrightarrow$ ii) Hat man (i) und $\mathfrak{p}$ wie angegeben, so ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ klein in $R/\mathfrak{a}'$ und nach (1.2, a) $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$, also erst recht $(\mathfrak{p} + \mathfrak{a})/\mathfrak{p}$ klein in $R/\mathfrak{p}$. Ist umgekehrt (ii) erfüllt und $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{m}$, so wähle man ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, das minimal über $\mathfrak{a}'$ ist, und nach (1.2, b) folgt $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} \neq R$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$: Wir haben gezeigt, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ klein in $R/\mathfrak{a}'$ ist.

(i $\leftrightarrow$ iii) Für die kan. Abbildung $\varphi: R \to R_S$ gilt offenbar $Ke\ \varphi = \mathfrak{a}'$. Genau dann ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ klein in $R/\mathfrak{a}'$, wenn im Ring $\bar{R} = R/\mathfrak{a}'$ alle $\bar{s}$ invertierbar sind $(s \in S)$, d.h. $1 - r\, s \in Ke\, \varphi$, $\frac{1}{s} = \frac{r}{1}$ im Ring R_S ist, also φ surjektiv.

(i $\to$ iv) Mit $Y = V(\mathfrak{b})$ ist $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b} = R$, $(1 - a)\,(1 - b) = 0$ mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Damit ist $D\,(1 - a)$ eine offene Umgebung von $V(\mathfrak{a})$, $D\,(1 - b)$

eine von $V(\mathfrak{b})$, und natürlich $D(1-a) \cap D(1-b) = \emptyset$. (iv $\to$ ii) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so daß $(\mathfrak{p}+\mathfrak{a})/\mathfrak{p}$ nicht klein in $R/\mathfrak{p}$ ist. Zu $\mathfrak{m} \in \Omega$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$, also $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{m}) = \emptyset$, gibt es nach Voraussetzung Ideale $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ mit $V(\mathfrak{a}) \subset D(\mathfrak{a}_0)$, $V(\mathfrak{m}) \subset D(\mathfrak{b}_0)$ und $D(\mathfrak{a}_0) \cap D(\mathfrak{b}_0) = \emptyset$. Es ist also $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a} = R$, $\mathfrak{b}_0 \not\subset \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0$ ein Nilideal. Aus $\mathfrak{b}_0 \not\subset \mathfrak{p}$ folgt daher $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} = R$ wie verlangt.

Folgerung. *Werden alle* $\mathfrak{m} \in \Omega$, *mit* $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$, *durch ein reines Ideal gestützt, so wird auch* $\mathfrak{a}$ *durch ein reines Ideal gestützt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ für Punkt (ii) ein Primideal, so daß $(\mathfrak{p}+\mathfrak{a})/\mathfrak{p}$ nicht klein in $R/\mathfrak{p}$ ist. Ein $\mathfrak{m} \in \Omega$, mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$, wird nach Voraussetzung durch ein reines Ideal gestützt, so daß $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ klein in $R/\mathfrak{p}$ ist. Aus $\mathfrak{m} + \mathfrak{a} = R$ folgt daher $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} = R$.

Läßt man $\mathfrak{a}$ in (1.3) alle (maximalen) Ideale von R durchlaufen, so erhält man unmittelbar die folgenden Charakterisierungen von Gelfandringen, unter denen die Äquivalenz (ii $\leftrightarrow$ iv) bereits von DeMarco und Orsatti in ([6] Theorem 1.2) bewiesen wurde.

Satz 1.4. *Für einen Ring R sind äquivalent:*

(i) *Jedes (maximale) Ideal wird durch ein reines Ideal gestützt.*

(ii) *Jedes Primideal liegt in nur einem maximalen Ideal.*

(iii) *R ist ein Gelfandring.*

(iv) *Spec(R) ist ein* T_4*-Raum.*

Bemerkung. Weil in einem kommutativen Ring jede Summe von reinen Idealen wieder rein ist, kann man (i) ersetzen durch (i'): Jedes zyklische Ideal von R wird durch ein reines Ideal gestützt. Eine elementare Rechnung zeigt, daß das weiter äquivalent ist mit (i''): Zu jedem $a \in R$ gibt es Elemente $b, c \in R$ mit $(1-c\,a)\,(1-b\,(1-a)) = 0$. Andererseits gilt nach Monk ([10] Theorem 1), daß R genau dann die Austauscheigenschaft hat, wenn zu jedem $\alpha \in R$ Ringelemente γ, σ existieren mit $\gamma = \alpha\gamma^2$ und $(1-\gamma\,\alpha)\,(1-\sigma\,(1-\alpha)) = 0$. Ergebnis: *Jeder Austauschring ist ein Gelfandring.*

Ein Ring R heißt *reinzerfallend*, wenn jedes reine Ideal bereits direkter Summand ist. Bekanntlich ist jeder schwachnoethersche Ring reinzerfallend (siehe auch unsere Vorbemerkungen zu 3.5), insbesondere jeder semilokale Ring. Die Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ iii) des Satzes liefert also sofort die

Folgerung. *Ein Ring R ist genau dann semiperfekt, wenn R ein Gelfandring ist und reinzerfallend.*

Ist z.B. R ein h-lokaler Integritätsring im Sinne von Matlis, so gilt für jedes $0 \neq r \in R$, daß der Ring $\bar{R} = R/(r)$ sowohl Punkt (ii) in (1.4) erfüllt als auch semilokal ist, also nach der Folgerung semiperfekt ist. Damit haben wir (was auch aus [9] Theorem 22 folgt): *Ein Integritätsring ist genau dann h-lokal, wenn er eingeschränkt semiperfekt ist.*

Als weitere Anwendung zeigen wir, daß in jedem R-Modul M die Menge

$$K(M) = \{ x \in M \mid R/\mathrm{Ann}_R(x) \text{ ist semiperfekt} \}$$

einen Untermodul bildet: Sind $x, y \in K(M)$ und $r, s \in R$, so ist der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(x) \cap \mathrm{Ann}_R(y)$ ein semilokaler Gelfandring, also nach der Folgerung wieder semiperfekt, so daß es auch der Faktorring $R/\mathrm{Ann}_R(rx + sy)$ ist, d.h. $rx + sy \in K(M)$. Damit ist K ein „Sockel" in der Kategorie der R-Moduln, d.h. $f(K(M)) \subset K(N)$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $K(U) = U \cap K(M)$ für alle $U \subset M$. Ihn wollen wir im Rest dieses Paragraphen und in Abschnitt 2 näher untersuchen.

Beispiel 1. *Ist R ein noetherscher Hilbertring, so ist $K(M)$ die Summe aller artinschen Untermoduln von M.*

Beweis. Über beliebigem R sei $L(M)$ diese Summe, und dann ist klar $L(M) \subset K(M)$. Ist umgekehrt R ein Hilbertring (d.h. $R/\sqrt{\mathfrak{a}}$ radikalfrei für alle Ideale $\mathfrak{a}$) und $x \in K(M)$, so ist im Ring $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ jedes Primideal schon maximales Ideal, also mit der Zusatzbedingung „noethersch" $x \in L(M)$.

Beispiel 2. *Ist R ein nichtlokaler, h-lokaler Integritätsring, so ist $K(M)$ der Torsionsuntermodul von M.*

Beweis. Über jedem nichtlokalen Integritätsring R gilt $K(M) \subset T(M)$, und ist R zusätzlich h-lokal, so folgt für jedes

$x \in T(M)$, daß $\mathrm{Ann}_R(x) \neq 0$, also $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ semiperfekt ist, d.h. $x \in K(M)$.

Im noetherschen Fall kann man mehr über die Lage von $K(M)$ in M sagen:

Lemma 1.5. *Ist R noethersch, so gilt für jeden R-Modul M:*

(a) *Es ist $K(M/K(M)) = 0$, und $K(M)$ ist abgeschlossen in M.*

(b) *Genau dann ist $K(M) = M$, wenn jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ in nur einem maximalen Ideal liegt.*

(c) *Die Klasse der R-Moduln A, mit $K(A) = A$, ist gegenüber wesentlichen Erweiterungen und gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen.*

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus (c), und ebenso (c) aus (b), denn für jeden Untermodul A von B gilt bekanntlich $\mathrm{Ass}(B) \subset \mathrm{Ass}(A) \cup \mathrm{Ass}(B/A)$, ja sogar $\mathrm{Ass}(B) = \mathrm{Ass}(A)$ falls A groß in B ist.

Bleibt also (b) zu zeigen. Bei $K(M) = M$ gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, daß der Integritätsring $R/\mathfrak{p}$ semiperfekt, also lokal ist. In der umgekehrten Richtung ist zunächst $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ ein Gelfandring für alle $x \in M$, denn zu $\mathrm{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ wähle man ein $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, das minimal über $\mathrm{Ann}_R(x)$ ist, und dann folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Weil der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ zusätzlich reinzerfallend ist, ist er schon semiperfekt, d.h. $x \in K(M)$ wie verlangt.

Beispiele zeigen, daß ohne „noethersch" keiner der drei Punkte gilt, aber für endlich erzeugte Moduln erhält man im Fall (b) eine weitere Beschreibung:

Satz 1.6. *Für einen endlich erzeugten R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *Es ist $K(M) = M$.*

(ii) *M ist komplementiert.*

(iii) *Der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ ist semiperfekt.*

Beweis. (ii $\to$ i) In jedem Modul M gilt: Haben alle maximalen Untermoduln von M ein Komplement in M, so muß

$M/K(M)$ radikalvoll sein. Andernfalls hätte man einen Zwischenmodul $K(M) \subset U \subset M$ mit M/U einfach, dazu ein Komplement V von U in M, und dann wäre V zyklisch und unzerlegbar, also $V \subset K(M)$. Das ist aber unmöglich. – Bei endlich erzeugtem M folgt also $K(M) = M$. (i → iii) In $M = \sum_{i=1}^{n} R x_i$ sind alle Ringe $R/\mathrm{Ann}_R(x_i)$ nach Voraussetzung semiperfekt, also auch der Ring $R/\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}_R(x_i) = R/\mathrm{Ann}_R(M)$, denn er ist ein semilokaler Gelfandring. (iii → ii) klar.

Folgerung. *Ist M endlich erzeugt und komplementiert, so ist auch jeder endlich erzeugte Untermodul komplementiert. Insbesondere ist M supplementiert.*

2. $\mathfrak{a}$ - lokale Moduln. Die wohlbekannte Primärzerlegung von Torsionsmoduln über Dedekindringen – d.h. $T(M) = \bigoplus_{\mathfrak{m}} T_{\mathfrak{m}}(M)$ mit $\mathfrak{m} \in \Omega$ – wurde von Matlis (siehe [9] Theorem 22) auf Moduln über h-lokalen Integritätsringen verallgemeinert. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß sie sogar über beliebigen Ringen gilt, wenn man $T(M)$ durch unser $K(M)$ ersetzt und $T_{\mathfrak{m}}(M)$ durch den größten $\mathfrak{m}$-lokalen Anteil (siehe 2.3).

Dazu heiße, zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ von R, ein R-Modul M *$\mathfrak{a}$-lokal*, wenn aus $\mathrm{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{m}$ (mit $x \in M$, $\mathfrak{m} \in \Omega$) stets folgt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Das ist äquivalent damit, daß $M_{\mathfrak{m}} = 0$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ mit $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$, und aus dieser Beschreibung folgt, daß die Klasse der $\mathfrak{a}$-lokalen R-Moduln gegenüber Untermoduln, Faktormoduln, Gruppenerweiterungen und direkten Summen abgeschlossen ist.

Lemma 2.1.

(a) *Ein endlich erzeugter Modul M ist genau dann $\mathfrak{a}$-lokal, wenn $\mathfrak{a} M$ klein in M ist.*

(b) *Ein artinscher Modul M ist genau dann $\mathfrak{a}$-lokal, wenn er $\mathfrak{a}$-primär ist, d. h. wenn $M = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^i)$ ist.*

Beweis. (a) Für jeden $\mathfrak{a}$-lokalen Modul M gilt $\mathfrak{a}\, M \subset \mathrm{Ra}(M)$, denn aus $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{m} + \mathrm{Ann}_R(x) = R$ für alle $x \in M$, so daß $\mathfrak{m}\, M = M$ ist. Falls zusätzlich M endlich erzeugt ist, muß also mit $\mathrm{Ra}(M)$ auch $\mathfrak{a}\, M$ klein in M sein. Bei der Umkehrung folgt aus $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$ zuerst $\mathfrak{m}\, M + \mathfrak{a}\, M = M$, also $\mathfrak{m}\, M = M$, so daß wegen endlich erzeugt auch alle Untermoduln von M $\mathfrak{m}$-teilbar sind, d.h. $\mathrm{Ann}_R(x) \not\subset \mathfrak{m}$ für alle $x \in M$. (b) Bei beliebigem M ist der Untermodul $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^i)$ $\mathfrak{a}$-lokal, denn $\mathfrak{a}^e \subset \mathrm{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{m}$ impliziert $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Ist aber M artinsch und $\mathfrak{a}$-lokal, so gilt für jedes $x \in M$, daß der Ring $\bar{R} = R/\mathrm{Ann}_R(x)$ endliche Länge hat und $\bar{\mathfrak{a}}$ in seinem Radikal liegt. Aus $\bar{\mathfrak{a}}^e = 0$ folgt $x \in \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^e)$ wie gewünscht.

Lemma 2.2. *Sei M $\mathfrak{a}$-lokal und werde $\mathfrak{a}$ durch ein reines Ideal in R gestützt. Dann ist jede wesentliche Überdeckung und jede wesentliche Erweiterung von M wieder $\mathfrak{a}$-lokal.*

Beweis. Ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, so sagen wir ein R-Modul M sei S-teilbar (bzw. S-torsionsfrei), wenn für jedes $s \in S$ die Multiplikation mit $s : M \to M$ surjektiv (bzw. injektiv) ist. Speziell gilt für $S = 1 + \mathfrak{a}$, daß jeder $\mathfrak{a}$-lokale Modul M sowohl S-teilbar als auch S-torsionsfrei ist, denn für alle $x \in M$ und $s \in S$ ist $(s) + \mathrm{Ann}_R(x) = R$. Ist nun N eine wesentliche Überdeckung (bzw. Erweiterung) von M, so ist auch N S-teilbar (bzw. S-torsionsfrei), und es folgt $\mathfrak{a}' \subset \mathrm{Ann}_R(y)$ für alle $y \in N$. Weil nach Voraussetzung $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ klein in $R/\mathfrak{a}'$ ist, heißt das $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ falls $\mathrm{Ann}_R(y) \subset \mathfrak{m}$, d.h. N ist wie behauptet $\mathfrak{a}$-lokal.

Jeder Modul M besitzt einen *größten $\mathfrak{a}$-lokalen Untermodul*, den wir mit $K_{\mathfrak{a}}(M)$ bezeichnen. Zum Beispiel liefert der Beweis von (2.1), daß in einem artinschen Modul $K_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^i)$ ist, und daß in einem radikalfreien Modul $K_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a})$ ist. Bei beliebigem M ist $K_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M \mid x = 0$ oder das einzige maximale Ideal über $\mathrm{Ann}_R(x)$ ist $\mathfrak{m}\}$. Dieser Untermodul wurde von Brandal in ([3] p. 18) eingeführt und dort mit $M(\mathfrak{m})$ bezeichnet.

Satz 2.3. *Für jeden Modul M gilt $K(M) = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} K_{\mathfrak{m}}(M)$.*

Beweis. Die Direktheit zeigt man wie im klassischen Fall der Primärzerlegung: Ist $x_1 + \ldots + x_n = 0$ mit $x_i \in K_{\mathfrak{m}_i}(M)$, $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ für alle $i \neq j$, so folgt für jedes $1 \leq j \leq n$, daß

$$\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathrm{Ann}_R(x_i) \subset \mathrm{Ann}_R(x_j),$$

also $x_j = 0$ ist. Natürlich liegen alle $K_{\mathfrak{m}}(M)$ in $K(M)$, denn für $0 \neq x \in K_{\mathfrak{m}}(M)$ ist der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ sogar lokal. Ist umgekehrt $0 \neq x \in K(M)$, so zerlege man den semiperfekten Ring $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ in ein endliches Produkt von lokalen Ringen, also $Rx = \bigoplus_{i=1}^{n} Ry_i$, worin jedes $R/\mathrm{Ann}_R(y_i)$ lokal sei mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}_i/\mathrm{Ann}_R(y_i)$. Es folgt $y_i \in K_{\mathfrak{m}_i}(M)$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Durch diesen Zerlegungssatz läßt sich, wie wir jetzt zeigen wollen, das Studium von komplementierten Moduln über noetherschen Ringen ganz auf den lokalen Fall zurückführen. Dazu genügt es, daß R ein sog. H-Ring ist, d.h.

$$\mathrm{Hom}_R(E(R/\mathfrak{m}_1), E(R/\mathfrak{m}_2)) = 0$$

für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$. Nun ist $\mathrm{Hom}_R(M, E(R/\mathfrak{m}_2)) = 0$ äquivalent mit $M_{\mathfrak{m}_2} = 0$, also *R genau dann ein H-Ring, wenn alle $E(R/\mathfrak{m})$ $\mathfrak{m}$-lokal sind* ($\mathfrak{m} \in \Omega$). Bekanntlich ist jeder noethersche Ring ein H-Ring, ebenso jeder Gelfandring nach (2.2), und nach dem Kriterium von Camillo ([4] Proposition 3) auch jeder h-lokale Integritätsring.

Lemma 2.4. *Sei R ein H-Ring und $B \to C$ ein wesentlicher R-Epimorphismus. Dann ist für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ auch $B_{\mathfrak{m}} \to C_{\mathfrak{m}}$ ein wesentlicher $R_{\mathfrak{m}}$-Epimorphismus.*

Beweis. Präziser gilt für einen Untermodul U von M: Genau dann ist U klein in M, wenn $U_{\mathfrak{m}}$ klein in $M_{\mathfrak{m}}$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$. Das wurde in ([14] Lemma 4.1) über noetherschen Ringen gezeigt, und der dortige Beweis, den wir hier nicht reproduzieren wollen, benützt nur folgende Eigenschaft von R: Ist $X \subset Y \subset E(R/\mathfrak{m})$ und $(Y/X)_{\mathfrak{m}} = 0$, so folgt $Y/X = 0$. Das gilt aber offensichtlich auch über H-Ringen.

Ist unter den Voraussetzungen des Lemmas C zusätzlich $\mathfrak{a}$-lokal, so folgt auch $B_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ mit $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$, d.h. wir haben die

Folgerung. *Ist R ein H-Ring, so ist jede wesentliche Überdeckung eines $\mathfrak{a}$-lokalen R-Moduls wieder $\mathfrak{a}$-lokal.*

Satz 2.5. *Über einem H-Ring ist ein Modul M genau dann komplementiert, wenn $M = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} K_{\mathfrak{m}}(M)$ ist und wenn alle $K_{\mathfrak{m}}(M)$ komplementiert sind.*

Beweis. Ist M komplementiert, so ist wegen (2.3) nur noch $M = K(M)$ zu zeigen (denn dann sind natürlich auch die $K_{\mathfrak{m}}(M)$ als direkte Summanden komplementiert). Wäre $M \neq K(M)$, so gäbe es einen Zwischenmodul $K(M) \subset U \subsetneqq M$ und eine Einbettung $M/U \to E(R/\mathfrak{m})$ für ein $\mathfrak{m} \in \Omega$, dazu ein Komplement V von U in M, also einen wesentlichen Epimorphismus $V \to M/U$. Nach der letzten Folgerung wäre dann V $\mathfrak{m}$-lokal, $V \subset K_{\mathfrak{m}}(M) \subset U$, und das ist nicht möglich.

Hat man umgekehrt die angegebene Zerlegung, d.h. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit $M_i = K_{\mathfrak{m}_i}(M)$ komplementiert, so folgt wieder wegen (2.3) für alle Untermoduln X von M:

$$(*)\quad X = \sum_{i \in I} X \cap M_i.$$

Damit ist M komplementiert: Zu $U \subset M$ wähle man, für jedes $i \in I$, ein Komplement V_i von $U \cap M_i$ in M_i, und dann zeigt (*), daß $V = \sum_{i \in I} V_i$ ein Komplement von U in M ist.

Weil also über einem H-Ring für jeden komplementierten Modul $M = K(M)$ gilt, erhält man unmittelbar:

Folgerung 1. *Ist R ein H-Ring und M ein beliebiger R-Modul, so ist $K(M)$ die Summe aller komplementierten Untermoduln von M.*

Folgerung 2. *Ist R ein H-Ring und M komplementiert, so gilt:* (a) *Jeder endlich erzeugte Untermodul von M ist wieder komplementiert.* (b) *Ist M/U endlich erzeugt, so hat U genügend viele Komplemente in M.*

Weil jeder reduzierte komplementierte Modul koatomar ist, und weil umgekehrt über einem noetherschen lokalen Ring jeder koatomare Modul A nach ([14] Satz 2.4) komplementiert ist (denn er ist von der Form $A = A_1 + A_2$ mit A_1 endlich erzeugt und $\mathfrak{m}^e A_2 = 0$), gilt weiter:

Folgerung 3. *Über einem noetherschen Ring R ist ein R-Modul M genau dann reduziert und komplementiert, wenn $M = K(M)$ ist und M koatomar.*

Über den radikalvollen Anteil $P(M)$ eines komplementierten Moduls M ist viel weniger bekannt. Immerhin ist er noch komplementiert, denn es gilt allgemeiner:

Lemma 2.6. *Sei R noethersch und M komplementiert. Dann ist auch jeder Zwischenmodul $P(M) \subset X \subset M$ komplementiert.*

Beweis. Sei A ein Komplement von $P(M)$ in M. Dann ist mit $M/P(M)$ auch A koatomar, also in $(A \cap X) + P(M) = X$ der erste Summand nach Folgerung 3 bereits komplementiert. Bleibt zu zeigen, daß es auch der zweite ist: Zu $U \subset P(M)$ sei V ein Komplement von $U + A$ in M. Dann ist mit M/A auch V radikalvoll und in $V + U + A \cap P(M) = P(M)$ der dritte Summand klein in $P(M)$, also V schon ein Komplement von U in $P(M)$.

3. Über den Zusammenhang zwischen reinen und koabgeschlossenen Untermoduln.

Wir wollen im zweiten Teil dieser Arbeit die Moduln untersuchen, in denen jeder Untermodul nicht (entsprechend 1.4) durch einen reinen, sondern nur durch einen koabgeschlossenen Untermodul gestützt wird. Dabei heißt U_1 *koabgeschlossen* in M, wenn aus U_1/X klein in M/X stets folgt $U_1/X = 0$. Offenbar wird U genau dann durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 gestützt, wenn die Menge $\{Y \subset U \mid U/Y \text{ klein in } M/Y\}$ ein minimales Element hat.

In vielen Fällen stimmen nun die koabgeschlossenen Untermoduln von M mit den reinen überein, und das Hauptergebnis (3.4) dieses Abschnittes sagt, daß das über noetherschen Ringen für jeden flachen Modul M zutrifft. Wir wissen nicht, wann in R selbst die koabgeschlossenen Ideale mit den reinen übereinstimmen. Es ist das wenigstens dann der Fall, wenn R ein H-Ring ist (3.2) oder wenn R endliche Krulldimension hat (3.6).

Zuerst einige notwendige bzw. hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Untermodul koabgeschlossen ist:

Lemma 3.1. *Sei U ein Untermodul von M.*

(a) *Ist M koatomar, so gilt: Genau dann ist U koabgeschlossen in M, wenn U selbst koatomar ist und $\mathfrak{m}U = U \cap \mathfrak{m}M$ für $\mathfrak{m} \in \Omega$.*

(b) *Ist M endlich erzeugt und U rein in M, so ist U auch koabgeschlossen in M.*

(c) *Ist R noethersch und U rein in M, so ist U auch koabgeschlossen in M.*

(d) *Ist R dedekindsch, so gilt: Genau dann ist U koabgeschlossen in M, wenn $\mathfrak{m}U = U \cap \mathfrak{m}M$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$.*

Beweis. Aus der Koabgeschlossenheit allein folgt $\mathfrak{m}U = U \cap \mathfrak{m}M$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, denn bekanntlich ist $\mathfrak{m}U = \bigcap \{X \subset U \mid U/X \cong R/\mathfrak{m}\}$, und für jedes dieser X gilt nach Voraussetzung $U/X \cap \mathfrak{m}(M/X) = 0$, also $U \cap \mathfrak{m}M \subset X$.

(a) Ist U koabgeschlossen in M, so ist U koatomar, denn aus U/X radikalvoll folgt U/X klein in M/X, also $U/X = 0$. – Sei nun umgekehrt U koatomar und $\mathfrak{m}U = U \cap \mathfrak{m}M$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ (M beliebig): Aus U/X klein in M/X folgt $\mathfrak{m}(U/X) = U/X$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, so daß U/X radikalvoll, also Null ist.

(b) Nach ([15] Lemma 3.2) ist U koatomar, so daß wir nach eben fertig sind.

(c) Gäbe es ein $X \subsetneq U$ mit U/X klein in M/X, so könnten wir gleich U/X als Untermodul eines $E(R/\mathfrak{m})$ annehmen, also nach Matlis artinsch, insbesondere algebraisch kompakt nach Warfield ([11] Proposition 9). Dann wäre aber U/X direkter Summand in M/X, und das ist nicht möglich.

(d) Wie in (a) folgt aus U/X klein in M/X, daß U/X radikalvoll ist. Über einem Dedekindring ist aber dann U/X injektiv, also direkter Summand und daher Null.

Bei einem Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist der Faktor $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ genau dann radikalvoll, wenn $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, und so liefert (a) die

Folgerung. *Ein Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann koabgeschlossen in R, wenn $\mathfrak{a}$ koatomar ist und $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$.*

Lemma 3.2. *Sei R ein H-Ring und U ein Untermodul von M. Genau dann ist U koabgeschlossen in M, wenn alle $U_\mathfrak{m}$ koabgeschlossen in $M_\mathfrak{m}$ sind ($\mathfrak{m} \in \Omega$).*

Beweis. Sind alle $U_\mathfrak{m}$ koabgeschlossen und U/X klein in M/X, so folgt mit (2.4), daß $(U/X)_\mathfrak{m}$ klein in $(M/X)_\mathfrak{m}$ ist, d. h. $(U/X)_\mathfrak{m} = 0$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, also $U/X = 0$. Zur Umkehrung sei jetzt $U_\mathfrak{m}$ nicht koabgeschlossen in $M_\mathfrak{m}$, d. h. $X \subset U$ mit $0 \neq (U/X)_\mathfrak{m}$ klein in $(M/X)_\mathfrak{m}$. Weil $\mathrm{Hom}_R(U/X, E(R/\mathfrak{m})) \neq 0$ und $E(R/\mathfrak{m})$ $\mathfrak{m}$-lokal ist, erhält man ein $X \subset Y \subsetneqq U$ mit U/Y $\mathfrak{m}$-lokal, und dann ist U/Y klein in M/Y (also wie gewünscht U nicht koabgeschlossen in M): $V + U = M$ mit $Y \subset V$ impliziert $V_\mathfrak{m} + X_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}$, also $(M/V)_\mathfrak{m} = 0$; andererseits ist $M/V \cong U/V \cap U$ als Faktor von U/Y wieder $\mathfrak{m}$-lokal, also sogar $M/V = 0$.

Folgerung. *Ist R ein H-Ring und M endlich erzeugt, so gilt:* (a) *Genau dann ist M flach, wenn M keine wesentlichen Überdeckungen hat.* (b) *Ist M flach, so stimmen die koabgeschlossenen Untermoduln von M mit den reinen überein.*

Beweis. Über beliebigem R gilt wegen (3.1, b) für einen endlich erzeugten flachen Modul M, daß jeder wesentliche Epim. $B \xrightarrow{\beta} M$ schon ein Isom. ist (denn B ist wieder endlich erzeugt und $Ke\,\beta$ sowohl rein als auch klein in B, also Null) und daß in M jeder reine Untermodul koabgeschlossen ist.

Ist umgekehrt U koabgeschlossen in M und R zusätzlich ein H-Ring, so gilt nach (3.2) für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$, daß auch $U_\mathfrak{m}$ koabgeschlossen in $M_\mathfrak{m}$ ist, ja sogar direkter Summand: Für jedes Komplement $V_\mathfrak{m}$ von $U_\mathfrak{m}$ in $M_\mathfrak{m}$ ist nämlich $V_\mathfrak{m} \cap U_\mathfrak{m}$ klein in $U_\mathfrak{m}$, also auch $U_\mathfrak{m}$ ein Komplement von $V_\mathfrak{m}$, und weil $M_\mathfrak{m}$ sogar frei ist, folgt $V_\mathfrak{m} \oplus U_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}$. Damit ist M/U lokal frei, M/U flach, U rein in M.

Hat schließlich ein endlich erzeugter R-Modul M keine wesentliche Überdeckungen und ist R ein H-Ring, so folgt mit einem endlich erzeugten freien Modul F und einem Epim. $F \xrightarrow{\pi} M$, daß $Ke\,\pi$ koabgeschlossen, also nach eben sogar rein in F ist, d.h. $M \cong F/Ke\,\pi$ flach wie behauptet.

Über noetherschen Ringen gelten die Aussagen (a) und (b) der Folgerung auch ohne die Voraussetzung „endlich erzeugt". Die Beweisidee besteht darin, im lokalen Fall von flachen R-Moduln (und ihren koabgeschlossenen Untermoduln) via Matlis-Dualität auf injektive $\hat{R}$-Moduln überzugehen, in denen die entsprechenden abgeschlossenen Untermoduln bekanntlich abspalten.

Hilfssatz 3.3. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch und lokal mit Vervollständigung $\hat{R}$, sei E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$ und $M^0 = Hom_R(M, E)$. Dann gilt für jeden Untermodul U von M:*

(1) *Genau dann ist U/X klein in M/X, wenn $Ann_{M^0}(U)$ $\hat{R}$-groß in $Ann_{M^0}(X)$ ist.*

(2) *Genau dann ist U koabgeschlossen in M, wenn $Ann_{M^0}(U)$ $\hat{R}$-abgeschlossen in M^0 ist.*

Beweis. Nach Matlis ([8] Theorem 3.7) ist $\hat{R} = \mathrm{End}_R(E)$, so daß die $\hat{R}$-Struktur auf M^0 einfach die Hintereinanderausführung αf ist ($\alpha \in \hat{R}$, $f \in M^0$). Wir behaupten, daß es zu jedem $\hat{R}$-Untermodul H von M^0, mit $\mathrm{Ann}_{M^0}(U) \subsetneqq H$, ein $U_1 \subsetneqq U$ gibt mit $\mathrm{Ann}_{M^0}(U_1) \subset H$. Zum Beweis sei $f \in H$, $f \notin \mathrm{Ann}_{M^0}(U)$ und $U_1 = U \cap Ke\,f$: Klar ist dann $U_1 \subsetneqq U$, und zu jedem $g \in \mathrm{Ann}_{M^0}(U_1)$, d.h. $U \cap Ke\,f \subset U \cap Ke\,g$, gibt es ein $\alpha \in \hat{R}$ mit $g|U = \alpha\,(f\,|\,U)$, d.h. $g - \alpha f \in \mathrm{Ann}_{M^0}(U)$, so daß folgt $g \in H$.

(1) Ist $\mathrm{Ann}_{M^0}(U)$ $\hat{R}$-groß in $\mathrm{Ann}_{M^0}(X)$ und $V + U = M$ mit $X \subset V$, so folgt $\mathrm{Ann}_{M^0}(V) \cap \mathrm{Ann}_{M^0}(U) = 0$ mit $\mathrm{Ann}_{M^0}(V) \subset \mathrm{Ann}_{M^0}(X)$, also $\mathrm{Ann}_{M^0}(V) = 0$, $V = M$. Ist umgekehrt U/X klein in M/X und $0 \neq f \in \mathrm{Ann}_{M^0}(X)$, so muß $f(U) \subsetneqq Bi\,f$ sein und daher ein von Null verschiedener Homom. λ: $Bi\,f \longrightarrow E$ existieren mit $\lambda\,(f(U)) = 0$. Der läßt sich zu einem Homom. $\alpha: E \longrightarrow E$ hochheben, und damit folgt $0 \neq \alpha f \in \mathrm{Ann}_{M0}(U)$.

(2) Ist $\mathrm{Ann}_{M^0}(U)$ $\hat{R}$-abgeschlossen in M^0 und U/X klein in M/X, so folgt nach eben $\mathrm{Ann}_{M^0}(U) = \mathrm{Ann}_{M^0}(X)$, also $U/X = 0$.

Ist aber $\mathrm{Ann}_{M^0}(U)$ nicht $\hat{R}$-abgeschlossen in M^0, d.h. $\hat{R}$-groß in einem echten Zwischenmodul H, so hat man nach der Vorbemerkung ein $U_1 \subsetneqq U$ mit $\mathrm{Ann}_{M^0}(U_1) \subset H$. Wieder mit (1) ist daher U/U_1 klein in M/U_1, also U nicht koabgeschlossen in M.

Folgerung. *Sei R noethersch und lokal mit Vervollständigung $\hat{R}$. Genau dann ist $\beta: B \longrightarrow C$ ein wesentlicher R-Epimorphismus, wenn $1 \otimes \beta: \hat{R} \otimes_R B \longrightarrow \hat{R} \otimes_R C$ ein wesentlicher $\hat{R}$-Epimorphismus ist.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes hat man für jeden R-Modul M einen kanonischen $\hat{R}$-Isom. $\omega_M: M^0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M, E)$, wobei E als $\hat{R}$-Modul auch die injektive Hülle des Restklassenkörpers von $\hat{R}$ ist.

Ist nun β surjektiv und $U = Ke\,\beta$ klein in B, so wird in der exakten Folge $0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow B^0 \longrightarrow U^0 \longrightarrow 0$ der erste Pfeil nach (1) ein wesentlicher $\hat{R}$-Monom., und das gilt via ω auch für den ersten Pfeil der $\hat{R}$-exakten Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R C, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R B, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R U, E) \longrightarrow 0.$$

Wieder wegen (1) ist daher $1 \otimes \beta$ ein wesentlicher $\hat{R}$-Epim. wie behauptet. – Die Umkehrung geht ebenso, denn aus der Surjektivität von $1 \otimes \beta$ folgt die von β, so daß man dieselben exakten Folgen verwenden kann.

Satz 3.4. *Sei R noethersch und M ein R-Modul.*

(a) *Genau dann ist M flach, wenn M keine wesentlichen Überdeckungen hat.*

(b) *Ist M flach, so stimmen die koabgeschlossenen Untermoduln von M mit den reinen überein.*

Beweis. Sei im 1. Schritt R zusätzlich lokal und $\hat{R}$, E und M^0 wie im Hilfssatz. Es ist wohlbekannt, daß M genau dann flach ist, wenn M^0 als R-Modul injektiv ist. Andererseits zeigt die treuflache Ringerweiterung $R \longrightarrow \hat{R}$, daß M auch genau dann flach ist, wenn es $\hat{R} \otimes_R M$ als $\hat{R}$-Modul ist ([2] chap. I, § 3, Proposition 6), d.h. wenn $\mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M, E) \cong M^0$ als $\hat{R}$-Modul injektiv ist.

Ist daher M flach und U koabgeschlossen in M, so ist nach (3.3,2) mit M^0 auch $\mathrm{Ann}_{M^0}(U) \cong (M/U)^0$ als $\hat{R}$-Modul injektiv, d.h. M/U flach und daher U rein in M.

Sei nun im 2. Schritt R nur mehr noethersch. Dann sind nach (3.1, c) in jedem R-Modul die reinen Untermoduln koabgeschlossen. Ist aber M flach und U koabgeschlossen in M, so ist auch $M_{\mathfrak{m}}$ flach und $U_{\mathfrak{m}}$ nach (3.2) koabgeschlossen in $M_{\mathfrak{m}}$, also nach eben sogar rein in $M_{\mathfrak{m}}$. Das gilt für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, so daß M/U flach und U rein in M ist, d.h. wir haben (b) gezeigt. Wie in der Folgerung zu (3.2) ergibt sich damit auch (a).

Während in jedem Ring R die reinen Ideale koabgeschlossen sind (das sieht man unmittelbar, aber auch mit (3.1, b)), haben wir für die Umkehrung bisher nur zwei Teilantworten:

1) *Ist R schwach-noethersch, so ist jedes koabgeschlossene Ideal bereits direkter Summand.*
2) *Ist R ein H-Ring, so ist jedes koabgeschlossene Ideal rein.*

Die zweite Aussage ist ja ein Spezialfall der Folgerung zu (3.2), und im ersten Fall wird $\mathfrak{a}$ durch ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}_1$ gestützt, es folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ idempotent nach der Folgerung zu (3.1), also $\mathfrak{a}$ direkter Summand.

Einen dritten Fall – $\dim(R) < \infty$ – wollen wir jetzt durch eine Abschwächung des Begriffes „koabgeschlossen" behandeln. In einem beliebigen Ring R heiße ein Ideal $\mathfrak{a}$ *ausgezeichnet*, wenn aus $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{c}}$ stets folgt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$. Offenbar ist jedes koabgeschlossene Ideal ausgezeichnet (denn im Ring $\bar{R} = R/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ ist $\bar{\mathfrak{a}}$ ein Nilideal, also Null) und jedes ausgezeichnete Ideal idempotent. Weiter gilt:

Lemma 3.5. *Sei $\mathfrak{a}$ ein ausgezeichnetes Ideal von R.*

(a) *Ist I ein Ideal von R, so ist auch $\bar{\mathfrak{a}}$ ausgezeichnet im Ring $\bar{R} = R/I$.*

(b) *Ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, so ist auch $\mathfrak{a}R_S$ ausgezeichnet im Ring R_S.*

(c) *Ist R ein Integritätsring und $\mathfrak{a} \neq R$ von endlicher Höhe, so folgt bereits $\mathfrak{a} = 0$.*

Beweis. (a) und (b) sind klar, und bei (c) zeigen wir zuerst durch Induktion über n: Ist R ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R) = n$, so hat R keine ausgezeichneten Ideale. Bei $n = 0$ ist nichts zu zeigen, und hätte man bei $n = 1$ ein ausgezeichnetes Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \neq R$, so folgte mit $0 \neq x \in \mathfrak{a}$, daß $\mathfrak{a} \subset \sqrt{(x)}$, also $\mathfrak{a} = (x)$ idempotent wäre, was unmöglich ist. Sei also $n > 1$ und $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette maximaler Länge. Ist $\mathfrak{a} \neq R$ ein ausgezeichnetes Ideal in R, so auch $\bar{\mathfrak{a}}$ im $(n-1)$-dim. lokalen Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}_1$, und es folgt nach Induktion $\bar{\mathfrak{a}} = 0$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1$. Ebenso ist $\mathfrak{a} R_{\mathfrak{p}_1}$ ein ausgezeichnetes Ideal im 1—dim. Integritätsring $R_{\mathfrak{p}_1}$, also $\mathfrak{a} R_{\mathfrak{p}_1} = 0$, $\mathfrak{a} = 0$ wie behauptet.

Damit ist auch der allgemeine Fall erledigt: Ist $\mathfrak{a} \neq R$ ausgezeichnet von der Höhe n, so wähle man ein $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ mit $h(\mathfrak{p}) = n$, und weil wieder nach (b) $\mathfrak{a} R_{\mathfrak{p}}$ ausgezeichnet in $R_{\mathfrak{p}}$ ist, folgt nach eben $\mathfrak{a} R_{\mathfrak{p}} = 0$, d.h. wie gewünscht $\mathfrak{a} = 0$.

Satz 3.6. *Hat R endliche Krulldimension, so stimmen die koabgeschlossenen Ideale von R mit den reinen überein.*

Beweis. Mit dem vorhergehenden Lemma ist fast nichts mehr zu zeigen. Sogar jedes ausgezeichnete Ideal $\mathfrak{a}$ ist rein, denn es ist $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}'}$ (damit fertig): Ist $\mathfrak{p}$ minimal über $\mathfrak{a}'$, so folgt nach (1.2, b) $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ für ein $\mathfrak{m} \in \Omega$, und daher ist $\bar{\mathfrak{a}}$ im Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ ein ausgezeichnetes Ideal mit $h(\bar{\mathfrak{a}}) \leq h(\bar{\mathfrak{m}}) < \infty$. Nach (3.5, c) folgt $\bar{\mathfrak{a}} = 0$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

4. g-Moduln über Dedekindringen. Wird jeder Untermodul U von M durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 gestützt, so sagen wir M sei ein *g-Modul*. Natürlich hat jeder supplementierte Modul diese Eigenschaft: Ist V ein Komplement von U in M und U_1 ein Komplement von V in M mit $U_1 \subset U$, so leistet U_1 das Gewünschte. Die Umkehrung gilt i. allg. nicht, denn jeder Gelfandring ist nach (1.4) ein g-Modul, braucht aber (z.B. $R = C(I)$) nicht supplementiert zu sein.

Über Dedekindringen ist aber jeder g-Modul bereits supplementiert (4.2). Tieferliegend – und wir ziehen daraus eine Reihe von Folgerungen – ist das Hauptergebnis (4.5), das für einen einzelnen Untermodul U, wenn nur M/U endlich erzeugt ist, hinreichende (und in vielen Fällen auch notwendige) Bedingungen dafür angibt, daß U durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 gestützt wird.

Lemma 4.1. *Sei R schwach-noethersch und M ein g-Modul.*

(a) *Es ist $K(M) + P(M) = M$.*

(b) *$M/Ra(M)$ ist halbeinfach und $M/P(M)$ supplementiert.*

(c) *Jeder Untermodul U von M, mit M/U endlich erzeugt, hat genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. Auch ohne „schwach-noethersch" gilt für den g-Modul M: Ist $U \subset M$ und besitzt U selbst keine koabgeschlossenen Untermoduln, so ist U klein in M oder unzerlegbar. Falls nämlich U nicht klein in M ist, muß der koabgeschlossene Untermodul U_1, der U in M stützt, mit U übereinstimmen, und dann ist U selbst ein g-Modul, also sogar unzerlegbar.

Andererseits besitzt ein schwach-noetherscher Ring R die folgende Eigenschaft:

(**) Zu jedem zyklischen R-Modul B gibt es eine Zerlegung $B = B_1 + \ldots + B_n$, in der jedes der B_i selbst keine koabgeschlossenen Untermoduln hat,

und wir werden beim Beweis des Lemmas nur diese Eigenschaft (**) benutzen.

(a) Zunächst ist $Ra(M)/P(M)$ klein in $M/P(M)$, denn $Ra(M)$ wird durch einen koabgeschlossenen Untermodul A gestützt, der ist radikalvoll, so daß aus $A \subset P(M)$ die Behauptung folgt. Bleibt also $K(M) + Ra(M) = M$ zu zeigen: Zu jedem $x \in M$ hat man eine Zerlegung $Rx = B_1 + \ldots + B_n$ wie in (**), und falls $B_i \not\subset Ra(M)$, ist nach der Vorbemerkung B_i unzerlegbar und zyklisch, also $B_i \subset K(M)$.

(b) Als Faktormodul von $K(M)$ ist $M/Ra(M)$ halbeinfach. Als wesentliche Überdeckung von $M/Ra(M)$ ist daher $\bar{M} = M/P(M)$ koatomar und schwach-komplementiert. Außerdem ist $\bar{M}$ wieder ein g-Modul: Jeder Zwischenmodul $P(M) \subset U \subset M$ wird durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 gestützt, und natürlich ist dann $\bar{U}/\bar{U}_1$ klein in $\bar{M}/\bar{U}_1$ sowie $\mathfrak{m}\bar{U}_1 = \bar{U}_1 \cap \mathfrak{m}\bar{M}$ für alle

$m \in \Omega$; weil nun $\bar{U}_1$ als Faktormodul von $U_1/P(U_1)$ koatomar ist, ist es nach (3.1, a) auch koabgeschlossen in $\bar{M}$. Ein schwach-komplementierter g-Modul ist aber (siehe den Beweis des nächsten Satzes) bereits supplementiert.

(c) Ist U wie angegeben und $X + U = M$, so kann man gleich X koabgeschlossen in M annehmen. Dann ist auch X ein g-Modul, $X/K(X)$ als Faktor von $P(X)$ radikalvoll, $X/X \cap U$ nach Voraussetzung endlich erzeugt, also $X_1 + (X \cap U) = X$ mit $X_1 \subset K(X)$ endlich erzeugt. Nach (1.6) ist nun X_1 komplementiert, und ein Komplement von $X_1 \cap U$ in X_1 ist dann auch eines von U in M, enthalten in X wie gewünscht.

Folgerung. *Ist R schwach-noethersch und M ein g-Modul, so ist jeder endlich erzeugte Faktormodul supplementiert.*

Satz 4.2. *Über einem Dedekindring ist jeder g-Modul bereits supplementiert.*

Beweis. Wir zeigen über einem beliebigen Ring R: Ein Modul M ist (genau) dann supplementiert, wenn er die drei folgenden Bedingungen erfüllt (1) M ist ein g-Modul. (2) $M/Ra(M)$ ist halbeinfach. (3) Jeder radikalvolle koabgeschlossene Untermodul von M hat ein schwaches Komplement in M. Zunächst hat man zu jedem $U \subset M$ eine Zerlegung $W/Ra(M) \oplus (U + Ra(M))/Ra(M) = M/Ra(M)$, also $W + U = M$ mit $W \cap U \subset Ra(M)$. Dann wird $W \cap U$ durch einen koabgeschlossenen Untermodul A gestützt, der ist radikalvoll, hat also ein schwaches Komplement V in M. Weil dann V ein schwaches Komplement von $W \cap U$ in M ist, ist auch $V \cap W$ eines von U in M, d. h. wir haben gezeigt: M ist schwach-komplementiert. Für die Supplementiertheit wähle man jetzt zu $X + U = M$ ein schwaches Komplement Y von $X \cap U$ in M, und weil $V = Y \cap X$ dann ein schwaches Komplement von U in M ist, außerdem durch einen koabgeschlossenen Untermodul V_1 gestützt wird, ist $V_1 \subset X$ ein Komplement von U in M wie verlangt.

Da über einem Dedekindring jeder radikalvolle Untermodul bereits abspaltet, ist mit (4.1, b) der Satz bewiesen.

Die im nächsten Lemma untersuchten Moduln werden wir, in der Folgerung 2 zu (4.5), über Dedekindringen sogar explizit beschreiben.

Lemma 4.3. *Ist R schwach-noethersch, so sind für einen R-Modul M äquivalent:*

(i) *$M/Ra(M)$ ist halbeinfach und jeder Untermodul U von M, mit M/U endlich erzeugt, wird durch einen koabgeschlossenen Untermodul gestützt.*

(ii) *Jeder endlich erzeugte Untermodul von M hat genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. (i → ii) Das gilt über beliebigem R, denn zu $X+U = M$, mit U endlich erzeugt, hat man eine Zerlegung $W/Ra(M) \oplus ((X \cap U) + Ra(M))/Ra(M) = M/Ra(M)$, so daß für $V = W \cap X$ folgt $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M. Weil aber M/V endlich erzeugt ist, wird nach Voraussetzung V durch einen koabgeschlossenen Untermodul V_1 gestützt, so daß $V_1 \subset X$ ein Komplement von U in M ist.

(ii → i) Wie im Beweis von (4.1) genügt es, daß R die Bedingung (**) erfüllt. Wir zeigen zuerst, daß $\bar{M} = M/Ra(M)$ halbeinfach ist, wenn auch nur jeder zyklische Untermodul von M ein schwaches Komplement in M hat: Zu jedem $x \in M$ hat man nämlich $W + Rx = M$ mit $W \cap Rx$ klein in M, also $\overline{W} \oplus \overline{Rx} = \bar{M}$, d.h. in $\bar{M}$ ist jeder direkt unzerlegbare Untermodul bereits einfach. Mit (**) ist daher jeder zyklische Untermodul von $\bar{M}$ halbeinfach, und es folgt die erste Behauptung. Sei nun M/U endlich erzeugt: Zu $Ra(M) \subset V \subset M$, mit $\bar{V} \oplus \bar{U} = \bar{M}$, wähle man einen endlich erzeugten Untermodul V_1 von V mit $V_1 + U = M$, und dann ist $V_1 \cap U$ sogar klein in M. Nach Voraussetzung hat V_1 ein Komplement U_1 in M mit $U_1 \subset U$, und dann ist U_1 eine koabgeschlossene Stütze von U in M.

Für den Rest der Arbeit sei nun R ein Dedekindring, kein Körper. Wie üblich bezeichnen wir die Elemente von Ω mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$. Die koabgeschlossenen Untermoduln sind jetzt wegen (3.1, d) auch als neat-Untermoduln bekannt, d.h. sie stimmen mit den abgeschlossenen Untermoduln überein. Gilt $\mathfrak{p}U = U \cap \mathfrak{p}M$

für ein einzelnes $\mathfrak{p} \in \Omega$, so heißt U $\mathfrak{p}$-*neat* in M. Im folgenden spielen die Invarianten $\mathfrak{p}$-*Rang*$(M) = \dim_{R/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M)$ und $\mathfrak{p}$-*dim*$(M) = \dim_{R/\mathfrak{p}}(\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}))$ eine zentrale Rolle. Für sie gelten (siehe [12] Lemma 1.1 und Satz 1.3) folgende Rechenregeln:

1) Ist U $\mathfrak{p}$-neat in M ($\mathfrak{p} \in \Omega$), so gilt $\mathfrak{p}$-Rang$(U) \leq \mathfrak{p}$-Rang(M) und $\mathfrak{p}$-dim$(M/U) \leq \mathfrak{p}$-dim(M).
2) Ist $B \longrightarrow C$ ein wesentlicher Epim., so gilt $\mathfrak{p}$-Rang$(B) = \mathfrak{p}$-Rang(C) und $\mathfrak{p}$-dim$(B) \leq \mathfrak{p}$-dim(C) für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$.
3) Ist $A \longrightarrow B$ ein wesentlicher Monom., so gilt $\mathfrak{p}$-dim$(B) = \mathfrak{p}$-dim(A) und $\mathfrak{p}$-Rang$(B) \leq \mathfrak{p}$-Rang(A) für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$.
4) Ist M koatomar, so gilt $\mathfrak{p}$-Rang$(M) \geq \mathfrak{p}$-dim(M) für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$; ist M torsionsvoll, so gilt $\mathfrak{p}$-Rang$(M) \leq \mathfrak{p}$-dim(M) für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$.

Mit ihnen erhält man auch das folgende Kriterium:

Lemma 4.4. *Sei R dedekindsch, M/U koatomar und mindestens eine Primärkomponente von M/U gleich Null. Dann gilt:*

Wird U durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 in M gestützt, so folgt $\mathfrak{p}$-dim$(M/U) \leq \mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$.

Beweis. Weil im Ziel des wesentlichen Epim. $M/U_1 \longrightarrow M/U$ mindestens eine Primärkomponente verschwindet, gilt $E(M/U_1) \cong E(M/U)$ nach ([12] Satz 1.3), insbesondere $\mathfrak{p}$-dim$(M/U) = \mathfrak{p}$-dim(M/U_1) für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$. Ein maximales Element in der Menge $\{X \subset M \mid X \cap U_1 = 0\}$ liefert nun einen wesentlichen Monom. $X \longrightarrow M/U_1$, so daß mit M/U_1 auch X koatomar ist und daher $\mathfrak{p}$-dim$(M/U_1) = \mathfrak{p}$-dim$(X) = \mathfrak{p}$-Rang$(T(X)) \leq \mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ ist für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ wie behauptet. (Falls in M/U alle Primärkomponenten vorkommen, brauchen die Ungleichungen nicht mehr zu gelten: Ist R semilokal, so ist $J = Ra(R)$ sogar klein in R, aber $\mathfrak{p}$-dim$(R/J) = 1$ für alle $\mathfrak{p}$.)

Satz 4.5. *Sei R dedekindsch, M/U endlich erzeugt und $\mathfrak{p}$-dim$(M/U) \leq \mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$. Dann wird U durch einen koabgeschlossenen Untermodul in M gestützt.*

Beweis. Sei im 1. Schritt sogar $M/U \cong R/\mathfrak{p}^n$ für ein $\mathfrak{p} \in \Omega$, $n \geq 1$. Falls dann $T_{\mathfrak{p}}(M) \not\subset U$, ist die Voraussetzung über

$\mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ überflüssig, denn für ein maximales Element U_1 in der Menge $\{X \subset U \mid X\ \mathfrak{p}\text{-neat in } M\}$ und $\bar{M} = M/U_1$ gilt: $\bar{U}$ umfaßt keinen $\mathfrak{p}$-neat Untermodul von $\bar{M}$, d. h. $\bar{U}$ liegt in $\mathfrak{p}\bar{M}$ und hat selbst keine $\mathfrak{p}$-teilbaren Untermoduln. Wegen $\bar{M}/\bar{U} \cong R/\mathfrak{p}^n$ gilt das letztere sogar für ganz $\bar{M}$, und $\mathfrak{p}$-Rang $(\bar{M}) = 1$ zeigt jetzt, daß $\bar{M}$ direkt unzerlegbar ist. Wegen $T_\mathfrak{p}(\bar{M}) \neq 0$ heißt das aber, daß $\bar{M}$ zyklisch und $\mathfrak{p}$-primär ist. Also ist $\bar{U}$ klein in $\bar{M}$ und U_1 sogar koabgeschlossen in M wie gewünscht.

Falls aber $T_\mathfrak{p}(M) \subset U$, hat man schon $T(M) \subset U$, und wegen $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M)) \neq 0$ auch noch $T(M) = X \oplus Y$ mit $X \cong R/\mathfrak{p}^e$, $e \geq 1$. Es genügt zu zeigen, daß U/Y in M/Y durch einen koabgeschlossenen Untermodul gestützt wird, d.h. wir können gleich $Y = 0$ annehmen. Mit $M = C \oplus T(M)$ und $B = C \cap U$ folgt $C/B \cong R/\mathfrak{p}^n$, so daß es, weil C torsionsfrei ist, ein $A \subset B$ gibt mit $C/A \cong R/\mathfrak{p}^{n+e}$, insbesondere einen Isomorphismus $\omega: B/A \longrightarrow T(M)$. Definiert man

$$f = B \xrightarrow[d]{} C \times (B/A) \xrightarrow[1 \times \omega]{\cong} C \times T(M) \xrightarrow[\text{kan}]{\cong} M,$$

so folgt für $U_1 = Bi\,f$, daß $M/U_1 \cong Kok\,d \cong C/A \cong R/\mathfrak{p}^{n+e}$ und $U_1 \subset U$, also U/U_1 klein in M/U_1 ist. Außerdem ist U_1 torsionsfrei, also $T(M) \longrightarrow M/U_1$ ein wesentlicher Monom. und daher U_1 koabgeschlossen in M.

Ist im 2. Schritt M/U endlich erzeugt und $\mathfrak{p}$-primär für ein $\mathfrak{p} \in \Omega$, so zeigen wir die Behauptung durch Induktion über $n = \mathfrak{p}\text{-dim}(M/U)$. Bei $n > 0$ hat man eine Zerlegung $M/U = A/U \oplus B/U$ mit $A/U \cong R/\mathfrak{p}^e$, $e \geq 1$. Nach dem ersten Schritt wird B durch einen koabgeschlossenen Untermodul B_1 in M gestützt, ebenso nach Induktion A durch einen koabgeschlossenen Untermodul A_1 in M. Klar wird dann U durch $U_1 = A_1 \cap B_1$ in M gestützt, so daß es jetzt genügt zu zeigen, daß U_1 in A_1 durch einen koabgeschlossenen Untermodul gestützt wird. Weil $A_1/U_1 \cong M/B_1$ isomorph zu R oder $R/\mathfrak{p}^{e_1}$ ist, geht das mit dem ersten Schritt: Wäre $\mathfrak{p}$-Rang$(T(A_1)) = 0$, so folgte für den torsionsfreien, koabgeschlossenen Untermodul $\bar{A}_1$ von $\bar{M} = M/T(A_1)$, daß $n \leq \mathfrak{p}$-Rang $(T(M)) = \mathfrak{p}$-Rang $(T(\bar{M})) \leq \mathfrak{p}\text{-dim}(\bar{M}) = \mathfrak{p}\text{-dim}(\bar{M}/\bar{A}_1) \leq \mathfrak{p}\text{-dim}(M/A) = n - 1$ ist, und das ist nicht wahr.

Im 3. Schritt, wenn M/U nur mehr endlich erzeugt ist, führen wir einen Induktionsbeweis über $n = |\{\mathfrak{p} \in \Omega \mid T_{\mathfrak{p}}(M/U) \neq 0\}|$. Bei $n = 0$ ist M/U projektiv, also U sogar direkter Summand. Bei $n > 0$ gibt es ein $\mathfrak{q} \in \Omega$ mit $T_{\mathfrak{q}}(M/U) = A/U \neq 0$. Schreibt man $M/U = A/U \oplus B/U$, so ist M/B endlich erzeugt und $\mathfrak{q}$-primär mit $\mathfrak{q}\text{-dim}(M/B) \leq \mathfrak{q}\text{-Rang}(T(M))$, so daß nach dem zweiten Schritt B durch einen koabgeschlossenen Untermodul B_1 in M gestützt wird. Andererseits ist $|\{\mathfrak{p} \in \Omega \mid T_{\mathfrak{p}}(M/A) \neq 0\}| = n - 1$, und natürlich M/A endlich erzeugt mit $\mathfrak{p}\text{-dim}(M/A) \leq \mathfrak{p}\text{-dim}(M/U) \leq \mathfrak{p}\text{-Rang}(T(M))$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$, so daß nach Induktion auch A durch einen koabgeschlossenen Untermodul A_1 in M gestützt wird. Wieder wird dann U durch $U_1 = A_1 \cap B_1$ in M gestützt, aber zusätzlich ist U_1 koabgeschlossen in M: Aus $\mathfrak{q}\text{-dim}(B_1/U_1) = \mathfrak{q}\text{-dim}(M/A_1) \leq \mathfrak{q}\text{-dim}(M/A) = 0$ folgt nämlich U_1 $\mathfrak{q}$-neat in M, und für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ gilt entsprechend $\mathfrak{p}\text{-dim}(A_1/U_1) = 0$, also U_1 $\mathfrak{p}$-neat in M.

Bemerkung. Ist M/U endlich erzeugt und hat der Dedekindring R unendlich viele maximale Ideale, so folgt mit (4.4) sofort: Genau dann wird U durch einen koabgeschlossenen Untermodul in M gestützt, wenn $\mathfrak{p}\text{-dim}(M/U) \leq \mathfrak{p}\text{-Rang}(T(M))$ ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{p}$.

Folgerung 1. *Ist R ein nichtlokaler Dedekindring, so sind für einen Modul M äquivalent:*

(i) *Jeder Untermodul U von M, mit M/U endlich erzeugt, wird durch einen koabgeschlossenen Untermodul gestützt.*

(ii) *Ist $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M)) < \infty$ $(\mathfrak{p} \in \Omega)$, so ist $M/T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar.*

Beweis. (i → ii) Sei $\mathfrak{p}\text{-Rang}(T(M)) = m$ endlich. Dann folgt $T(M) = X \oplus Y$ mit Y $\mathfrak{p}$-teilbar, X endlich erzeugt und $\mathfrak{p}$-primär. Mit $X \oplus M' = M$ genügt es zu zeigen, daß M' $\mathfrak{p}$-teilbar ist: Hätte man ein $U \subset M'$ mit $M'/U \cong R/\mathfrak{p}$, so wäre M/U endlich erzeugt (durch $m + 1$ Elemente), also nach Voraussetzung U durch einen koabgeschlossenen Untermodul U_1 in M gestützt. U_1 würde dann auch U in M' stützen, wegen nichtlokal folgte $M'/U_1 \cong R/\mathfrak{p}^e$, $e \geq 1$, also wie im zweiten Teil von (4.4)

$\mathfrak{p}$-dim$(M'/U_1) \leq \mathfrak{p}$-Rang$(T(M'))$, d. h. $T(M') \cong Y$ nicht $\mathfrak{p}$-teilbar im Widerspruch zur Wahl von Y.

(ii $\rightarrow$ i) Ist M/U endlich erzeugt, so gilt $\mathfrak{p}$-dim$(M/U) \leq$ $\mathfrak{p}$-Rang(M). Falls also $M/T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist, folgt aus $\mathfrak{p}$-Rang(M) $= \mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ die im Satz gewünschte Ungleichung; im Fall $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M)) = \infty$ ist sie aber trivialerweise erfüllt.

Bemerkung. Im lokalen Fall muß man (ii) ersetzen durch (ii'): Ist p-Rang $(T(M)) < \infty$, so ist $M/T(M)$ koseparabel. (Das folgt aus (4.3) und [13] Folgerung 3.4.) Auch in der nächsten Folgerung bleiben im lokalen Fall die drei Punkte a, b, c nicht mehr äquivalent (siehe wieder [13]).

Folgerung 2. *Ist R ein nichtlokaler Dedekindring, so sind für einen Modul M äquivalent:*

(a) *Jeder endlich erzeugte Untermodul von M hat ein Komplement in M.*

(b) *$M/Ra(M)$ ist halbeinfach und aus $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M)) < \infty$ $(\mathfrak{p} \in \Omega)$ folgt $M/T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar.*

(c) *Jeder endlich erzeugte Untermodul von M hat genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. (b $\leftrightarrow$ c) erhält man unmittelbar mit (4.3) und Folgerung 1, so daß nur noch (a $\rightarrow$ b) zu zeigen ist: Klar ist $M/Ra(M)$ halbeinfach, und falls $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ endlich ist, zerlege man $T(M) = X \oplus Y$ wie in Folgerung 1, so daß auch noch in $\bar{M} = M/X$ jeder endlich erzeugte Untermodul ein Komplement hat. Jetzt ist aber $T(\bar{M})$ $\mathfrak{p}$-teilbar, so daß wegen nichtlokal sogar $\bar{M}$ selbst $\mathfrak{p}$-teilbar ist, also erst recht der Faktormodul $M/T(M)$.

Zum Schluß liefert der Satz auch noch eine Verallgemeinerung von ([13] Satz 3.1 und Folgerung 2) auf den nichtlokalen Fall:

Folgerung 3. *Sei R dedekindsch, $M/Ra(M)$ halbeinfach und U ein endlich erzeugter Untermodul von M mit $\mathfrak{p}$-Rang$(U) \leq$ $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M))$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$. Dann hat U genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. Zu $X + U = M$ findet man wie in (4.3) ein schwaches Komplement V von U in M mit $V \subset X$. Weil auch M/V

als Faktor von U endlich erzeugt ist, gilt $\mathfrak{p}\text{-}\dim(M/V) \leq \mathfrak{p}\text{-Rang}(U) \leq \mathfrak{p}\text{-Rang}(T(M))$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$, so daß V durch einen koabgeschlossenen Untermodul V_1 gestützt wird. Der ist dann ein Komplement von U in M.

Literatur

[1] R. Bkouche: Couples spectraux et faisceaux associés. Applications aux anneaux de fonctions: Bull. Soc. math. France 98 (1970) 253–295.

[2] N. Bourbaki: Algèbre commutative: Hermann, Paris (1961).

[3] W. Brandal: Commutative rings whose finitely generated modules decompose: Springer LNM 723 (1979).

[4] V. Camillo: Homological independence of injective hulls of simple modules over commutative rings: Commun. Algebra 6 (1978) 1459–1469.

[5] M. Carral: K-Theory of Gelfand rings: J. Pure Appl. Algebra 17 (1980) 249–265.

[6] G. DeMarco – A. Orsatti: Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal: Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 459–466.

[7] Y. Hinohara: Projective modules over weakly noetherian rings: J. Math. Soc. Japan 15 (1963) 75–88.

[8] E. Matlis: Injective modules over noetherian rings: Pac. J. Math. 8 (1958) 511–528.

[9] –: Torsion-free modules: Univ. Chicago Press (1972).

[10] G. S. Monk: A characterization of exchange rings: Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972) 349–353.

[11] R. B. Warfield, Jr.: Purity and algebraic compactness for modules: Pac. J. Math. 28 (1969) 699–719.

[12] H. Zöschinger: Invarianten wesentlicher Überdeckungen: Math. Annalen 237 (1978) 193–202.

[13] –: Quasi-separable und koseparable Moduln über diskreten Bewertungsringen: Math. Scand. 44 (1979) 17–36.

[14] –: Koatomare Moduln: Math. Zeitschr. 170 (1980) 221–232.

[15] –: Projektive Moduln mit endlich erzeugtem Radikalfaktormodul: Math. Annalen 255 (1981) 199–206.