BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1982

MÜNCHEN 1983

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals

von **Otto Haupt**

Einleitung

Nachstehend soll auf zwei Verallgemeinerungsmöglichkeiten für das üblicherweise im (euklidischen) $\mathfrak{R}^n$, $n \geq 1$, definierte Riemannsche Integral hingewiesen werden. Von einer früheren Darstellung (vgl. z.B. [HAP], III. Bd., 8.4.) unterscheidet sich die vorliegende durch Abschwächung der Voraussetzungen und durch – jedenfalls bei der zweiten Verallgemeinerung – auch durch Vereinfachung der Beweisführung.

Anmerkungen* (1) In [B] wird [L] auf [HP] zurückgeführt, insbesondere werden die Riemann-integrierbaren Funktionen durch die Stetigkeit fast überall gekennzeichnet.

(2) In der vorliegenden Note wird (§ 2) auf die in [HP] vorausgesetzte lokale Kompaktheit verzichtet.

(3) In [L] tritt die (für die Definition erforderliche) Meßbarkeitsbedingung $[f > \alpha] \in \mathfrak{J}$ für $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus A$) mit abzählbarem A *ohne* Bezugnahme auf eine Topologie auf.

Zur Motivierung der Verallgemeinerung werden zunächst (§ 1) die später notwendigen Bezeichnungen und Begriffe schon an Hand des $\mathfrak{R}^n$ bzw. des Lebesgueschen Maßes und Integrals sowie des Jordaninhaltes und des Riemannschen Integrals zusammengestellt, soweit sie für die Formulierung der Verallgemeinerungen erforderlich sind. Die Paragraphen 2 und 3 bringen dann eben diese Verallgemeinerungen.

---

*) Die Anmerkungen (1)–(3) sind von Herrn H. Bauer angeregt worden.

1. Klassisches Lebesguesches und Riemannsches Integral im $\mathfrak{R}$, $n > 1$.

1.1. Lebesguesches Maß und Integral (im $\mathfrak{R}^n$)

1.1.1. Betr. das Lebesguesche Maß.

Es sei $\mathfrak{o}$ das System der im $\mathfrak{R}^n$ offenen Mengen, wobei also „offen" sich auf die (klassische) euklidische Topologie im $\mathfrak{R}^n$ bezieht. Ferner sei $(\mathfrak{Z}_r)_r$ eine Folge von Zerlegungen $\mathfrak{Z}_r$ des $\mathfrak{R}^n$ etwa in halboffene Würfel Q_{rt}, deren Kanten parallel zu den Achsen eines orthogonalen Koordinatensystems sind und wobei $Q_{r+1,t}$ durch Halbierung der Kanten eines $Q_{r,s}$ gewonnen wird.
Als Lebesguesches Maß $\lambda^n(G)$ eines $G \in \mathfrak{o}$ wird nun erklärt das Supremum der Summe der Inhalte der in G enthaltenen Würfel aus einem $(\mathfrak{Z}_r)_r$. Weiter sei $\mathfrak{N}_0$ das σ-Ideal in $\mathfrak{R}^n$ der Mengen N aus $\mathfrak{R}^n$, die in offenen Mengen M beliebig kleinen Maßes $\lambda^n(M)$ enthalten sind. Es ist dann $\mathfrak{L}^n$ die σ-Algebra der Mengen $L := P + N$, wobei etwa $P \in \mathfrak{o}_\delta$ und $N \in \mathfrak{N}_0$; mit $\lambda^n(L) = \lambda^n(P) = \lim_t \lambda^n(O_t)$, wenn $P = \bigcap_t O_t$ mit $O_t \in \mathfrak{o}$; dabei wird unter $(O_t)_t$ ein Raster aus offenen Obermengen O_t von P verstanden und unter $\mathfrak{o}_\delta$ das kleinste δ-System über $\mathfrak{o}$.

1.1.1.1. Es ist zweckmäßig, schon hier das später Nötige zu formulieren betr. die Verbindung zwischen der σ-Algebra $\mathfrak{L}^n$ und der zunächst durch $\mathfrak{o}$ repräsentierten Topologie des $\mathfrak{R}^n$. Wir sagen, es sei $\mathfrak{L}^n$, oder auch es sei $\lambda^n|\mathfrak{L}^n$ adaptiert an $\mathfrak{o}$, d.h. an die Topologie $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{o})$ im $\mathfrak{L}^n$, wenn und nur wenn (hier weil) $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{L}^n$ enthalten ist. Es gehören dann z.B. auch alle abgeschlossenen, allgemein alle Borelschen Mengen des $\mathfrak{R}^n$ zu $\mathfrak{L}^n$.
Darüberhinaus ist aber $\lambda^n|\mathfrak{L}^n$ eng adaptiert an die Topologie, d.h. in $\mathfrak{L}^n$ ist eine *abzählbare Basis* $\mathfrak{u}_a$ der Topologie enthalten, so daß also zu jedem $x \in \mathfrak{R}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge $(U_{rt})_t$ von $\mathfrak{u}_a = (U_r)_r$ mit $U_r \in \mathfrak{o}$ existiert derart, daß $x \in U_{rt}$ für alle t und daß $\lambda^n(\{x\}) = \lim_t \lambda^n(U_{rt})$, wobei $\{x\} = \bigcap_t U_{rt}$. Schließlich ist $\mathfrak{o}$ sogar stark adaptiert an die Topologie, d. h. es ist $\mathfrak{o}$ obere Eingrenzungserzeugende für $\lambda^n|\mathfrak{L}^n$ im folgenden Sinne. Zu jedem $L \in \mathfrak{L}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $G \in \mathfrak{o}$ mit $L \subset G$ und $\lambda^n(G \setminus L) < \varepsilon$ oder, was auf das Gleiche hinausläuft: zu jedem $L \in \mathfrak{L}^n$ und jedes $\varepsilon > 0$

existiert ein abgeschlossenes A mit $A \subset L$ und $\lambda^n(L \setminus A) < \varepsilon$.– An Stelle von „starker Adaption" ist jetzt die Bezeichnung „äußere Regularität" üblich.

Anmerkung. (1) Ein eng oder stark adaptiertes Maß ist adaptiert aber nicht umgekehrt. – (2) Eine abzählbare Basis für den $\mathfrak{R}^n$ wird geliefert von z. B. einer durch fortgesetzte Halbierung der Kanten erhältliche Folge von Würfelgittern.

1.1.2. Betr. das Lebesguesche Integral

Es sei $D \in \mathfrak{L}^n$ etwa abgeschlossen, bezüglich der Einengung $\lambda^n | \mathfrak{L}^n \cap D$ des Lebesgueschen Maßes auf D erhält man in bekannter Weise das Lebesguesche Integral über D für eine reelle Funktion $f: D \to \mathfrak{R}$ folgendermaßen: Es sei $\mathfrak{t}$ das System der sogenannten $\mathfrak{L}^n$-Zerlegungen $\mathfrak{Z} := (D_r)_r$ von D, also mit disjunkten $D_r \in \mathfrak{L}^n$ und $D = \bigcup_r D_r$. Es ist $\mathfrak{t}$ ein Raster bezüglich der Verfeinerung der $\mathfrak{Z}$ (dabei heißt $\mathfrak{Z} = (D_r)_r$ feiner als $\mathfrak{Z}' = (D'_s)_s$, wenn jedes D_r in einem D'_s enthalten ist).

Anmerkung. Im allgemeinen enthält ein $\mathfrak{Z}$ unendlich viele D_r. Man kann sich aber auf $\mathfrak{Z}$ mit nur endlich vielen D_r beschränken (vgl. AH, III, 3.2.1.1.). Man bildet nun zu $f: D \to \mathfrak{R}$ und einem $\mathfrak{Z} = (D_r)_r$ die zugehörige (λ^n-) Unter- bzw. Obersumme $\underline{S}(\mathfrak{Z}, f) := \Sigma_r\ g(D_r, f)\ \lambda^n(D_r)$ bzw. $\bar{S}(\mathfrak{Z}, f) := \Sigma_r\ G(D_r, f)\ \lambda^n(D_r)$ (absolute Konvergenz der Reihen vorausgesetzt); dabei ist $g(D_r, f) := \inf \{f(x) : x \in D_r\}$ bzw. $G(D_r, f) := \sup \{f(x) : x \in D_r\}$.

Sodann erklärt man als (λ^n-) Unter- bzw. Oberintegral von f über D $\underline{\int}_D f d\lambda^n := \sup \{\underline{S}(\mathfrak{Z}, f) : \mathfrak{Z} \in \mathfrak{t}\}$ bzw. $\bar{\int}_D f d\lambda^n := \inf \{\bar{S}(\mathfrak{Z}, f) : \mathfrak{Z} \in \mathfrak{t}\}$. Es gilt $\underline{\int}_D f d\lambda^n \leq \bar{\int}_D f d\lambda^n$ und beide Integrale sind isoton bezüglich f.

Es heißt f nun λ^n-integrierbar über D, wenn Unter- und Oberintegral gleichen Wert besitzen; und f heißt λ^n-summierbar, wenn beide Werte gleich und endlich sind. Der gemeinsame Wert wird als λ^n- oder als Lebesgueintegral und mit $\int_D f d\lambda^n$ bezeichnet.

1.2. (Klassischer) Jordanscher Inhalt $i^n|\mathfrak{I}^n$ und (klassisches) Riemannsches Integral $\int\limits_D f di^n$ (im $\mathfrak{R}^n$).

1.2.1. Jordanscher Inhalt $i^n|\mathfrak{I}^n$ im $\mathfrak{R}^n$.

Wie das Lebesguesche Integral (im $\mathfrak{R}^n$) gegründet wird auf das Lebesguesche Maß, so das Riemannsche Integral auf den Jordanschen Inhalt $i^n|\mathfrak{I}^n$. Letzterer ist erklärt – und zwar eindeutig – als diejenige Einengung des Lebesguesche Maßes $\lambda^n|\mathfrak{I}^n$, welche besteht aus allen $M \subset \mathfrak{R}^n$ für die $\partial M \in \mathfrak{R}_0$, wobei $\partial M := \bar{M} \setminus \underline{M}$.

(Ein Beweis, daß es sich um eine Einengung von $\lambda^n|\mathfrak{L}^n$ zu einem Inhalt $i^n|\mathfrak{I}^n$ handelt, findet sich in 3.1, Folgerung aus dem 1. Axiom.)

1.2.1.1. Äußerer und innerer Jordanscher Inhalt $\bar{i}^n|\mathfrak{R}^n$ und $\underline{i}^n|\mathfrak{R}^n$.

Man erklärt: $\bar{i}^n(M) := \inf\{i^n(J) : M \subset J \wedge J \in \mathfrak{I}^n\}$ als den äußeren und $\underline{i}^n(M) := \sup\{i^n(M) : J \subset M \wedge J \in \mathfrak{I}^n\}$ als den inneren Jordanschen Inhalt des (beliebigen) $M \subset \mathfrak{R}^n$ Es ist $\underline{i}^n(M) \leq \bar{i}^n(M)$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $M \in \mathfrak{I}^n$ steht. (Den Fall $\bar{i}^n(M) = +\infty$ brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen, da später immer nur endliche äußere Inhalte auftreten.) Es sind $\underline{i}^n$ und $\bar{i}^n$ nicht negativ und isoton (in M).

1.2.2. Riemannsches Integral im $\mathfrak{R}^n$.

Der Integraldefinition liegt jetzt, weil sie sich auf den Jordaninhalt $i^n|\mathfrak{I}^n$ bezieht, der Raster $\mathfrak{t}'$ der $\mathfrak{I}^n$-Einteilungen $\mathfrak{Z}' := (D'_1, \ldots, D'_k)$ von $D \in \mathfrak{I}^n$ mit $i^n(D) < +\infty$ in (disjunkte) $D'_\varkappa \in \mathfrak{I}^n \cap D$ zu Grunde und zwar in endlich viele $D'_\varkappa$, die überdies zu $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{o}$ gehören sollen (vgl. 1.1.1.).

Zu D und für $\mathfrak{Z}'$ bilden wir (analog wie beim Lebesgueschen Integral) die i^n-Unter- bzw. i^n-Obersummen, nämlich

$$\underline{S}(\mathfrak{Z}', f) := \Sigma_{\varkappa=1}^{k}\, g(D'_\varkappa, f)\, i^n(D'_\varkappa) \text{ bzw.}$$
$$\bar{S}(\mathfrak{Z}', f) := \Sigma_{\varkappa=1}^{k}\, G(D'_\varkappa, f)\, i^n(D'_\varkappa);$$

dabei ist f angenommen als $f: D \to [a; b] \subset \mathfrak{R} = \mathfrak{R}^1$, mithin als beschränkt. Die Definition des i^n-Unter- bzw. i^n-Oberintegrals von f lautet daher:

$$\underline{\int}_D f di^n := \sup \{\underline{S}(\mathfrak{Z}', f) : \mathfrak{Z}' \in \mathfrak{t}'\} \text{ bzw.}$$

$$\overline{\int}_D f di^n := \inf \{\bar{S}(\mathfrak{Z}', f) : \mathfrak{Z}' \in \mathfrak{t}'\}.$$

Wieder sind i^n-Unter- und i^n-Oberintegral isoton bezüglich f mit $\underline{\int}_D f di^n \leq \overline{\int}_D f di^n$. Gilt hier das Gleichheitszeichen, so bezeichnet man f als i^n-integrierbar und, falls der gemeinsame Wert von i^n-Unter- und i^n-Oberintegral endlich sind, als i^n-summierbar mit dem Integralwert $\int_D f di^n$.

1.3. Fragestellungen

Die von uns ins Auge gefaßten Verallgemeinerungen des Riemannschen Integrals sind von zweierlei Art: Erstens handelt es sich (in § 2) um die Gültigkeit der bekannten Kennzeichnung der Riemann-integrierbaren Funktionen $f: D \to [a; b]$ als derjenigen f, welche unstetig sind auf D in den Punkten einer Lebesgueschen Nullmenge. – Zweitens handelt es sich (in § 3) unter anderem um eine Verallgemeinerung der Kennzeichnung der Riemann-integrierbaren f als der i^n-meßbaren, d.h. der f mit $[f > x] \in \mathfrak{J}^n$ bis auf abzählbar viele $x \in D$, sowie z.B. um die Gleichheit des Wertes des Lebesgueintegrals für die obere Limesfunktion $\bar{f}$ von f (in D) mit dem Wert des Riemannschen Oberintegrals von f. Die Voraussetzungen für Erstens sind dabei schwächer als die für Zweitens.

1.3.1. Bei beiden Verallgemeinerungen, also in § 2 sowohl als in § 3, werden folgende

Bezeichnungen benutzt

(I) Es sei Q eine Menge, $\mathfrak{P} := \mathfrak{p}(Q)$ die Potenzmenge von Q, ferner sei $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{P}$ eine Algebra bzw. eine σ-Algebra mit D bzw. mit Q als Einheit. Weiter sei $i|\mathfrak{J}$ bzw. $\mu|\mathfrak{m}$ ein Inhalt bzw. ein Maß, wobei $i(D) < +\infty$ sowie $\mu(Q) < +\infty$.

(II) Mit $\mathfrak{Z} := (D_1, \ldots, D_r)$ werde bezeichnet eine Zerlegung von D, wobei also $D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ und $D_\varrho \cap D_\nu = \emptyset$ bei $\varrho \neq \nu$ für die endlich vielen D_ϱ („endliche" Zerlegung). Gehören die D_ϱ alle zu $\mathfrak{J}$ bzw. zu $\mathfrak{m}$, so bezeichnet man $\mathfrak{Z}$ auch als $\mathfrak{J}$- bzw. als $\mathfrak{m}$-*Zerlegung* von D.

(III) Es sei $M \in \mathfrak{P}$ und $f: M \to [a; b] \subset \mathfrak{R} = \mathfrak{R}^1$ eine reelle beschränkte Funktion. Für eine Teilmenge T von M werde gesetzt:
$G(T,f) := \sup \{f(x): x \in T\}$ bzw. $g(T,f) := \inf \{f(x): x \in T\}$.

(IV) Gemäß (I)-(III) ergeben sich – und werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt – für topologische Räume $(E, \mathfrak{o})$, wobei $\mathfrak{o}$ etwa das System der in E offenen Mengen bezeichnet, die am Beispiel des $\mathfrak{R}^n$ angegebenen Definitionen von Begriffen wie adaptiert, stark und eng adaptiert (1.1.1.1.), die zu einem Inhalt oder Maß für ein reelles, ev. beschränktes, f zu einem Definitionsbereich von f gehörigen Unter- und Obersummen (1.1.2. und 1.2.2.) usw., innerer und äußerer Inhalt (1.2.1.1.).

Untere und obere Limesfunktion $\underline{f}$ und $\overline{f}$ eines $f: M \to \mathfrak{R}$ werden, wie üblich, erklärt durch $\underline{f}(x_0) := \lim \inf_{x \to x_0} f(x)$ bzw. $\overline{f}(x_0) := \lim \sup_{x \to x_0} f(x)$.

2. Erste Verallgemeinerung des klassischen Riemannschen Integrals

2.1. Bezeichnung

Der Beweis dieser ersten Verallgemeinerung wird (unter Berücksichtigung von 1.3.1.) geführt bei Benutzung folgender *Bezeichnung*. Ist $\mathfrak{Z} := (D_1, \ldots, D_r)$ eine endliche $\mathfrak{J}$-Zerlegung von D, so wird als *mittlere i-Oszillation* von f für $\mathfrak{Z}$ in D verstanden die *nicht-negative* Zahl

$$\Omega(\mathfrak{Z}, F) := \Sigma_{\varrho=1}^{r} w(D_\varrho, f)\, i(D_\varrho), \text{ wobei}$$
$$w(T,f) := G(T,f) - g(T,f) \text{ für } T = D_\varrho.$$

2.2. Es gilt nun der folgende

Satz. *Eine Kennzeichnung der i-integrierbaren Funktionen*

Voraussetzungen. (1) Es sei $i|\mathfrak{J}$ ein Inhalt mit D als Einheit der Algebra $\mathfrak{J}$ mit $i(D) < +\infty$. – (2) Es sei $\mathfrak{J}$ adaptiert an die durch das System $\mathfrak{o}$ der offenen Mengen repräsentierte Topologie. – (3) In der Potenzmenge $\mathfrak{P}$ von D sei enthalten ein Mengensystem $\mathfrak{N}$ mit den Eigenschaften: (a) Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $N \in \mathfrak{N}$ gibt es eine abzählbare Überdeckung in $\mathfrak{J}$, d.h. $J_\nu \in \mathfrak{J}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, mit $N \subset \bigcup_\nu J_\nu$ und $\Sigma_\nu i(J_\nu) < \varepsilon$. – (b) Bei *abgeschlossenem* $N \in \mathfrak{N}$ ist die Überdeckung sogar *endlich*, also, weil $\mathfrak{J}$ Algebra, $N \subset J_1 \cup \ldots \cup J_n =: J \in \mathfrak{J}$ mit $i(J) \leq i(J_1) + \ldots + i(J_n) < \varepsilon$. (3) Es sei $f: D \to [a; b] \subset \mathfrak{R} := \mathfrak{R}^1$, also reell und beschränkt.

Behauptung. Nachstehende drei Aussagen sind gleichwertig:

(1) Es ist f i-summierbar über D;

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es (bei gegebenem f) eine (endliche) $\mathfrak{J}$-Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von D derart, daß die mittlere Oszillation von f für $\mathfrak{Z}$ in D kleiner als ε ist;

(3) Zu f gibt es ein $N \in \mathfrak{N}$, so daß f auf D stetig ist in jedem $x \in D \setminus N$.

Zusatz. Im Falle des klassischen Riemannschen Integrals (im $\mathfrak{R}^n$) ist $\mathfrak{N}$ das σ-Ideal der λ^n-Nullmengen und die obigen Voraussetzungen sind erfüllt. Der klassische Jordaninhalt $i^n|\mathfrak{J}^n$ ist Einengung des Lebesgueschen Maßes $\lambda^n|\mathfrak{L}^n$.

Beweis. (A) Es gilt (1) $\leftrightarrow$ (2). Denn die mittlere Oszillation von f ist Differenz der zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Ober- und Untersumme; und beide Summen konvergieren genau für i-summierbares f auf dem Raster der $\mathfrak{J}$-Zerlegung gegen den gleichen Wert, nämlich den Wert des i-Integrals von f.

(B) Es gilt (2) $\to$ (3).

(B a) Es sei V_0 die Menge aller $x \in D$, in denen f unstetig ist. Es ist also $V_0 := \{x : x \in D \wedge w(x, f) > 0\}$, wobei $w(x, f) := \overline{f}(x) - \underline{f}(x)$ die sogen. „punktale Oszillation" von f in x bezeichnet.

Zum Beweis, daß $V_0 \subset \bigcup_\nu J_\nu$ mit $J_\nu \in \mathfrak{J}$ und $\Sigma_\nu\, i(J_\nu) < \varepsilon$, gehen wir über zu $V_0 = \bigcup_{m>1} V_m$, wobei $V_m := \{x : x \in D \wedge w(x, f) \geq m^{-1}\}$. Ersichtlich gilt Beh. (3) für V_0 genau dann, wenn sie für jedes einzelne V_m gilt. Es genügt also, das einzelne V_m zu behandeln, wobei zu bemerken ist, daß aus der Gültigkeit von Beh. (3) für ein V_m, $m \geq 2$, die für V_{m-1} folgt.

Es ist aber V_m *abgeschlossen* für jedes m, wie aus der Ober- bzw. Unterhalbstetigkeit von $\bar{f}$ bzw. $\underline{f}$ folgt (vgl. AH I, 7.5.2.1., Beispiel (7)). Somit ist gemäß Vor. (2) (b) nur die Existenz *eines* $J \in \mathfrak{J}$ zu beweisen, für das $V_m \subset J$ und $i(J) < \varepsilon$ gilt, sofern eben Beh. (2) gilt.

(B b) Es sei also zunächst $V_m \subset J \subset D$ mit $J \in \mathfrak{J}$. Weiter sei $\mathfrak{Z} := (D_1, \ldots, D_k)$ eine i-Zerlegung von D, für die Beh. (2) gilt, also $\Sigma_\varkappa\, w(D_\varkappa, f)\, i(D_\varkappa) < \varepsilon$. Es seien etwa $D_1', \ldots, D_r'$ diejenigen unter den $D_\varkappa$, für die $D_\varrho' \cap J \neq \emptyset$, $\varrho = 1, \ldots, r$, so daß $J = D_1' \cup \ldots \cup D_r'$. Wegen $V_m \subset J$ ist $w(D_\varrho', f) \geq m^{-1}$ für jedes ϱ. Somit $m^{-1}\, i(J) < \varepsilon$, also $i(J) < m\varepsilon$. Für festes m und hinreichend kleines ε ist also $i(J)$ beliebig klein.

(C) Es gilt (3) $\rightarrow$ (2). Zufolge (3) gibt es zu jedem m ein $J(m) \in \mathfrak{J}$, so daß $V_m \subset J(m)$ und $i(J(m)) < \varepsilon$ bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$. Es sei $\mathfrak{Z} := (D_1, \ldots, D_r)$ eine $\mathfrak{J}$-Zerlegung von D; dann ist eine solche auch $(D_1', \ldots, D_r', D_{r+1}') =: \mathfrak{Z}'$, wenn $D_\varrho' = D_r \cap J(m)$, $\varrho = 1, \ldots, r$, und $D_{r+1}' := D \setminus J(m)$. Zufolge Vor. (4) ist $|f| < p < +\infty$ in D. Andererseits hat man $0 < \Omega\,(\mathfrak{Z}', f) = (\Sigma_{\varrho=1}^r;\, w(D_\varrho', f)\, i(D_\varrho')) + w\,(D_{r+1}', f)\; i\,(D_{r+1}') < 2pi(J(m)) + m^{-1} i(D)$. Für hinreichend großes m und (gemäß Aussage (3)) hinreichend kleines $i(J(m))$ wird also die nichtnegative mittlere Oszillation von f für $\mathfrak{Z}'$ in D beliebig klein, gemäß Aussage (2).

3. Zweite Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals

3.1. Annahmen

In diesem § 3 werden folgende Annahmen herangezogen.

1. Axiom. Es sei D Einheit einer σ-Algebra $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{P} :=$ Potenzmenge von D. Ferner sei $\mu | \mathfrak{m}$ ein Maß mit $\mu(D) < +\infty$; das σ-Ideal in $\mathfrak{P}$ der μ-Nullmengen sei $\mathfrak{N}$. Es soll $\mu | \mathfrak{m}$ *adaptiert* sein an eine, durch das S, d-System $\mathfrak{o}$ der offenen Mengen repräsentierte Topologie und zwar derart, daß in einem in $\mathfrak{m}$ enthaltenen Umgebungsraster $\mathfrak{u}(x)$ für jedes $x \in D$, schließlich alle $U \in \mathfrak{u}(x)$ beliebig kleines Maß $\mu(U)$ besitzen; o.B.d.A. wird dabei U als *offen* angenommen.

Folgerung aus dem 1. Axiom

(A) Zufolge der Adaption von $\mu|\mathfrak{m}$ an $(D, \mathfrak{o})$ gilt $\underline{M}$, $\bar{M}$, $\partial M := \bar{M} \setminus \underline{M} \in \mathfrak{m}$ für jedes $M \in \mathfrak{P}$. Ferner bilden die $M \in \mathfrak{P}$ mit $\partial M \in \mathfrak{N}$ eine Algebra $\mathfrak{J}$ mit D als Einheit. Daher ist die Einengung $i|\mathfrak{J} := \mu|\mathfrak{J}$ von $\mu|\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{J}$ ein endlicher, σ-additiver Inhalt (aber im allgemeinen kein Maß); in der Tat hat man $\partial(M' \cup M'') \subset \partial M' \cup \partial M''$ und $\partial(D \setminus M) = \partial M$.

(B) Aus $\bar{N} \in \mathfrak{N}$ folgt $\partial N \in \mathfrak{N}$ (denn $\partial N \subset \bar{N}$ und mit $\bar{N}$ ist auch jede Teilmenge von $\bar{N}$ in $\mathfrak{N}$ enthalten). Die Umkehrung ist i. a. nicht richtig. – Aus $\partial N \in \mathfrak{N}$ und $N \in \mathfrak{N}$ folgt $\bar{N} \in \mathfrak{N}$ (denn $\bar{N} \setminus N \subset \partial N \in \mathfrak{N}$, also $\bar{N} \setminus N \in \mathfrak{N}$ und mithin $\bar{N} = N + N'$ mit $N + N' = N'' \in \mathfrak{N}$).

2. Axiom. Unter $i|\mathfrak{J}$ soll diejenige Einengung des Maßes $\mu|\mathfrak{m}$ verstanden werden, für die $\mu(\partial J) = O$ genau für $J \in \mathfrak{J}$ (vgl. Folgerung aus Axiom 1). Es ist $\mathfrak{J}$ Algebra mit $D \in \mathfrak{J}$.

3. Axiom. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. – (a) Zu jedem $M \in \mathfrak{m}$ gibt es $J_\nu \in \mathfrak{J}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, mit $\bigcup_\nu J_\nu =: T \subset M$ und $\mu(M \setminus T) < \varepsilon$. – (b) Zu jedem $M \subset D$ gibt es ein $J \in \mathfrak{J}$ mit $M \subset J$ und $0 < \mu(J) - \mu(\bar{M}) < \varepsilon$.

Zusatz. Für beliebiges $M \subset D$ gilt: $\bar{i}(M) = \bar{i}(\bar{M}) = \mu(\bar{M})$.

Dabei ist $\bar{i}$ der zu $i|\mathfrak{J}$ gehörige äußere Inhalt.

Entsprechendes gilt für den inneren Inhalt $\underline{i}$.

Beweis des Zusatzes. (I) Es gilt $\bar{i}(M) = \bar{i}(\bar{M})$. Denn wegen $M \subset \bar{M}$ ist $\bar{i}(M) \leq \bar{i}(\bar{M})$. Umgekehrt folgt für $J \in \mathfrak{J}$ aus $M \subset J$, daß $\bar{M} \subset \bar{J}$ und $\bar{i}(\bar{M}) \leq \bar{i}(\bar{J}) = \bar{i}(J)$, also $i(\bar{M}) \leq \bar{i}(M)$ (wegen $M \subset J$).

(II) Es gilt $\bar{i}(\bar{M}) = \mu(\bar{M})$. Gemäß Axiom 3 existiert zu $\varepsilon > 0$ und M ein $J \in \mathfrak{J}$ mit $M \subset J$ und mit $0 \leq \mu(J) - \mu(\bar{M}) < \varepsilon$;

dabei ist $\mu(J) = \bar{\imath}(J)$. Wegen $\mu(\bar{M}) \leq \bar{\imath}(\bar{M})$ folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, die Beh. $\bar{\imath}(M) = \mu(M)$.

3.2. Hilfssätze. Dem Beweis des Satzes in 3.3. seien zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Dazu sei bemerkt, daß o.B.d.A. auch bei μ-Zerlegungen von D ausschließlich mit Zerlegungen in *endlich viele* u-meßbare Teile gearbeitet werden darf (vgl. AH III. 3.1.1.).

1. Hilfssatz. Voraussetzungen. (I) Die in 3.1. angegebenen drei Axiome 1.–3. seien erfüllt. (II) Unter $\mathfrak{Z}_\mu := (D_1, \ldots, D_n)$ bzw. $\mathfrak{Z}_i := (J_1, \ldots, J_k)$ sei eine μ- bzw. i-Zerlegung von D verstanden, also mit (disjunkten) $D_\nu \in \mathfrak{m}$ bzw. $J_\varkappa \in \mathfrak{J}$. Ferner sei $f: D \to [a; b] \subset \mathfrak{R}$ beschränkt. Die zu f und den $\mathfrak{Z}_\mu$ bzw. $\mathfrak{Z}_i$ gehörigen Ober- und Untersummen für f über D seien analog wie in 1.2.2. erklärt, also z. B. $\bar{S}(\mathfrak{Z}_\mu, f) := \Sigma_\nu G(D_\nu, f)\,\mu(D_\nu)$ bzw. $\underline{S}(\mathfrak{Z}_i, f) := \Sigma_\varkappa g(J_\varkappa, f)\, i(J_\varkappa)$.

Behauptung. Zu einer beliebigen μ-Zerlegung $\mathfrak{Z}_\mu$ von D und beliebigem $\varepsilon > O$ existiert (bei gegebenem f) eine i-Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ von D derart, daß z. B. $S(\mathfrak{Z}_i, f) < S(\mathfrak{Z}_\mu, f) + \varepsilon$ bzw. $\underline{S}(\mathfrak{Z}_i, f) > \mathrm{S}(\mathfrak{Z}_\mu, f) - \varepsilon$.

Beweis. (1) Es sei $\eta_\nu > 0$, $\zeta_\varrho > 0$ und $\eta := \Sigma_\nu \eta_\nu$ sowie $\zeta := \Sigma_\varrho \zeta_\varrho$. Weiter sei $\mathfrak{Z}_\mu := (D_1, \ldots, D_n)$. Gemäß 3.1., Axiom 2, existiert $M_\nu := \bigcup_t J_{\nu t}$ mit $M_\nu \subset D_\nu$ und $\mu(D_\nu \setminus M_\nu) < \eta_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$ und $t = 1, 2, \ldots$ – (2) Wir können und wollen $k_\nu \geq 1$ so groß wählen, daß für $R_\nu := \bigcup_{t \geq k_\nu + 1} J_{\nu t}$ gilt $\mu(R_\nu) < \zeta_\nu$. Mit $J'_\nu := J_{\nu 1} \cup \ldots \cup J_{\nu k_\nu} \in \mathfrak{J}$ hat man $R_\nu = M_\nu \setminus J'_\nu$. Wegen der Disjunktheit der D_ν sind die $J'_1, \ldots, J'_n$, $J'_{n+1} := D \setminus (J'_1 \cup \ldots \cup J'_n)$ disjunkt und es gilt $\mu(J'_{n+1}) = \Sigma_\nu \mu(D_\nu \setminus J'_\nu) = \Sigma_\nu \mu(D_\nu \setminus M_\nu) + \mu(R_\nu) < \Sigma_\nu (\eta_\nu + \zeta_\nu) = \eta + \zeta$, also beliebig klein bei passendem η und ζ. Es ist nun $\mathfrak{Z}_i := (J'_1, \ldots, J'_n, J'_{n+1})$ eine Zerlegung von D der behaupteten Art. Denn wegen $J_\nu \subset D_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, ist zunächst $G(J'_\nu, f)\, i(J'_\nu) < G(D_\nu, f)\,\mu(D_\nu)$ und $g(J'_\nu, f)\, i(J'_\nu) \geq g(D_\nu, f)\,\mu(D_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$; außerdem gilt $|G(J'_{n+1}, f)\, i(J'_{n+1}| \leq 2p(\eta + z)$ und entsprechend für $g(J'_\nu, f)\, i(J'_\nu)$ usw.

2. Hilfssatz. Voraussetzungen. Es seien die Bezeichnungen aus 3.1. sowie das 1. und 2. Axiom aus 3.1. erfüllt. Unter

f bzw. $\underline{f}$ wird wieder die obere bzw. untere Limesfunktion eines (beschränkten) $f: D \to [a; b]$ verstanden (vgl. 1.4, sowie die Ausführungen betr. die Definition von f und $\underline{f}$ weiter unter in Bew. (b)).

Behauptung. Es sei $X'(\chi) := [f \geq \chi] \setminus \overline{[f \geq \chi]}$ und $q(\chi) := \mu(X'(\chi))$ für $\chi \in [a; b]$. Die reelle Funktion $q: [a; b] \to \mathfrak{R}_0^+$ der reellen Veränderlichen $\chi \in [a; b] \in \mathfrak{R}^1$ ist i^1-integrierbar nach χ und Null bis auf (höchstens) abzählbar viele χ. Entsprechendes gilt, wenn f in $X'(\chi)$ durch $\underline{f}$ ersetzt wird.

Beweis. (a) Es genügt nur die Oberhalbstetigkeit in Betracht zu ziehen, da für $f = \underline{f}$ entsprechend geschlossen werden kann.

(b) Wir setzen $X(\chi) := [f \geq \chi]$ und $H(\chi) := \overline{[f \geq \chi]}$. Dabei sei

$$f(\chi) := \limsup_{\substack{\eta \to \chi \\ \eta \in U_0(\chi)}} f(\eta),$$

wobei $U_0(\chi)$ eine in χ punktierte, offene Umgebung von χ bezeichnet. In einem solchen $U_0(\chi)$ ist aber $[f \geq \eta]$ abgeschlossen, also $= \overline{[f \geq \eta]}$ (vgl. AH, Band II, 7. 5. 2. 1, Beispiel (7)), so daß wegen der Abgeschlossenheit von $H(\chi)$, die Menge $X'(\chi) := X(\chi) \setminus H(\chi)$ offen in $H(\chi)$, also (wegen der Adaptierbarkeit des Maßes μ) μ-meßbar ist. Überdies ist $X'(\chi) \neq \emptyset$ wegen $f(\eta) = f(\eta)$ in $U_0(\chi)$.

(c) Für $q(\chi)$ besagt dies: Es ist q lateral konvergent und daher unstetig in einer (höchstens) abzählbaren Menge A (AH Bd. II, 7. 1. 0 und 7. 3). Wegen der μ-Meßbarkeit von $X'(\chi)$ ist q μ-meßbar und, weil beschränkt, sogar μ-summierbar. Da aber die abzählbare Menge A eine μ-Nullmenge ist, folgt die i-Summierbarkeit von q aus dem Satz in 2. 2. (Daß jede abzählbare Menge μ-Nullmenge ist, folgt aus dem 1. Axiom. Vgl. auch 3. 3., Bew. (II. 2).)

3.3. Zweite Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals

Unter Benutzung der beiden Hilfssätze in 3.1.1. beweisen wir jetzt den

Satz. Voraussetzung. Es sei $f: D \to [a; b]$. Und es sollen die drei Axiome in 3.1. erfüllt sein.

Behauptung. (1) Es gilt $\overline{\int}_D f di = \int_D f d\mu$ und $\underline{\int}_D f di = \int_D \underline{f} d\mu$ mit $\overline{\int}_D f di = \overline{\int}_D f di$ und $\underline{\int}_D f di = \underline{\int}_D f di$:

(2) $$\overline{\int}_D f di = -ai(D) + \int_a^b \bar{\imath}([f \geq \chi]) d\chi,$$

$$\underline{\int}_D f di = -ai(D) + \int_a^b i([f \geq \chi]) d\chi;$$

(3) Es ist f i-summierbar, d. h. es ist $\int_D f di = \overline{\int}_D f di = \underline{\int}_D f di$ endlich, genau wenn f i-meßbar, d. h. wenn $[f \geq \chi] \in \mathfrak{J}$ bis auf abzählbar viele $\chi \in [a, b]$.

(4) Für die sogen. punktale Oszillation $w(x, f) := w(x, D, \mathfrak{u}, f) := f(x) - \underline{f}(x)$ von f in $x \in D$ bezügl. $\mathfrak{u}$ gilt $\overline{\int}_D w(x, f) di = \overline{\int}_D f di - \underline{\int}_D f di$.

Beweis. Für Beh. (1)–(3) genügt die Beschränkung auf den Fall f, da für $\underline{f}$ analog geschlossen werden kann.

(I) Beweis der Beh. (1)

(I 1) Die Existenz und Endlichkeit von $\int_D f d\mu$ folgt aus der Oberhalbstetigkeit bezüglich $(D, \mathfrak{o})$, also der μ-Meßbarkeit von f und wegen der Beschränktheit von f (nämlich der von f). Zufolge des 1. Hilfssatzes (3.2.) existiert zu beliebigen $\varepsilon > 0$ und beliebiger μ-Zerlegung $\mathfrak{Z}_\mu$ von D eine i-Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ von D mit

(1′) $\bar{S}(\mathfrak{Z}_i, f) < \bar{S}(Z_\mu, f) + \varepsilon$. Und gemäß der Definition von $\int_D f d\mu$ gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine μ-Zerlegung $\mathfrak{Z}_\mu$ von D mit

(1″) $\int_D f d\mu \leq \bar{S}(\mathfrak{Z}_\mu, f) < \int_D f d\mu + \varepsilon$. Kombination von (1′) und (1″) ergibt unter Berücksichtigung der Definition von $\overline{\int} f di$, daß $\overline{\int}_D f di \leq \bar{S}(\mathfrak{Z}_i, f) < \int_D f d\mu + 2\varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $\overline{\int}_D f di \leq \int_D f d\mu$. Und da $i|\mathfrak{J}$ Einengung von $\mu|\mathfrak{m}$ ist, gilt auch $\overline{\int}_D f di \geq \overline{\int}_D f d\mu$.

(I 2) Es ist außerdem $\overline{\int_D} \bar{f} di = \overline{\int_D} f di$.

Es sei nämlich $\mathfrak{Z}_i := (J_1, \ldots, J_n)$ eine i-Zerlegung von $D \in \mathfrak{J}$, also $J_\nu \in \mathfrak{J}$. Wegen $i(J_\nu) = i(\bar{J}_\nu)$ für $J_\nu \in \mathfrak{J}$ (vgl. 3.1. Axiom 2)) kann J_ν statt $\bar{J}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, angenommen werden, also $\mathfrak{Z}_i' := (J_1, \ldots, J_n, N)$ mit $\bigcup_\nu J_\nu = D \setminus N$, wobei $i(N) = 0$ und $\overline{\int_D} f di = \overline{\int_{D \setminus N}} f di$. Wegen $f \leq \bar{f}$ ist $G_\nu(f) := G(f, J_\nu) := \sup \{f(x) : x \in J_\nu\} \leq G_\nu(\bar{f})$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$. Daß rechterhand immer das Gleichheitszeichen steht, sieht man so ein: Andernfalls existiert, für (mindestens) ein ν, ein $x \in J_\nu$ mit $G_\nu(f) < \bar{f}(x)$. Gemäß der Definition von $\bar{f}$ gilt aber in jeder Umgebung von x, in der x enthalten ist, insbesondere daher in J_ν, die Ungleichung $\bar{f}(x) \leq G_\nu(f)$. Man hat also für jedes $\mathfrak{Z}_i$ der gewählten Art: $\bar{S}(\mathfrak{Z}_i, f) = \bar{S}(\mathfrak{Z}_i, \bar{f})$; und da $\mathfrak{Z}_i$ beliebig fein sein kann, folgt $\overline{\int_D} f di = \overline{\int_D} \bar{f} di$.

(II) Beweis der Beh. (2)

(II 1) Gemäß AH III, 3. 2.2. 2., ist $\overline{\int_D} f di = \int_D \bar{f} d\mu = -a\mu(D) + \int_b^a \mu([\bar{f} \geq \chi]) d\chi$. Da $\mu(D) = i(D)$ ist, bleibt zu zeigen, daß

(2′) $\int_a^b \mu([f \geq \chi]) d\chi = \int_a^b i^1([f \geq \chi]) d\chi$, oder, was das gleiche, daß $\mu([\bar{f} \geq \chi]) - i^1([f \geq \chi])$ eine i^1-Nullfunktion ist $(\chi \in [a; b])$.

(II 2) Gemäß der Definition von $\bar{\imath}$ bzw. wegen $\bar{\imath}(M) = \bar{\imath}(\bar{M})$ ist $\bar{\imath}([f \geq \chi]) = \bar{\imath}(\overline{[f \geq \chi]})$ für alle χ und somit $q(\chi) := \mu(X'(\chi))$ zu betrachten. Es ist aber (vgl. 3.2., Hilfssatz 2) $q(\chi) = 0$ für alle $\chi \in [a; b]$ bis auf eine abzählbare Menge, etwa $A = \bigcup_r a_r$. Jedes a_r besitzt (gemäß 3.1., Axiom 1., Umgebungen U_r (mit $a_r \in U_r$) beliebig kleinen Inhaltes, so daß $\mu(A) \leq \Sigma_r\, i(J_r) < 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, also $\mu(A) = \inf_n 2^{-n} = 0$.

(III) Betr. Beh. (3). Beweis der i-Meßbarkeit von f als Integrabilitätskriterium bezüglich i.

Gemäß Beh. (1) und (2) gilt

$$\overline{\int} f di - \underline{\int_D} f di = \int_a^b i([\bar{f} \geq \chi] \setminus [\underline{f} \geq \chi]) \, d\chi.$$

In dieser Gleichung ist der Integrand rechter Hand Differenz zweier monotoner Funktionen von χ, also stetig in χ auf $[a; b]$ bis auf eine abzählbare Menge $A \subset [a; b]$; wie im Beweis des 2. Hilfssatzes gezeigt, ist aber A eine i-Nullmenge. Daher ist die linke Seite unserer Gleichung Null genau, wenn der Integrand rechter Hand Null ist in $[a; b] \setminus A$, oder, was das Gleiche, wenn $[f \geq \chi] \in \mathfrak{J}$ bis auf die $\chi \in A$.

(IV) Betr. Beh. (4). Gemäß AH I, 7.5.2.1., Beisp. (12), ist $w(x; f) = \bar{f}(x) - \underline{f}(x)$, woraus wegen der Existenz des i-Ober- und i-Unterintegrals von f die Behauptung folgt.

4. Hinweis auf weitere Sätze

Bei jeweils geringen Verschärfungen der dem Satz von 2.2. zu Grunde liegenden Voraussetzungen lassen sich auch beweisen, daß ein verallgemeinertes Riemannsches Integral (fast überall) Stammfunktion des Integranden ist, ferner ein Satz über die gliedweise Riemannsche Integrierbarkeit von Folgen Riemann-integrierbarer Funktionen.

Literatur

H. Bauer, Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße. Math. Zeitschr. 65, 448–482 (1956); zitiert mit [B].

O. Haupt und Ch. Pauc, Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. Akad. Wiss. u. Lit. Mainz, Abh. d. math.-naturw. Kl. 1955, 189–218 (1956); zitiert mit [HP].

Aumann-Haupt, Einführung in die reelle Analysis, III. Bd. (im Druck) Berlin-New York, Verlag W. de Gruyter u. Co.; zitiert mit [AH]. Siehe auch die 2. Aufl. Haupt-Aumann-Pauc, Differential- u. Integralrechnung, III. Bd. ebenda 1955, 8.4.; zitiert mit [HAP].

L. H. Loomis, Linear functionals and content. Amer. J. Math. 76, 168–182 (1954); zitiert mit [L].