Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1943

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
Bibliothek

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Über gewisse Umordnungen von Permutationen I.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 4. Juni 1943.

§ 1. Das Umordnungs-Verfahren.

1. Es seien $N = n_1 + \ldots + n_f$ Elemente in $f\,(\geqq 1)$ Kategorien $1, \ldots, f$ aufgeteilt, derart daß n_i Elemente zur Kategorie mit der Nummer i gehören. Für diese Elemente sei eine bestimmte Rangordnung

$$a_{n_i}^{(i)} > a_{n_i-1}^{(i)} > \ldots . > a_2^{(i)} > a_1^{(i)} \tag{1}$$

festgesetzt. Wir betrachten eine (echte oder unechte) Teilmenge der Menge dieser Elemente, und zwar in einer bestimmten Anordnung:

$$A = [a_{\alpha_1}^{(i_1)}, \ldots, a_{\alpha_m}^{(i_m)}] \tag{2}$$

$(1 \leqq m \leqq N)$; und wir bezeichnen als in A enthaltene „absteigende Linie" (oder kurz „Linie") ein System von s Elementen gleicher Kategorie

$$a_\gamma^{(i)} \qquad (\beta \geqq \gamma \geqq \beta - s + 1), \tag{3}$$

wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: 1) alle Elemente aus (3) kommen in (2) vor; 2) wenn (im Falle $s > 1$) $a_\gamma^{(i)}$ und $a_\delta^{(i)}$ zwei verschiedene Elemente aus (3) sind und $\gamma > \delta$ ist, dann kommt $a_\gamma^{(i)}$ in (2) an früherer Stelle vor als $a_\delta^{(i)}$. — Das Element $a_\beta^{(i)}$ werde das „Anfangselement" der Linie genannt.

Eine solche Linie in A heiße „vollständig", wenn es keine umfassendere absteigende Linie in A gibt, so daß die Elemente (3) eine echte Teilmenge davon bilden. Es sei $l\,(A)$ die Anzahl der vollständigen in A enthaltenen Linien.

2. Als „Konversion" möge nun das folgende Verfahren bezeichnet werden, durch das die Elemente von A in eine neue Anordnung $K\,(A)$ gebracht werden. Hiezu betrachten wir zunächst die Anfangsglieder der vollständigen Linien aus A; diese Anfangsglieder mögen in umgekehrter Reihenfolge angeschrieben werden gegenüber derjenigen Reihenfolge, in der sie in A angeordnet sind; auf jedes dieser Anfangsglieder mögen aber in $K(A)$ unmittelbar die Elemente der zugehörigen absteigenden Linie (in absteigender Anordnung) folgen. Beispielsweise ist

$$K(A) = [a_2^{(2)}, a_7^{(1)}, a_6^{(1)}, a_5^{(1)}, a_9^{(1)}, a_8^{(1)}, a_1^{(2)}, a_6^{(2)}, a_5^{(2)}, a_4^{(2)}, a_3^{(2)}],$$

wenn

$$A = [a_5^{(2)}, a_6^{(2)}, a_4^{(2)}, a_1^{(2)}, a_9^{(1)}, a_7^{(1)}, a_8^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_6^{(1)}, a_5^{(1)}],$$

also

$$a_5^{(2)} - a_4^{(2)} - a_3^{(2)},\ a_6^{(2)},\ a_1^{(2)},\ a_9^{(1)} - a_8^{(1)},\ a_7^{(1)} - a_6^{(1)} - a_5^{(1)},\ a_2^{(2)}$$

die $l(A) = 6$ vollständigen Linien in A mit den Anfangsgliedern $a_5^{(2)}, a_6^{(2)}, a_1^{(2)}, a_9^{(1)}, a_7^{(1)}, a_2^{(2)}$ sind. Jede vollständige Linie in A ist offenbar in $K(A)$ als (vollständige oder unvollständige) Linie enthalten und es ist $l\big(K(A)\big) \leqq l(A)$. Im Falle $l(A) = 1$ ist $K(A) = A$.

3. Ist

$$P = [x_1, \ldots, x_N] \tag{4}$$

eine Anordnung (Permutation) aller N Elemente, so möge für jedes λ $(1 \leqq \lambda \leqq N)$ die Anzahl $l(P_\lambda) = l_\lambda$ der vollständigen Linien in

$$P_\lambda = [x_1, \ldots, x_\lambda] \tag{5}$$

bestimmt werden. Offenbar ist

$$1 = l_1 \leqq l_2 \leqq \ldots \leqq l_N$$

und

$$f \leqq l_N \leqq N. \tag{6}$$

Ist dann g der größte Wert von λ von der Art, daß $l(P_\lambda) = f$ ist, so werde $P_g = F(P) = F$, $(x_{g+1}, \ldots, x_N) = H$ gesetzt, ferner symbolisch

$$P = [F, H] \tag{7}$$

geschrieben und unter Verwendung der gleichen Symbolik die Permutation P' durch

$$P' = [H, K(F)] \tag{8}$$

definiert. Damit ist eine bestimmte Umordnung der Permutation P erklärt.[1] Rekursorisch werde dann $P^{(\nu)}$ für $\nu \geqq 2$ durch $P^{(\nu)} = (P^{(\nu-1)})'$ definiert.

§ 2. Finite und stationäre Permutationen.

4. Eine absteigende Linie in (2), deren Elemente in (2) unmittelbar aufeinanderfolgen, möge ein Verband in A heißen; und zwar ein „vollständiger Verband", wenn es keinen ihn enthaltenden umfassenderen Verband in A gibt. Bezeichnet $v(A)$ die Anzahl der vollständigen Verbände von A, so gilt $v(P') \leqq \leqq v(P)$[1a]; da somit

$$v(P) \geqq v(P') \geqq v(P'') \geqq \dots \tag{9}$$

ist und da alle $v(P^{(\nu)}) \geqq f$ sind, existiert

$$\omega(P) = \lim_{\nu \to \infty} v(P^{(\nu)}) \tag{10}$$

und es ist

$$\omega(P) \geqq f. \tag{11}$$

Eine Permutation P, für welche $v(P) = \omega(P)$ ist, also in allen Ungleichungen (9) das Gleichheitszeichen gilt, heiße „finit". Für beliebiges P werde mit $\varepsilon(P)$ der kleinste Wert ν bezeichnet, für den $P^{(\nu)}$ finit, d. h. $v(P^{(\nu)}) = \omega(P)$ ist.

5. Es heiße P „stationär", wenn es ein $\rho \geqq 1$ gibt, so daß $P^{(\rho)} = P$ ist. Hiezu gehören die trivialen Fälle, für welche $v(P) = f$ und dann (vgl. Nr. **3**) $g = N$, $F(P) = P$, H leer ist, wo wir P als „abgeschlossen" bezeichnen, und dann die nicht-trivialen, wo P „stabil" heiße, mit $v(P) > f$. Wegen der endlichen Anzahl ($= N!$) aller überhaupt möglichen Permutationen muß für beliebiges P ein ν existieren, derart daß $P^{(\nu)}$ stationär ist. Eine genauere Untersuchung, die auf den Bau der finiten Permutationen näher eingeht, zeigt, daß jedes finite P stationär ist (das Um-

---

[1] Es gibt ein Kartenspiel (Patience), das bei entsprechender Deutung diese Umordnung realisiert, wobei günstiger bzw. ungünstiger Ausgang durch das Gleichheitszeichen bzw. Ungleichheitszeichen in (11) bestimmt wird. Vgl. l. c.[2].

[1a] Vgl. die mit der vorliegenden Note gleichbetitelte Note II, Nr. **8**, Anm. 6. [Zusatz bei der Korrektur.]

gekehrte ist selbstverständlich), daß für beliebiges P somit $P^{(\nu)}$ bereits für $\nu = \varepsilon(P)$ stationär ist. Weiters lassen sich, wenn auf den Platz eines einzelnen ausgewählten „Leit"-Elements y in den verschiedenen $P^{(\nu)}$ bzw. in den zugehörigen $F(P^{(\nu)})$ (soferne sie y enthalten) geachtet wird, Kriterien dafür aufstellen, daß P stabil ist.[2]

[2] Vgl. eine Arbeit, die im Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung erscheinen soll.