Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft II
Juli- bis Dezembersitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bemerkung zu der Note: Über die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ [1].

Von **O. Volk** in Kaunas (Litauen).

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 13. Dezember 1924.

Der Beweis der Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$, den ich unter Anwendung der Heineschen Formeln für Kugelfunktionen mit Hilfe eines Satzes von Fatou erbrachte[2]), läßt sich leicht ohne Anwendung dieses Satzes erbringen[3]).

Wenn nämlich $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(nx+a)}{\sqrt{n}}\right|$ konvergent wäre, so müßte auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx+a)}{\sqrt{n}}$ konvergent sein; nun ist:

$$\frac{\cos^2(nx+a)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{\cos 2(nx+a)}{2\sqrt{n}};$$

es müßte also, da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ divergent ist, auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx+a)}{\sqrt{n}}$ divergent sein, was aber für kein x in $0 < x < \pi$ der Fall ist. Also ist unsere Annahme ein Widerspruch und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(nx+a)}{\sqrt{n}}\right|$$

divergiert. Somit ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ divergent.

[1]) Vgl. diese Berichte, Jahrgang 1922, S. 35—38.

[2]) Aus dem Fatouschen Satze folgt die Divergenz nur für kein zusammenhängendes Intervall; der Fatousche Satz ist nicht ganz korrekt angeführt.

[3]) Darauf wurde ich fast gleichzeitig von Herrn Prof. Knopp in Königsberg und den Herren Szegö und Schur in Berlin aufmerksam gemacht.

Der Beweis läßt sich aber am einfachsten ohne die Heineschen Formeln direkt in folgender, mir von Herrn Prof. Dr. L. Fejêr in Budapest mitgeteilten Weise führen.

Wäre die Reihe für ein bestimmtes ϑ ($x = \cos\vartheta$ gesetzt) konvergent, also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\cos\vartheta)| = c,$$

so wäre, da:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\vartheta\, z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(e^{-i\vartheta}-z)(e^{i\vartheta}-z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\cdot z^n, \quad (|z|<1),$$

für $z = re^{i\vartheta}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-r}\sqrt{|1-re^{2i\vartheta}|}} < \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\cos\vartheta)|\, r^n \leqq c, \qquad (r<1),$$

also:

$$\frac{1}{\sqrt{1-r}\sqrt{|1-re^{2i\vartheta}|}} < c,$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{1-r}} < 2c,$$

was aber offenbar nicht für jedes $r<1$ stattfindet.

Es wäre also die Erzeugungsfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\vartheta\, z+z^2}}$$

für $|z| \leqq 1$ beschränkt, was aber offenbar nicht stattfindet[1]).

---

[1]) Ein ähnlicher, aber etwas komplizierter Beweis, der von der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(x) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ (wegen $|P_n(x)| \leqq 1$) ausgeht, wurde mir von Herrn Szegö mitgeteilt. Herr Szegö gibt auch den asymptotischen Wert der Summe $\sum_{n=0}^{N} |P_n(x)|$ $(-1 \leqq x < 1)$ für große Werte von N an, und zeigt, daß ist: $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{n} |P_n(x)| = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$, wenn ϑ $(x = \cos\vartheta)$ mit π inkommensurabel ist; eine ähnliche Formel gilt für die anderen x.