Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Über stabile und indifferente Ruhelagen eines homogenen Zylinders.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 2. Juli 1948.

1. In der Arbeit ,,Würfelspiel und Integralgeometrie"[1] wurden unter anderem auch 2-dimensionale ,,Wurfkörper" studiert, die sich durch lange (genau genommen unendlich lange) Zylinder realisieren lassen. Werden speziell homogene[2] konvexe 2-dimensionale Wurf-Figuren betrachtet, deren Rand in Polarkoordinaten mit dem Schwerpunkt als Pol durch $\rho = \rho(\varphi)$ gegeben sei, und wird dabei von der Funktion $\rho(\varphi)$ vorausgesetzt, daß sie in keinem φ-Intervall konstant sei und im Bereich $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ nicht unendlich viele Maxima und Minima habe, dann existieren mindestens zwei stabile Ruhelagen[3]. Der Beweis dieses Satzes stützt sich (l. c.[3], Nr. 5) auf den

Satz. Sei in Polarkoordinaten eine konvexe ebene Figur $\mathfrak{K}$ durch $\rho = \rho(\varphi)$ gegeben, wobei $\rho(\varphi)$ nur 1 Maximum und 1 Minimum habe[4], dann ist (bei homogener Flächendichte) der Schwerpunkt der Figur $\mathfrak{K}$ notwendig verschieden vom Anfangspunkt O des Polarkoordinatensystems.

---

[1] Diese SitzBer., Jahrg. 1945/46, S. 131–158. Dort ist übrigens S. 158, Zeile 7 v. u. statt ,,$\rho(\varphi)$ nicht konstant (somit $\mathfrak{K}$ kein Kreis)" zu setzen: ,,$\rho(\varphi)$ in keinem Intervall konstant".

[2] Demgegenüber wurden letzthin gewisse Fälle mit inhomogener Massenverteilung bei beliebiger Dimensionszahl $n \geqq 2$ besprochen. Siehe ,,Über die Anzahl stabiler Ruhelagen von Polyedern mit homogener und inhomogener Massenverteilung"; diese SitzBer., Mitteilung vom 4. Juni 1948.

[3] Vgl. ,,Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels", Herrn Georg Faber zum 70. Geburtstag gewidmet, ,,Elemente der Mathematik" Band III (1948) Seite 97. Verlag Birkhäuser, Basel.

[4] Wird beispielsweise die vom Pol O des Koordinatensystems ausgehende Polarachse $\varphi = 0$ so gewählt, daß sie dem Minimalwert r von $\rho(\varphi)$ entspricht: $r = \rho(0) = \rho(2\pi)$, und entspricht $\varphi = \varphi_0$ dem Maximalwert $R = \rho(\varphi_0) > r$, dann ist $\rho(\varphi)$ im ,,Anstiegs-Intervall" $0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0$ monoton nicht abnehmend, im ,,Abstiegs-Intervall $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ monoton nicht zunehmend.

Der Beweis beruht auf dem Nachweis der Existenz wenigstens eines (und, wenn $\rho(\varphi)$ keine Konstanzintervalle aufweist, genau eines) Wertes $\varphi = \varphi^*$, für den $\rho(\varphi^*) = \rho(\varphi^* + \pi)$ ist[5], sodaß $\mathfrak{K}$ durch die von den Halbgeraden $\varphi = \varphi^*$ und $\varphi = \varphi^* + \pi$ gebildete Gerade g durch O in zwei Teile zerlegt wird, in deren einem das Spiegelbild des anderen enthalten ist, sodaß der Schwerpunkt auf der den größeren Teil enthaltenden Seite von g liegen muß.

2. Mit Hilfe dieses Satzes gelangt man nun noch zu folgendem Ergebnis.

Satz. Eine zweidimensionale homogene konvexe Figur, deren Rand bezogen auf den Schwerpunkt durch $\rho = \rho(\varphi)$ gegeben ist, wobei $\rho(\varphi)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima aufweise[6], hat mindestens zwei stabile oder indifferente Ruhelagen.

Man schließt nämlich, wie l. c.[3], daß dem Satz von Nr. **1** gemäß die Funktion $\rho(\varphi)$ mehr als 1 Minimum haben muß, wobei auch Stellen φ in Intervallen, in denen $\rho(\varphi)$ konstant ist, als (uneigentliche) Maxima oder Minima mitzuzählen sind. Einem Minimum von $\rho(\varphi)$ entspricht nun ein Minimum der Stützfunktion $h(\varphi)$, einem solchen aber eine stabile oder eine indifferente Ruhelage; und zwar eine stabile, falls ein eigentliches Minimum $h(\psi)$ mit $h(\varphi) > h(\psi)$ für $0 < |\varphi - \psi| < \delta$ vorliegt; hingegen eine indifferente bei einem uneigentlichen Minimum, wenn nur $h(\varphi) \geqq h(\psi)$ gilt[7]. Im letzteren Fall mit Konstanz-Intervallen von $\rho(\varphi)$ hat man zugleich mit einer indifferenten Ruhelage ihrer unendlich viele.

---

[5] Dieser Nachweis stützt sich auf die Betrachtung korrespondierender Richtungen φ_1, φ_2 mit $\rho(\varphi_1) = \rho(\varphi_2)$, dabei φ_1 im Anstiegs- und φ_2 im Abstiegs-Intervall, wobei $f(\rho) = \varphi_1 + (2\pi - \varphi_2)$ von $f(r) = 0$ stetig und monoton zu $f(R) = \varphi_0 + (2\pi - \varphi_0) = 2\pi$ ansteigt, für ein geeignetes $\rho = r^*$ somit $f(r^*) = \pi$ und $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ sein muß.

[6] Inwieweit diese, beim Beweis unserer Sätze herangezogene, einschränkende Voraussetzung durch eine weniger einschränkende ersetzt oder völlig entbehrt werden kann, soll hier nicht weiter untersucht werden.

[7] Wird das Auftreten von Intervallen, in denen $\rho(\varphi)$ konstant ist, und damit das Auftreten uneigentlicher Minima von $\rho(\varphi)$ und $h(\varphi)$ ausgeschlossen, dann kommt das Auftreten indifferenter Ruhelagen in Wegfall und man gelangt zu dem l. c.[3] aufgestellten, in Nr. **1** angeführten Ergebnis.

Als ein Beispiel mit nur indifferenten Ruhelagen mag die Figur erwähnt werden, die man aus dem Kreis $x^2 + y^2 \leqq 1$ durch Hinzunahme aller außerhalb dieses Kreises liegenden Punkte eines jeden der beiden Dreiecke $A_1 B A_4$, $A_2 C A_3$ erhält, wenn die Punkte B, C durch $(x = \pm 1 : \cos\alpha,\ y = 0)$ gegeben sind, und die Punkte $A_\nu = (\cos\alpha_\nu,\ \sin\alpha_\nu)$ durch $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi - \alpha$, $\alpha_3 = \pi + \alpha$, $\alpha_4 = 2\pi - \alpha$ $\left(\text{wo } 0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Im besonderen liefert $\alpha = 0$ die Kreisscheibe.

Nachtrag bei der Korrektur. In der Einleitung zu der Note l. c.[3] ist erwähnt, daß nicht in allen Sprachen, so wie im Deutschen, ein und dasselbe Wort ("Würfel") sowohl eine geometrische Gestalt bedeutet, als einen Gegenstand, mit dem man würfelt (z. B. Französisch: "cube" – jeu de "dés"; Englisch: "cube" – game of "dice"). Hierbei ist nun ein etymologischer Parallelismus von Interesse, auf den mich Herr Kollege Carathéodory aufmerksam gemacht hat: Das dem Lateinischen und Griechischen gemeinsame "cubus" – "κύβος" bedeutete ursprünglich verschiedene Knochen (so auch "cubitus" – "κύβιτον" = Ellenbogen). Im Griechischen waren dann κύβοι Wirbel, mit denen man würfelte: κυβεύω = ich spiele Würfel; διακυβεύω = ich riskiere.