BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Vertauschbarkeit von Basis und Exponenten und iterierte Potenzen

Dem Andenken an Robert Sauer (1898–1970) gewidmet

Von Josef Lense in München

Vorgelegt am 23. Oktober 1970

Mit 17 Abbildungen

I

Die Beziehung $2^4 = 4^2 = 16$ regt die Frage an: Wann ist $a^b = b^a$ oder $b \ln a = a \ln b$ bzw. $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$? Zur Beantwortung betrachten wir die Kurve $y = \frac{\ln x}{x}$. Die erste Ableitung liefert $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, die zweite $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$. Die Kurve (Bild 1) schneidet die X-Achse bei $x = 1$, hat ein Maximum bei $x = e = 2{,}72$, $y = e^{-1} = 0{,}368$, einen Wendepunkt bei $x = e^{3/2} = 4{,}47$, $y = \frac{3}{2} e^{-3/2} = 0{,}325$ und die negative Y-Achse und positive X-Achse zu Asymptoten. Jede Parallele $y = c (0 < c < e^{-1})$ zur X-Achse schneidet die Kurve in genau zwei Punkten $x = a$ und $x = b$, für die $y = \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ ist. Diese reellen Zahlen a und b sind einander umkehrbar eindeutig zugeordnet. Wenn a von e bis 1 wandert, durchläuft b von e an wachsend die positive X-Achse. Für genügend großes b wird $c = \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}$ beliebig klein, daher auch $\varepsilon = a - 1$, weil die Kurve die X-Achse unter $45°$ schneidet und demnach bis auf Glieder höherer Ordnung $\varepsilon = c$ ist.

Aus diesen Betrachtungen erhält man für die durch die Gleichung $x^y = y^x$ oder $y \ln x = x \ln y$ als Funktion von x definierte Funktion $y = f(x)$ folgende Eigenschaften: Die betreffende Kurve (Bild 2) ist spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$ (diese, die ja auch der Definitionsgleichung genügt, schließen wir natürlich von der Betrachtung aus) und hat die Geraden $x = 1$ und $y = 1$ zu Asymptoten. Die Steigung im Punkt $x = y = e$ ist wegen der genannten Symmetrie -1. Als Ableitung ergibt sich durch Differenzieren der Definitionsgleichung

$$f'(x) = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}.$$

Die Klammerausdrücke in Zähler und Nenner werden nur für $x = y = e$ null. Denn man hat $x \ln y - y = y \ln x - y$ und ebenso $y \ln x - x = x \ln y - x$. Um $\lim\limits_{x \to e} f'(x)$ zu berechnen, setzt man $x = e(1 + \xi)$, daher ist wegen der Symmetrie $y = e(1 - \xi)$ bis auf erste Potenzen von ξ und man erhält $\lim\limits_{x \to e} f'(x) = -1 = f'(e)$. Die erste Ableitung $f'(x)$ ist also stetig und immer negativ.

Wir wollen jetzt noch die Potenzen selbst betrachten, also die durch $F(x) = x^y = y^x$ dargestellte Kurve, wobei y die durch die vorhergehenden Untersuchungen definierte Funktion $f(x)$ ist. Aus diesen ergibt sich: Die neue Kurve (Bild 3) $y = F(x) = e^{f(x) \ln x}$ hat die Gerade $y = 1$ zur Asymptote und ein Minimum bei $x = e$ wegen

$$F'(x) = e^{f(x) \ln x} \left[f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} \right].$$

Diese Ableitung ist stetig und für $x \neq e$ niemals null. Zum Beweis setzen wir $f'(x)$ gemäß den vorigen Betrachtungen ein und erhalten

$$F'(x) = e^{f(x) \ln x} \varphi(x) \text{ mit } \varphi(x) = \frac{f(x)}{x} \left[\frac{x \ln f(x) - f(x)}{f(x) \ln x - x} \ln x + 1 \right] =$$
$$= f(x) \frac{\ln f(x) \ln x - 1}{f(x) \ln x - x}.$$

Der Nenner verschwindet, wie wir wissen, für $x \neq e$ nicht, also haben wir nur den Zähler zu untersuchen, d. h. zu fragen, wann $\ln f(x) \ln x = 1$ für $x \neq e$ ist. Wir ersetzen $\ln f(x)$ gemäß der Definitionsgleichung für $f(x)$ durch $\frac{1}{x} f(x) \ln x$, woraus sich $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$, also $\ln f(x) = \ln x - 2 \ln(\ln x)$, somit schließlich $(\ln x)^2 - 2 \ln(\ln x) - 1 = 0$ ergibt. Bezeichnen wir daher die linke Seite dieser Gleichung mit $\chi(x)$, so ist nachzuweisen $\chi(x) \neq 0$ für $x \neq e$. Es ist

$$\chi'(x) = \frac{2\,\psi(x)}{x} \text{ mit } \psi(x) = \ln x - \ln(\ln x) - 1.$$

Führen wir $z = \ln x$ ein, so wird $y = \psi(e^z) = z - 1 - \ln z$ (Bild 4). Nun ist $z - 1 > \ln z$ für alle $z > 0$ mit Ausnahme von $z = 1$, d. h. $\psi(x) > 0$ für alle $x > 1$, ausgenommen $x = e$. Demnach wächst $\chi(x)$ fortwährend mit $x > 1$, ist also nur gleich Null für $x = e$.

Wir berechnen jetzt $\lim\limits_{x \to +\infty} F'(x)$. Nach den früheren Untersuchungen ist $f(x) = 1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon = \dfrac{\ln x}{x}$ bis auf Glieder höherer Ordnung für alle genügend großen x, somit ebenso

$$\varphi(x) = \frac{1+\varepsilon}{x}\,\frac{\varepsilon \ln x - 1}{(1+\varepsilon)\,\varepsilon - 1} \text{ und } F'(x) = e^{(1+\varepsilon)\ln x}\,\varphi(x) =$$
$$= x e^{\varepsilon \ln x}\,\varphi(x) \to 1 \text{ für } x \to +\infty.$$

Für die Ordinatendifferenz der Kurve $y = F(x)$ und der Winkelhalbierenden $y = x$ ergibt sich auf dieselbe Weise $x^{1+\varepsilon} - x = x(e^{\varepsilon \ln x} - 1) = x(\varepsilon \ln x + \ldots) = (\ln x)^2 +$ Glieder niedrigerer Ordnung durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, die Winkelhalbierende ist also keine Asymptote der Kurve (Bild 3).

Wir geben noch einige Zahlenwerte an:

a	$= 1$	1,1	1,5	1,88	2	2,5	2,72
b	$= \infty$	43,9	7,39	4,47	4	3,00	2,72
$a^b = b^a$	$= \infty$	65,0	20,0	16,6	16	15,6	15,2.

Die Zahlen mit höchstens zwei Ziffern sind exakt, bei solchen mit drei Ziffern ist die letzte Ziffer unsicher, weil diese Zahlen nur mit dem Rechenstab berechnet sind.

II

Man kann sich folgende Frage stellen: Was ergibt sich, wenn man eine positive reelle Zahl a fortwährend mit sich selbst potenziert? Genauer ausgedrückt: es sei $a^{(n)x} = a^{a^{(n-1)x}}$ mit $a^{(1)x} = a^x$, man untersuche $a^{(n)x}$, insbesondere auch für $n \to \infty$ und $x = 1$. Aus dem bekannten Verlauf der Kurven $y = a^x$ für verschiedene Werte von a und der Tatsache, daß sie sich stetig aneinander schließen, wenn a alle positiven reellen Zahlen durchläuft, erkennt man folgendes: Für $a < 1$ wird die Kurve (Bild 5) von der Winkelhalbierenden $y = x$ genau in einem Punkt P_0 geschnitten, der sich vom Nullpunkt bis zum Punkt $(1,1)$ bewegt, wenn a stetig von 0 bis 1 wächst. Gleichzeitig wächst die Steigung y' der Kurve in diesem Schnittpunkt von $-\infty$ bis 0. Sie hat daher genau einmal den Wert -1. Der zugehörige Wert von a und die Koordinaten $x_0 = y_0$ des Punktes P_0 ergeben sich aus den Gleichungen: $x = a^x$, $x \ln a = \ln x$, $-1 = a^x \ln a = x \ln a = \ln x$ zu $x_0 = e^{-1}$, $a = e^{-e} = 0{,}0658$. In diesem Fall (Bild 6) wird die Winkelhalbierende von der Kurve rechtwinkelig geschnitten. Für $a > 1$ sind zunächst (Bild 7) zwei Schnittpunkte P_1 und P_2 mit den Abszissen $1 < x_1 < x_2$ vorhanden, die bei weiterem Wachstum von a zusammenrücken, d. h. die Kurve (Bild 8) berührt dann die Winkelhalbierende. Die Steigung in P_1 wächst gleichzeitig von 0 bis 1, die in P_2 nimmt von $+\infty$ bis 1 ab. Für $P_1 = P_2$ ergeben sich aus den obigen Gleichungen die Koordinaten (e,e), für $a = e^{e^{-1}} = 1{,}44$. Übersteigt a diesen Wert, dann hat die Kurve (Bild 9) mit der Winkelhalbierenden keine Schnittpunkte mehr.

Wir spiegeln nun die Kurve an der Winkelhalbierenden, d. h. wir betrachten neben ihr eine zweite Kurve $x = a^y$. Sie schneidet natürlich die Winkelhalbierende und daher auch die erste Kurve in denselben Punkten, für die Steigungen gelten die reziproken Werte. Weil für $a < e^{-e}$ die Steigung der ersten Kurve in P_0 einen Wert < -1 hat, die zweite dagegen einen solchen > -1, und die erste für $x \to 0$ in den Punkt $(0,1)$, die zweite aber nach $+\infty$ strebt, müssen sich die beiden Kurven noch in einem Punkt $P_3(x_3, y_3)$ schneiden, wobei $0 < x_3 < x_0$ und $x_0 = y_0 < y_3 < 1 - x_3$ ist, und wegen ihrer spiegelbildlichen Lage ebenso in einem Punkt $P_4(x_4, y_4)$ mit $y_3 = x_4$, $y_4 = x_3$ (Bild 10).

Daß keine weiteren Schnittpunkte vorhanden sind, sieht man folgendermaßen ein: Wir bilden die Ordinatendifferenz der beiden Kurven $f(x) = a^x - \frac{\ln x}{\ln a}$, demnach $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a} = \frac{\ln a}{x}\left[\varphi(x) - \frac{1}{(\ln a)^2}\right]$, wenn wir $\varphi(x) = x a^x$ setzen. $\varphi'(x) = a^x(1 + x \ln a)$ wird nur Null für $x = \bar{x} = -\frac{1}{\ln a}$. Somit ist $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, $\varphi(\bar{x}) = -\frac{1}{\ln a} e^{\bar{x} \ln a} = -\frac{1}{e \ln a} > \frac{1}{(\ln a)^2}$ wegen $\ln a < -e$, $\varphi(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, also $\varphi(x) > 0$ für

$x > 0$, demnach hat die Kurve $y = \varphi(x)$ (Bild 11) ein Maximum bei $x = \bar{x}$ und wird daher von der Geraden $y = \frac{1}{(\ln a)^2}$ in genau zwei Punkten mit den Abszissen $\bar{x}_1 < \bar{x}$ und $\bar{x}_2 > \bar{x}$ geschnitten, sonach hat $f(x)$ genau drei Nullstellen mit $0 < x_3 < x_0 < x_4 < 1$. Für $a \to 0$ hat man $x_3 \to 0$, $x_0 \to 0$, $x_4 \to 1$, für $a = e^{-e}$ wird $x_3 = x_0 = x_4 = \bar{x}_1 = \bar{x} = \bar{x}_2 = e^{-1}$. Ist $e^{-e} < a < 1$, dann sind die Schnittpunkte mit den Abszissen $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ nicht mehr vorhanden, $f'(x)$ hat keine Nullstellen mehr, $f(x)$ nur eine, die beiden Kurven schneiden sich nur auf der Winkelhalbierenden. Für $a = 1$ gehen sie in die Geraden $y = 1$ und $x = 1$ über.

III

Wir wenden uns jetzt zu den iterierten Kurven $y = a^{(n)x}$. Es ist $y' = \prod\limits_{\nu=1}^{n} a^{(\nu)x} (\ln a)^n$. Für $a < 1$ ist $\ln a < 0$, also $(\ln a)^n > 0$ bzw. < 0, je nachdem n gerade bzw. ungerade ist. Wenn demnach x wachsend alle reellen Zahlen durchläuft, wachsen die Kurven fortwährend für gerades n, dagegen nehmen sie fortwährend ab für ungerades n. Wegen $a < 1$ hat man $y = a^{(n-3)}$ für $x \to -\infty$, $y = a^{(n-1)}$ für $x = 0$, $y = a^{(n)}$ für $x = 1$, $y = a^{(n-2)}$ für $x \to +\infty$, also $a^{(-1)} < a^{(1)} < a^{(3)} < a^{(5)} < \ldots < a^{(4)} < a^{(2)} < a^{(0)} < a^{(-2)}$. Dabei bedeutet $a^{(-2)} = +\infty$, $a^{(-1)} = 0$, $a^{(0)} = 1$. Wir gehen nun von einem Punkt P der X-Achse aus, bestimmen das zugehörige y aus der Gleichung $y = a^x$, mit diesem y das zugehörige x aus der Gleichung $x = a^y$, mit diesem x das zugehörige y der ersten Kurve, mit diesem y das zugehörige x der zweiten Kurve usw. Es sei $a < e^{-e}$. Dann erhalten wir für jedes $x < x_3$, wie sich aus der Gestalt der beiden Kurven ergibt (Bild 10), $a^{(n)x} \to x_3$ wachsend, wenn n alle positiven geraden Zahlen, dagegen abnehmend $\to y_3 = x_4$, wenn n alle positiven ungeraden Zahlen durchläuft. Ist $x_3 < x < x_0$, so erfolgt die erste Annäherung abnehmend, die zweite wachsend. Für $x_0 < x < x_4$ erhalten wir $a^{(n)x} \to x_4$ wachsend für die geraden n, $\to y_4 = x_3$ abnehmend für die ungeraden n. Ist $x_4 < x < 1$, so hat man wachsend mit abnehmend zu vertauschen. Schließlich ist $a^{(n)x} = x_3$ für $x = x_3$ und $= x_4$ für $x = x_4$ für alle positiven geraden n, dagegen $= y_3 = x_4$ für $x = x_3$ und $= y_4 = x_3$

für $x = x_4$ für alle positiven ungeraden n. Für die gemeinsamen Schnittpunkte P_0, P_1, P_2 der beiden Kurven mit der Winkelhalbierenden ergibt sich $a^{(n)x} = x_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2$) für alle $a > 0$ und alle natürlichen Zahlen n.

Setzen wir also $x = 1$, so sehen wir, daß die Folge $a^{(2k-1)}$ wachsend gegen x_3, die Folge $a^{(2k)}$ abnehmend gegen x_4 konvergiert, also tatsächlich $x_4 \to 1$ für $a \to 0$ wegen $a^{(2k)} \to 1$. Weil jede der beiden Kurven bei wachsendem x fortwährend abnimmt, hat man $a^{x_4} > a^1$, also $x_3 > a$. Ist $e^{-e} \leqq a < 1$, (Bild 5 und 6), dann fallen die beiden Punkte P_3 und P_4 im Punkte P_0 zusammen, es ist $a^{(n)x} \to x_0$ wachsend für $x < x_0$ und gerade n, abnehmend für ungerade, dagegen für $x > x_0$ abnehmend für gerade, wachsend für ungerade, und $a^{(n)} \to x_0$ für $n \to \infty$, $a < x_0$.

Für $a > 1$ ist die Ableitung der iterierten Kurven stets positiv, die Kurven wachsen fortwährend. Ferner ist $y = a^{(n-2)}$ für $x \to -\infty$, $y = a^{(n-1)}$ für $x = 0$, $y = a^{(n)}$ für $x = 1$, $y \to +\infty$ für $x \to +\infty$, also immer $a^{(n-1)} < a^{(n)}$. Nun sei $1 < a < e^{e^{-1}}$. Gehen wir wie vorher von einem Punkt P der X-Achse aus, so erhalten wir nach derselben Überlegung (Bild 7) $a^{(n)x} \to x_1$ wachsend für $x < x_1$ und $n \to \infty$, dagegen abnehmend für $x_1 < x < x_2$. Ist $x > x_2$, so ergibt sich wachsend $a^{(n)x} \to +\infty$. Somit streben die $a^{(n)}$ wachsend gegen x_1, indem wir $x = 1$ setzen. Wegen $a^1 < a^{x_1}$ ist $a < x_1$. Für $x_1 = x_2$ ($P_1 = P_2$) fällt der Zwischenbereich aus (Bild 8). Ist $a > e^{e^{-1}}$ (Bild 9), so erhalten wir für jedes x nach denselben Schlüssen wachsend $a^{(n)x} \to +\infty$ für $n \to \infty$, also auch wachsend $a^{(n)} \to +\infty$.

Für die Steigung der Kurven auf der Winkelhalbierenden erhält man $y' = x^n (\ln a)^n = (\ln x)^n$ wegen $x = a^{(n)x}$. Berücksichtigen wir nun alle bisher gewonnenen Erkenntnisse, so ergibt sich folgender Verlauf der iterierten Kurven: Für $a < 1$ sind die Kurven mit wachsendem geraden n und $x < x_3$ oberhalb der Winkelhalbierenden von unten nach oben angeordnet, die mit wachsendem ungeraden n darüber von oben nach unten, aber unterhalb der Geraden $y = 1-x$ für $n > 1$. Solange $a < e^{-e}$ ist, gehen erstere durch die Punkte P_3', P_0, P_4' der Winkelhalbierenden mit den Abszissen x_3, x_0, x_4 (Bild 14), wobei nach jedem Durchgang die Anordnung umgekehrt wird, letztere durch die Punkte P_3, P_0, P_4, ebenfalls mit jedesmaliger Umkehrung der Anordnung, wobei sie nach dem Durchgang durch P_0 unterhalb der Kurven mit geradem n liegen. Die Steigung dieser Kurven in P_0 wächst mit wachsenden n gegen $+\infty$, weil $\ln x_0 < -1$ ist, die der Kurven mit ungeraden n nimmt dabei bis $-\infty$ ab. Für $e^{-e} \leqq a < 1$ fallen alle genannten Schnittpunkte in P_0 zusammen. $a = e^{-e}$ liefert in P_0 (Bild 6) wegen $\ln x_0 = -1$ die Steigung ± 1, je nachdem n gerade bzw. ungerade ist. Für $e^{-e} < a < 1$ (Bild 15) ist $-1 < \ln x_0 < 0$, die Steigung strebt wachsend bzw. abnehmend gegen Null mit wachsendem ungeraden bzw. geraden n. Für $a > 1$ sind die Kurven mit wachsenden n und $x < x_1$ von unten nach oben angeordnet. Solange $1 < a < e^{e^{-1}}$ ist (Bild 16), gehen sie durch die Punkte P_1 und P_2, wobei sich wieder nach jedem Durchgang die Anordnung umkehrt. Wegen $0 < \ln x_1 < 1$, $\ln x_2 > 1$ nimmt die Steigung in P_1 mit wachsendem n bis Null ab, dagegen in P_2 bis $+\infty$ zu. Für $a = e^{e^{-1}}$ fallen die Punkte P_1 und P_2 zusammen (Bild 8), die Kurven berühren dort die Winkelhalbierende ohne Änderung der Anordnung, $\ln x_1 = \ln x_2 = 1$. Wird $a > e^{e^{-1}}$ (Bild 9), dann treffen die Kurven die Winkelhalbierende nicht mehr, sondern streben wachsend ins Unendliche. Die Grenzlage der iterierten Kurven für $n \to \infty$ besteht demnach für $a = 0$ aus der negativen X-Achse und der Geraden $y = 1$ mit $x > 0$, wenn n gerade ist. Die beiden Halbgeraden vertauschen sich für ungerade n. Wächst a, so steigt die untere Gerade parallel zur X-Achse bis zum Abstand x_3, die obere sinkt bis zum Abstand x_4, der Sprung findet bei x_0 statt. Im Bild 10 sind die Halbgeraden für ungerade n ausgezogen, für gerade gestrichelt. Erreicht a den Wert e^{-e}, dann fallen beide Geraden zusammen in eine Gerade im Abstand x_0. Diese steigt dann bis zum Abstand 1, wenn $a = 1$ wird. Bei weiterem Wachsen von a steigt die Gerade bis zum Abstand x_1, verliert aber das Stück rechts von x_2, das ins Unendliche rückt. Übersteigt schließlich a den Wert $e^{e^{-1}}$, so verschwindet die ganze Gerade ins Unendliche.

Wir berechnen noch die zweite Ableitung bei den iterierten Kurven

$$y'' = (\ln a)^{n+1} \prod_{\nu=1}^{n} a^{(\nu)x} \sum_{\nu=0}^{n-1} \prod_{\mu=0}^{\nu} a^{(\mu)x} (\ln a)^{\mu},$$

wobei $a^{(o)x} = 1$ bedeuten soll, also ist auf der Winkelhalbierenden wie vorher

$$y'' = \ln a\,(\ln x)^n \sum_{\nu=0}^{n-1} (\ln x)^\nu.$$

Für $a > 1$ ist $x > 1$, daher dort $y'' > 0$, die Kurven liegen in P_0 konvex zur X-Achse. Für $a < 1$ ist $0 < x < 1$; $y'' = 0$ und $x = a^x$ oder gleich bedeutend damit $\frac{\ln x}{x} = \ln a$ sind im allgemeinen nicht gleichzeitig erfüllt, daher liegt dann auch kein Wendepunkt im Punkt P_0. Für $a = e^{-e}$ ist $x = e^{-1}$, somit $y'' = 0$ bei geraden n, $y'' = e$ bei ungeraden, d. h. die Kurven mit geraden n berühren die Winkelhalbierende in ihrem Wendepunkt, die Kurven mit ungeraden n liegen in ihrem Schnittpunkt konvex zur X-Achse, der Wendepunkt liegt links davon.

IV

Wir wollen noch die funktionelle Abhängigkeit zwischen der Basis a und dem Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a^{(n)} = a_\infty$ genauer untersuchen. a_∞ genügt der Gleichung $x = a^x$, die auch die Schnittpunkte der Kurve $y = a^x$ mit der Winkelhalbierenden liefert. Es ist also $a = x^{x^{-1}}$, wir haben demnach die Kurve $y = f(x) = e^{\varphi(x)}$ mit $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ zu betrachten. Mit Hilfe der am Beginn von Abschnitt I erhaltenen Ergebnisse über die Kurve $y = \varphi(x)$ wird

$$f'(x) = f(x)\,\varphi'(x) = \frac{f(x)}{x^2}(1 - \ln x),$$

$$f''(x) = f(x)\{[\varphi'(x)]^2 + \varphi''(x)\} = \frac{f(x)}{x^4}[(\ln x - 1)^2 - x(3 - 2\ln x)].$$

Die Kurve $y = f(x)$ (Bild 12) beginnt im Nullpunkt mit der Steigung Null, geht fortwährend wachsend durch den Punkt A (e^{-1}, e^{-e}), liegt dauernd unterhalb der Winkelhalbierenden, die sie nur im Punkt $C(1, 1)$ berührt, erreicht im Punkt $D(e, e^{e^{-1}})$ ihr Maximum und nähert sich dann fortwährend abnehmend asymptotisch der Geraden $y = 1$. Sie hat zwei Wendepunkte B und E, deren Abszissen in den Intervallen $(e^{-1}, 1)$ bzw. $(e, e^{3/2})$ liegen.

Die Behauptung über die Wendepunkte erkennt man folgendermaßen: Es sei $\chi(x) = (\ln x - 1)^2$, $\psi(x) = x(3 - 2\ln x)$, also

$$\chi'(x) = \frac{2}{x}(\ln x - 1), \quad \psi'(x) = 1 - 2\ln x.$$

Die Kurven $y = \chi(x)$ und $y = \psi(x)$ nennen wir C_1 und C_2. Die Abszissen der Wendepunkte erhält man aus den Schnittpunkten dieser beiden Kurven (Bild 13). C_1 hat die positive Y-Achse zur Asymptote, geht fortwährend abnehmend durch die Punkte $A(e^{-1}, 4)$, $B(1, 1)$, $C\left(e^{1/2}, \frac{1}{4}\right)$, berührt die X-Achse im Punkt $D(e, 0)$ und geht dann fortwährend wachsend durch den Punkt $E\left(e^{3/2}, \frac{1}{4}\right)$ in der oberen Halbebene ins Unendliche. C_2 beginnt im Nullpunkt mit der Steigung $+\infty$, geht fortwährend wachsend durch die Punkte $A'(e^{-1}, 5\,e^{-1} < 4)$, $B'(1, 3)$, erreicht im Punkte $C'(e^{1/2}, 2\,e^{1/2} > e)$ ihr Maximum und geht dann fortwährend abnehmend durch die Punkte $D'(e, e)$, $E'(e^{3/2}, 0)$ in der unteren Halbebene ins Unendliche. Die beiden Kurven haben sonach genau zwei Schnittpunkte F und G, deren Abszissen in den oben genannten Intervallen liegen und die Abszissen der gesuchten Wendepunkte sind. Man erhält für sie die Koordinaten roh gerechnet $B: x = 0{,}60$, $y = 0{,}42$, $E: x = 4{,}37$, $y = 1{,}40$. Für $\chi(x) \gtrless \psi(x)$ ist die Kurve $y = f(x)$ konvex bzw. konkav zur X-Achse. Diese Kurve liefert für $y = a$ die Schnittpunkte der Kurve $y = a^x$ mit der Winkelhalbierenden, also genau einen für $0 \leqq a \leqq 1$ und $a = e^{e^{-1}}$, genau zwei für $1 < a < e^{e^{-1}}$. Die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen a und a_∞ erhält man aus dem Kurvenstück C_0 von A bis D.

Bild 12 liefert uns auch den Verlauf iterierter Kurven K_n $(n > 0)$ von der Gestalt $x = y^{(n)}$, wobei auch hier die Klammer im Exponenten dieselbe Bedeutung hat wie bei $a^{(n)}$. Wir verbinden zu diesem Zweck (Bild 17) den Punkt A mit dem Nullpunkt durch ein fortwährend abnehmendes Kurvenstück C_3, das den funktionellen Zusammenhang zwischen a und der Koordinate x_3 des Punktes P_3 aus Abschnitt II (Bild 10) darstellt, und dann ebenso Punkt A mit dem Punkt $(1, 0)$ durch ein fortwährend abnehmendes Kurvenstück C_4, das den funktionellen Zusammenhang zwischen a und der Koordinate y_3 des Punktes P_3 liefert. C_3 liegt oberhalb des Stückes OA der Kurve $y = f(x)$. Ferner verlängern wir das Kurvenstück C_0 vom Punkt D nach rechts durch eine parallel zur X-Achse ins Unendliche laufende Gerade g. Die aus C_3, C_0, g bestehende Linie nennen wir K', die aus C_4, C_0, g zusammengesetzte sei mit K'' bezeichnet.

Aus den Eigenschaften der Zahlen $a^{(n)}$ ergeben sich nun folgende Tatsachen. Die iterierten Kurven K_n (Bild 17) mit ungeraden n beginnen im Nullpunkt und gehen, mit wachsendem n von oben nach unten angeordnet, unterhalb der Winkelhalbierenden und oberhalb K' durch den Punkt C ins Unendliche. K' ist ihre Grenzkurve für $n \to \infty$. Die Kurven K_n mit geraden n beginnen im Punkt $Q(1, 0)$ der X-Achse und gehen links von der Strecke QC und rechts von K'' nach C: sie sind dabei mit wachsendem n von rechts nach links angeordnet. Nach dem Durchgang durch den Punkt C verhalten sie sich wie die Kurven mit ungeraden n. Ihre Grenzkurve ist K''. Der Unterschied zwischen geraden und ungeraden n findet also bei allen Kurven K_n nur vor dem Durchgang durch den Punkt C statt. Sie berühren dort die Kurve C_0 und die Winkelhalbierende, weil sie zwischen beiden Linien liegen.

Wir bestimmen jetzt die Ableitung von y^y im Punkt Q. Man hat

$$\frac{y^y - 1}{y} = \frac{e^{y \ln y} - 1}{y} = \ln y + \ldots \to -\infty$$

für $y \to 0$, d. h. die Kurve K_2 berührt im Punkt Q die X-Achse. Dasselbe gilt für alle Kurven K_n mit geradem n und die Kurve C_4, weil sie in Q unterhalb K_2 und oberhalb C_4 liegen. Nun berechnen wir die Ableitung von y^{y^y} im Nullpunkt. Nach dem Vorhergehenden ergibt sich

$$\frac{1}{y} y^{y^y} = \frac{1}{y} y^{1-\varepsilon} \text{ mit } \frac{\varepsilon}{y} = -\ln y + \ldots,$$

also $$y^{-\varepsilon} = y^{y \ln y + \ldots} = e^{y (\ln y)^2 + \ldots} \to 1$$

für $y \to 0$, demnach $y^{y^y} = y + \ldots$ für alle genügend kleinen y, somit auch $y^{(n)} = y + \ldots$ für alle ungeraden n und die Grenzkurve C_3, die Kurven K_n mit ungeraden n und C_3 berühren daher im Nullpunkt die Winkelhalbierende.

Die Kurve $y = a^{(2)x}$ schneidet die Winkelhalbierende $y = x$ in den Punkten P'_3, P_0, P'_4 (Bild 14), die Abszissen dieser Punkte $x_3, x_0, x_4 = y_3$ genügen sonach der Gleichung $x = a^{(2)x}$ oder $\ln x = a^x \ln a$. Wir berechnen $\frac{da}{dx}$ im Punkt A, setzen also $x = \frac{1}{e} + \xi$,

$a = e^{-e} + \eta$ und entwickeln bis auf Glieder zweiter Ordnung in ξ und η. Es ergibt sich

$$\ln x = -1 + e\xi - \frac{1}{2} e^2 \xi^2, \ln a = -e + e^e \eta - \frac{1}{2} e^{2e} \eta^2,$$

$$x \ln a = -1 - e\xi + e^{e-1} \eta + e^e \xi \eta - \frac{1}{2} e^{2e-1} \eta^2,$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \frac{1}{e}\left[1 - e\xi + e^{e-1} \eta + \frac{1}{2} e^2 \xi^2 + \frac{1}{2} e^{2e-2} (1 - e) \eta^2\right],$$

$$e^{x \ln a} \ln a = -1 + e\xi - \frac{1}{2} e^2 \xi^2 - e^e \xi \eta + \frac{1}{2} e^{2e-2} \eta^2,$$

somit $\eta \left(e^e \xi - \frac{1}{2} e^{2e-2} \eta\right) = 0$ oder $\eta = 0$ und $\eta = 2e^{2-e}\xi$. Der zweite Wert von η liefert die Steigung $2e^{2-e} = 0{,}975$. Das ist die Steigung der Kurve C_0 im Punkt A, wie sich aus der betreffenden Formel am Beginn dieses Abschnittes ergibt, entsprechend der Tatsache, daß durch den Punkt P_0 auf der Winkelhalbierenden mit der Abszisse x_0 auch die Kurve $y = a^x$ hindurchgeht. Der erste Wert $\eta = 0$ liefert demnach die Steigung Null der aus C_3 und C_4 bestehenden Kurve im Punkt A, wieder im Einklang mit der Tatsache, daß durch die Punkte P'_3 und P'_4 auf der Winkelhalbierenden mit den Abszissen x_3 und $x_4 = y_3$ wohl die Kurve $y = a^{(2)x}$, aber nicht die Kurve $y = a^x$ hindurchgeht.

Um dem Leser die Einsicht in den Verlauf der im Abschnitt III und IV behandelten iterierten Kurven zu erleichtern, sind die Bilder 14–17 beigefügt. Während die vorhergehenden Bilder 1–13 zahlenmäßig möglichst genau entworfen sind, wurden in den folgenden Bildern 14–17 darauf verzichtet, um die Anordnung und den Verlauf der Kurven möglichst deutlich sichtbar zu machen. Sie sind also sozusagen nur topologisch richtig. Kurven mit geraden n sind gestrichelt, solche mit ungeraden ausgezogen. In Bild 16 fällt dieser Unterschied weg. Bild 14 entspricht dem Fall $0 < a < e^{-e}$. Bild 15 dem Fall $e^{-e} < a < 1$, Bild 16 dem Fall $1 < a < e^{e^{-1}}$. Bild 17 zeigt die Kurven K_n und ihre Grenzkurve.

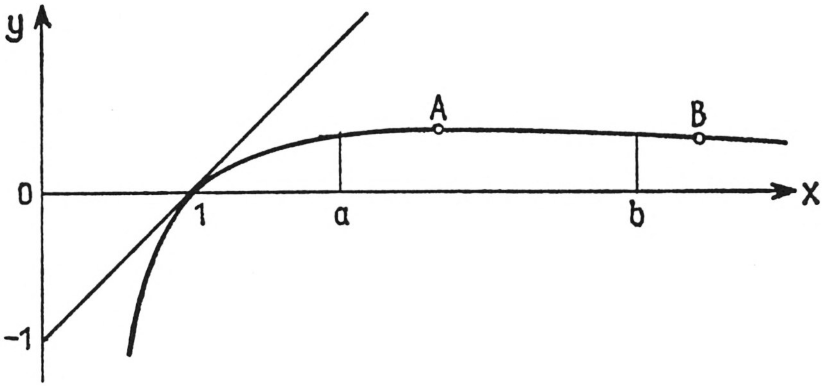

Bild 1

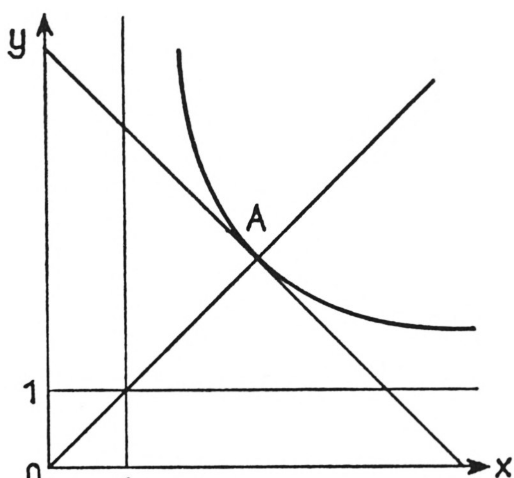

Bild 2

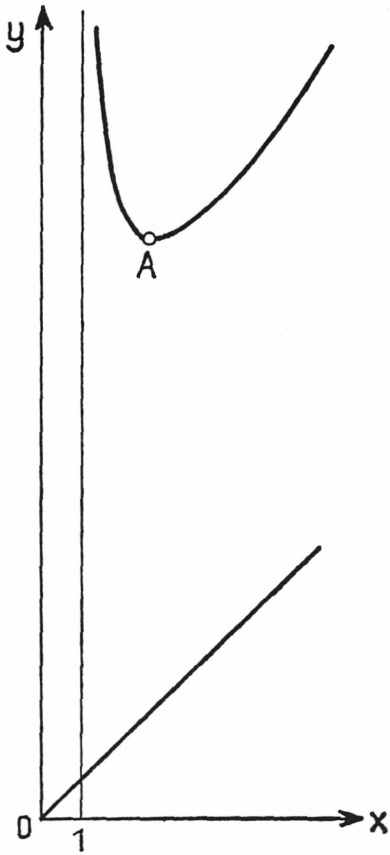

Bild 3

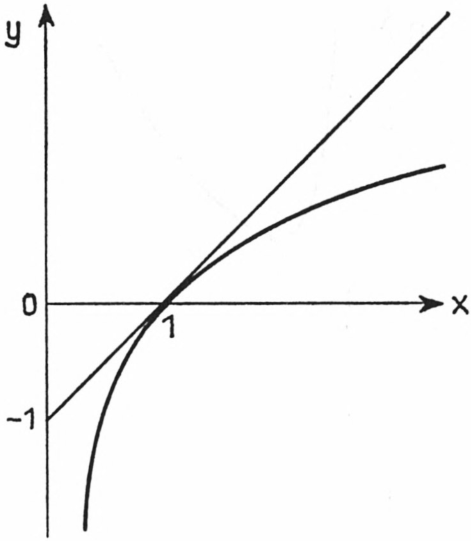

Bild 4

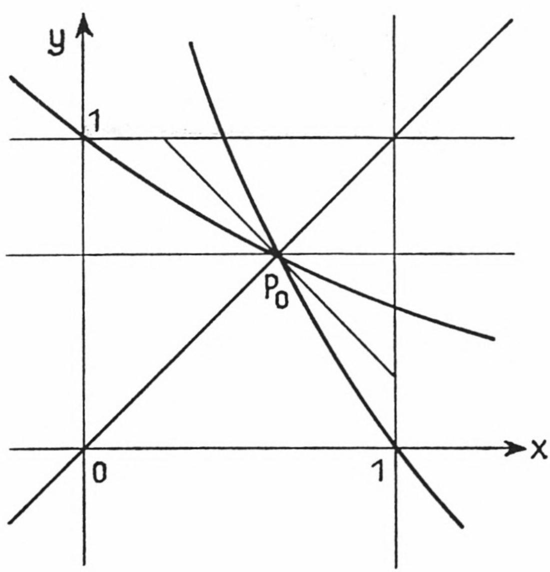

Bild 5

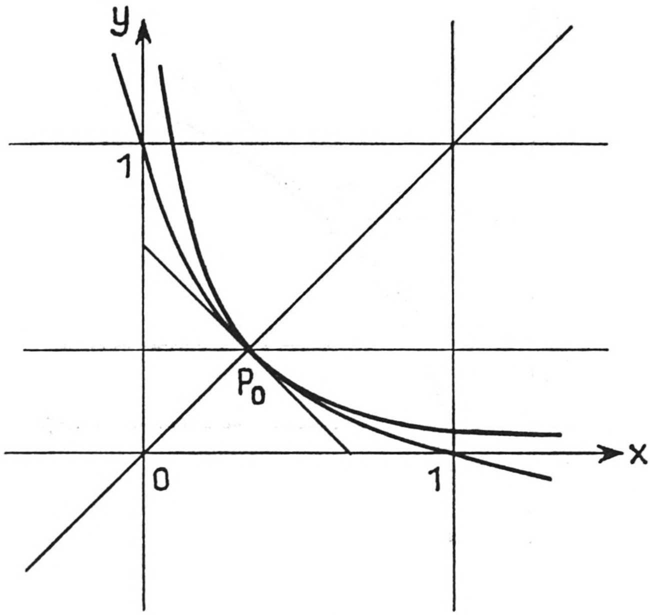

Bild 6

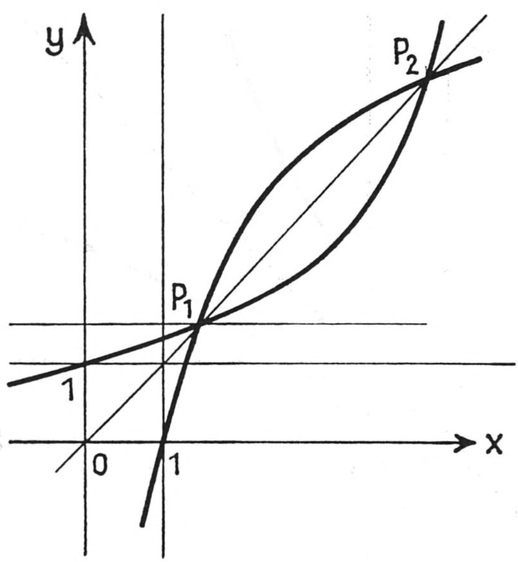

Bild 7

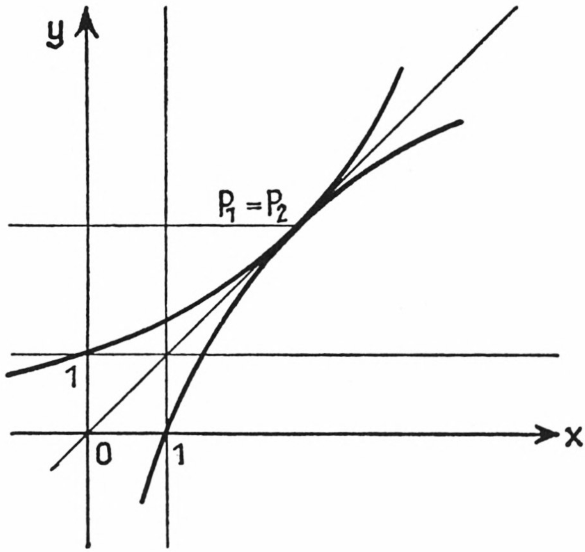

Bild 8

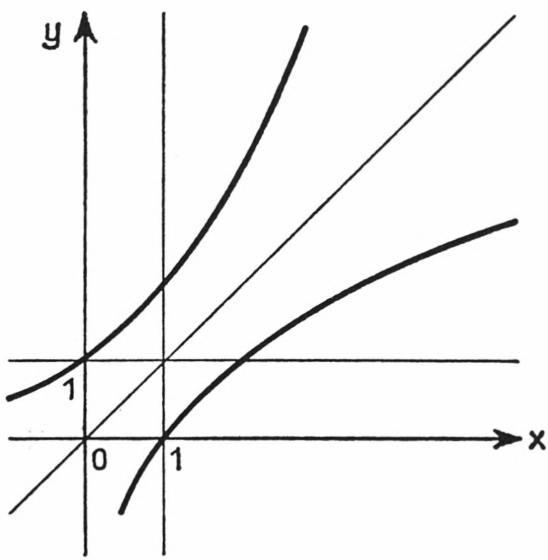

Bild 9

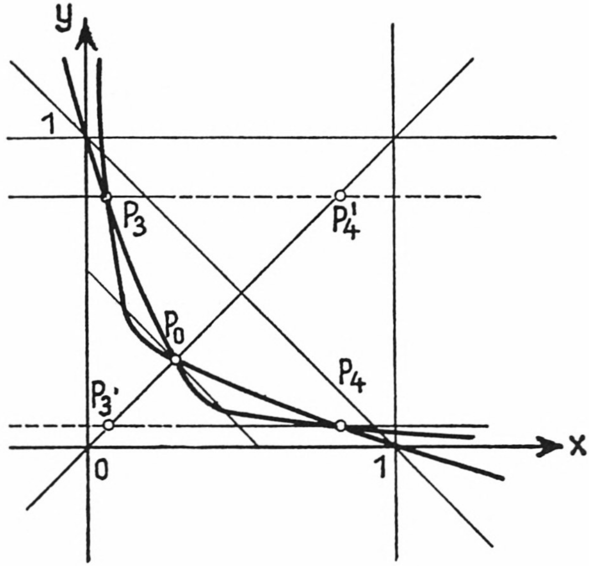

Bild 10

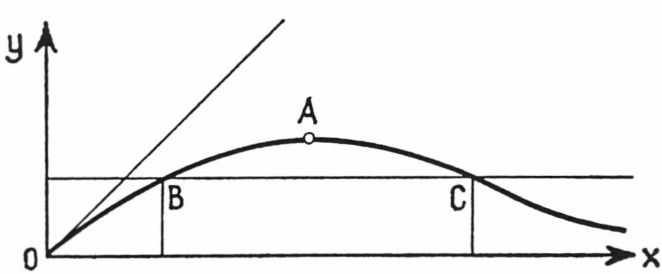

Bild 11

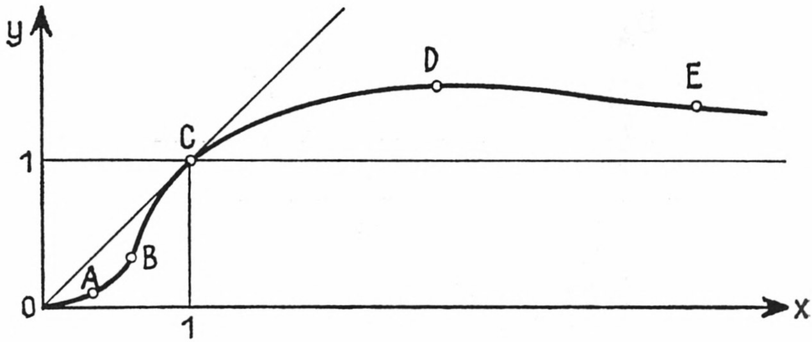

Bild 12

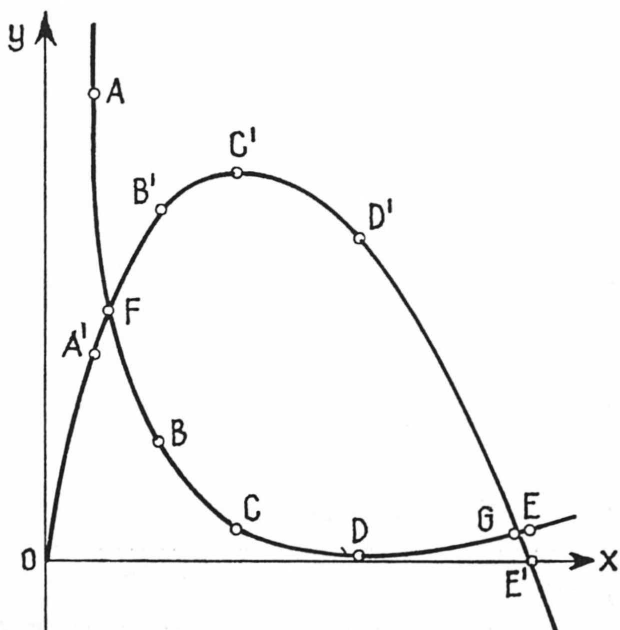

Bild 13

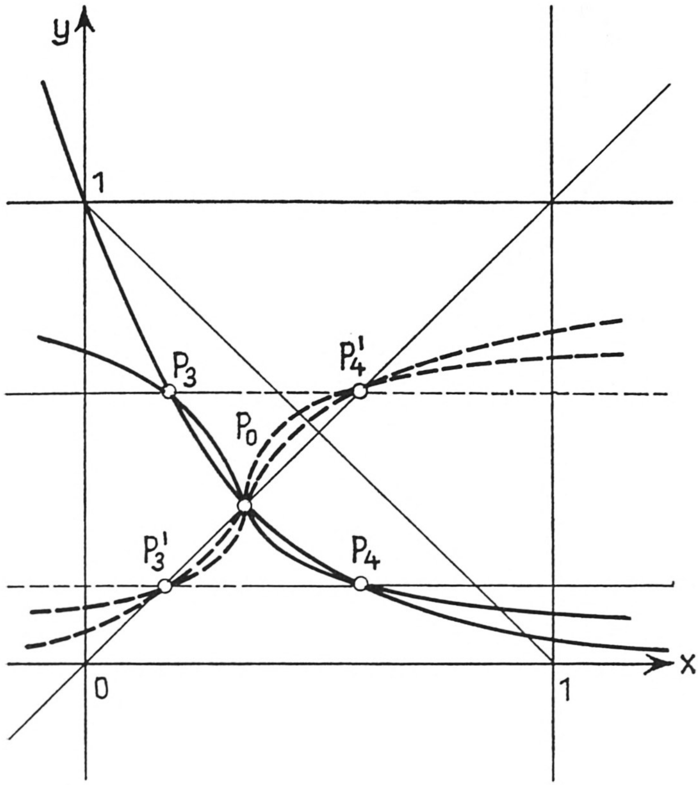

Bild 14

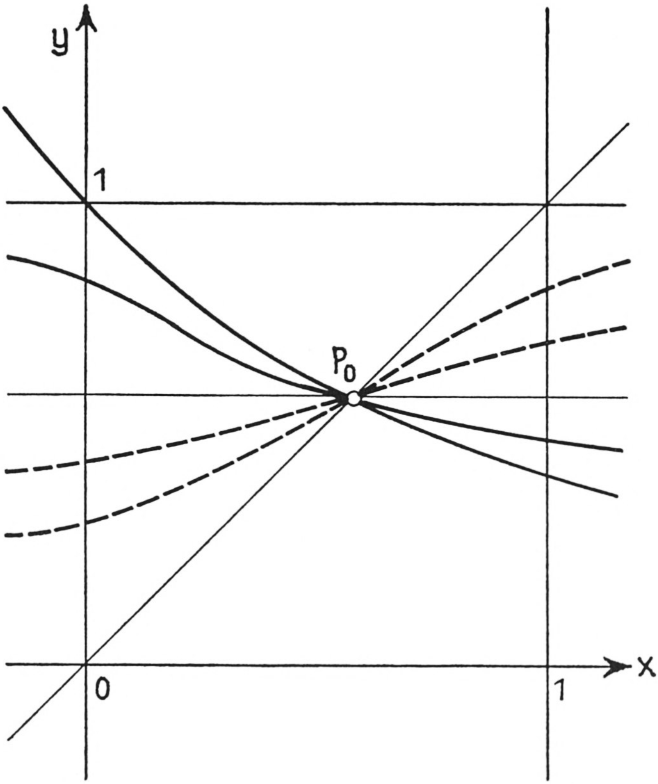

Bild 15

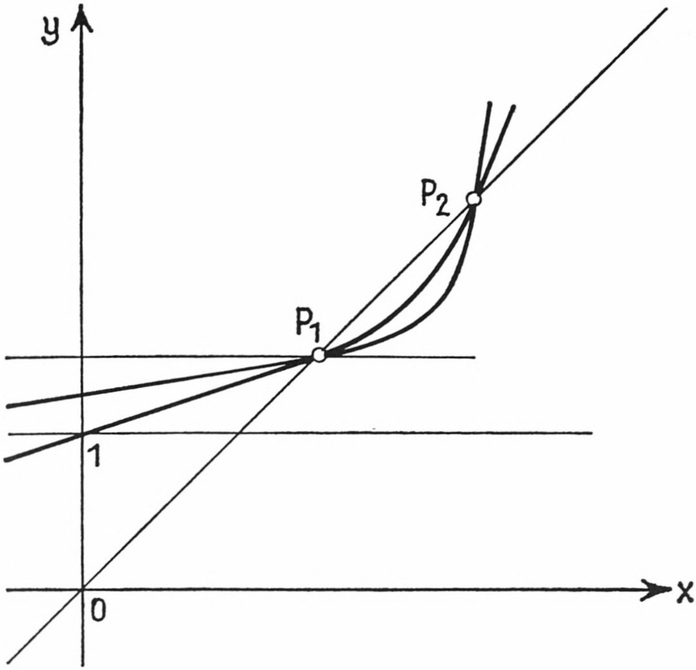

Bild 16

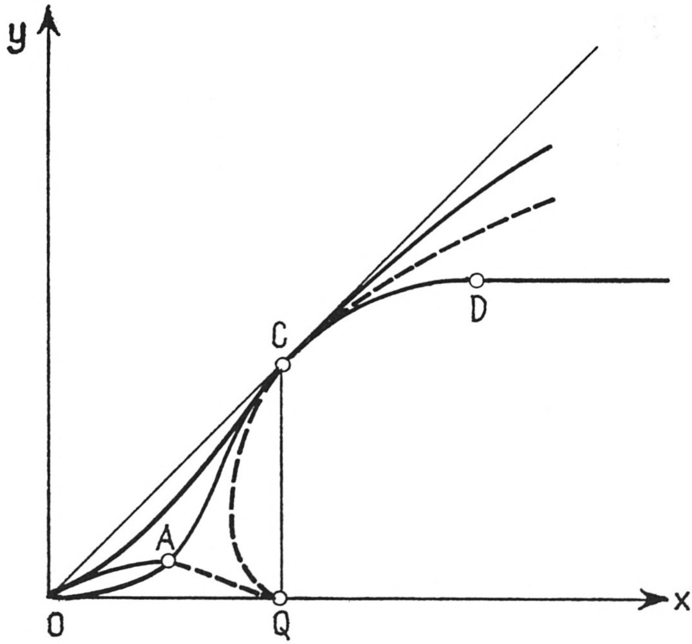

Bild 17