Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Zur Analyse der Lineal- und Zirkel-Konstruktionen I.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 10. November 1944.

Einleitung

„Du mußt es dreimal sagen.“
Goethe, Faust, I. Teil.

Wenn kürzlich, wenigstens anmerkungsweise angedeutet, ein Motto aus Faust, zweiter Teil, gewählt werden konnte, so mag nunmehr an der für ein Motto üblichen Stelle, eines aus dem ersten Teil Platz finden. Ob freilich die Dreimaligkeit ausreicht? Oft hängt es vom Widerhall ab, oder den angewandten technischen Hilfsmitteln, wie weit man gehört wird.

Auf ein anderes Zitat aber, das auf umfassende Teile in der Entwicklung der Wissenschaft paßt, darf sich auch die kleine, einige Jahrzehnte zurückliegende Bemerkung berufen, auf die hier zurückgegriffen wird: auf die Worte aus den „Meistersingern“: „Einmal im Jahr fänd' ich es weise, – daß man die Regeln selbst probier', – ob in der Gewohnheit trägem G'leise – ihr Kraft und Leben nicht sich verlier!“, Worte, an die – wohl aus Anlaß der 450-sten Wiederkehr von Hans Sachs' Geburtstag am 5. November – Wilhelm Furtwängler kürzlich in der Tagespresse in einer Betrachtung von Richard Wagners Wirken anknüpft.

Bei jener Bemerkung handelte es sich dazumal (vgl. l. c. [25] und [50]) darum, auf die nach meinem Dafürhalten unrichtige – oder doch ungenaue, somit mißverständliche – Formulierung hinzuweisen, die gewöhnlich für das Kriterium der Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel gegeben wird. Es war das in einer Zeit, wo die in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ausgeführte Grundlegung der Lehre von den Irrationalzahlen in immer breiteren Kreisen als notwendiges Glied im Aufbau der Mathematik empfunden wurde[1]. Es war die Zeit, da nach einer einmal von Kollegen Carathéodory gegebenen Kennzeichnung die jüngere Generation der Mathematiker die zweite Auflage von Camille Jordan's Cours d'Analyse in Händen hatte, wo die Mengenlehre, im Aufbau der Analysis weitgehend berücksichtigt, auch herangezogen wurde für den strengen Nachweis bis dahin sorglos verwendeter geometrischer Aussagen, wie des berühmten Satzes von der Zerlegung der Ebene in zwei Gebiete durch jede beliebige einfach-geschlossene Kurve. Nicht zuletzt aber war es die Zeit, in der nach Pasch's erfolgreichen Untersuchungen durch Hilbert's „Grundlagen der Geometrie", auf die wir unten nochmals zurückkommen, das allgemeine Verständnis für den Aufbau dieser Wissenschaft weithin gefördert wurde. So wurden um die Jahrhundertwende da und dort – nicht zuletzt auch an der hiesigen Universität – Vorlesungen gehalten[2], die, dem gewissenhaften Unterbau der Analysis, später dem der Geometrie

---

[1] Welche Schwierigkeiten des Verständnisses Schriften wie Dedekind's „Stetigkeit und Irrationalzahlen" (1872) zur Zeit ihres Erscheinens zu überwinden hatten, wird z. B. aus dem Briefwechsel Dedekind's mit R. Lipschitz deutlich; siehe R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, III. Band, S. 469–479. – Was Dedekind damals „stetig" nannte, entspricht dem heute in der Topologie eingeführten Begriff „zusammenhängend" (nach F. Riesz-Lennes-Hausdorff, vgl. Encykl. d. math. Wiss., III. Band, I. Teil, II. Hälfte, Artikel III A B 13, Anm. 29, S. *158*); zur Erläuterung seiner Ausdrucksweise stellt Dedekind in § 3 (l. c., S. 16, 17 = Werke, III, S. 321, 322) der „Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit" der Geraden die „Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit" der Menge der rationalen Zahlen gegenüber. Wenn sich neben dieser – in der Geometrie beim „Stetigkeitsaxiom" beibehaltenen – Verwendung des Wortes „stetig" sonst in weiten Teilen der Mathematik bei den „stetigen" Funktionen bzw. Abbildungen ein anderer Sinn eingebürgert hat, so stößt wohl mancher Lernende auf Hemmungen, ganz wie bei anderen terminologischen Inkongruenzen, wenn man es ihm selbst überläßt, sie zu erkennen.

[2] Über diese Entwicklungsrichtung des Hochschul-Unterrichts vgl. auch das Vorwort zu F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, autographierte Vorlesung, ausgearbeitet von Conrad Müller (1902). Wenn man sah, wie angelegentlich und erfolgreich sich führende Männer der Wissenschaft und des Unterrichts für die Hebung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung einsetzten, so durfte man damals glauben, daß diese Bemühungen noch in fernen Zeiten wirksam bleiben werden.

gewidmet, von vielen Studierenden, und gerade von den aus innerem Drang dem Fach zustrebenden, mit Begeisterung als Erlösung von nebelhaft unklaren Vorstellungen empfunden wurden, – eine Beobachtung, die ich nicht nur gerade hier in München in meiner Studienzeit bei einer überaus sorgfältigen Vorlesung zur Einführung in die Zahlenlehre gemacht, sondern später als Lehrender in Äußerungen mehr als eines mit Erfolg Studierenden bestätigt gefunden habe. Dergestalt blieb die Klärung in den Begriffen durchaus nicht auf die Kreise zünftiger Forschung beschränkt. Vielmehr gingen insbesondere aus der heranwachsenden Lehrerschaft[3], die bei ihrem Studium auf ein höheres Niveau geführt wurde, vielfach Vertreter dieses für die Gesamtkultur so überaus wichtigen Standes hervor, die nicht unwesentlich beteiligt waren an der wissenschaftlichen Publikation[4] gerade auch über die mit der Klärung der Grundbegriffe, mit der Gestaltung des Unterrichts sowie mit der Ausbildung der Lehrerschaft zusammenhängenden Fragen. Und so gewannen damals auch die Probleme der Lösbarkeit oder Un-

[3] Welch große Bedeutung einer Lehrerschaft zukommt, die ihren Stoff von höherer Warte überblickt, ersieht man am besten aus dem Vergleich der geschilderten Epoche mit anderen Zeiten. Wenn es wohl auch damals Studierende gab, die – sei es aus banausischer Einstellung, sei es aus wirtschaftlichen Schwierigkeiten – zur Wahl ihrer Studienrichtung gewissermaßen durch Konjunktur-Erwägungen, etwa über eine Statistik des Bedarfs an Stellen, gelangten, so blieben sie – soferne sie überhaupt ihr Ziel erreichten – im Hintergrund und waren gewiß auch weniger geeignet, um durch Klarheit und Wärme des Unterrichts die Begabungen unter ihren späteren Schülern zur Entfaltung zu bringen. Diese für die Frage des Nachwuchses so entscheidende Aufgabe wird im wesentlichen nur der Lehrer von Niveau und vorzüglicher wissenschaftlicher Ausbildung im Rahmen einer auf die Entwicklung der geistigen Begabungen der Schüler eingestellten Schule erfüllen, wobei ich noch auf die vor sechseinhalb Jahren bei einer Tagung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrerschaft am Schluß eines Vortrags gesprochenen Worte hinweise, die man auch als warnende ansehen durfte („Ein Kapitel Topologie", Hamburger Mathemat. Einzelschriften, Heft 36, erschienen 1942, S. 33, 34).

[4] Es werde, – sei es auch etwas willkürlich, – nur ein Name herausgegriffen: der des allzu früh verstorbenen R. Schimmack, der Assistent und dann Mitarbeiter Felix Klein's in der geschilderten Richtung war. Auch Hermann Fleischer, der verdienstvolle Übersetzer des l. c.[14] genannten Buches von F. Enriques, Bd. II, gehörte meines Wissens dem Lehrerstande der Mittelschulen an.

lösbarkeit von geometrischen Konstruktionsaufgaben ein besonderes Interesse.

Felix Klein, der seine von den herangezogenen Mitarbeitern stets – wenn auch mitunter mit leisem Seufzer[5] – anerkannte, geniale Organisationskraft nachmals in hohem Maße in den Dienst der Förderung des mathematischen Unterrichts stellte[6], hat schon 1894 in einem Göttinger Ferienkurs für Oberlehrer und nachher in einer kleinen, von F. Tägert für den Druck ausgearbeiteten Sommervorlesung dargelegt[7], was die Wissenschaft über die Möglichkeit der elementargeometrischen Konstruktionen zu sagen weiß.

Solchen Konstruierbarkeitsfragen gelten auch die folgenden Zeilen.

§ 1. Ein zusätzliches Hilfsmittel bei gewissen Konstruktionen.

1. Wenn von einer Konstruktion mit Lineal und Zirkel[8] gesprochen wird, dann wird nicht immer dasselbe darunter ver-

---

[5] Man mag hierüber Ludwig Boltzmann, Populäre Schriften, Leipzig 1905, Reise eines deutschen Professors ins Eldorado, S. 405–407, lesen (wo es sich um Werbung für die Mathematische Encyklopädie handelt) – eine Stelle, in die ich Einsicht nehmen konnte durch die Freundlichkeit von Herrn Kollegen Sommerfeld im Anschluß an einen in einem hiesigen vielseitigen Kreis gehaltenenen Vortrag über Boltzmann's Persönlichkeit. „Das Werk Boltzmanns" (Wiener Chemiker-Zeitung, Jahrgg. 47, 1944, S. 25) wird gewürdigt in Sommerfeld's Wiener Vortrag zum Gedächtnis der hundertsten Wiederkehr von Boltzmanns Geburtstag (20. II. 1844).

[6] In Fühlungnahme mit analogen Bestrebungen in anderen Ländern entstand damals eine Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission, die insbesondere auch auf den internationalen Fachkongressen in Erscheinung trat.

[7] F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, eine Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts; Leipzig 1895.

[8] Analog auch mit anderen Instrumenten, etwa dem rechten Zeichenwinkel, dem Lineal mit Verwendung seiner beiden parallelen Kanten, dem Integraphen, dem Streckenübertrager, dem Eichmaß usw. Über die zwei letztgenannten Instrumente siehe Hilbert's Grundlagen, l. c.[22], 3. Auflage, Kap. VII, § 36, S. 108; J. Kürschák, Math. Ann. 55 (1902); die „Quadratur des Kreises" mit dem Integraphen erwähnt F. Klein-Tägert, l. c.[7], Anhang, S. 64–66.

standen. Der eine denkt an ein wirkliches Lineal und einen wirklichen Zirkel, wie man sie vormals in jedem einschlägigen Geschäft beziehen konnte, er denkt an eine Reißfeder und chinesische Tusche oder einen möglichst gut gespitzten Bleistift, an einen Bogen geeigneten weißen Papiers, der etwa auf ein Reißbrett gespannt ist, an einen geeignet beleuchteten Raum; und nicht zuletzt an einen mit zwei Händen und genügend gutem Auge versehenen Zeichner, der durch die Erfahrungen der ersten Monate seiner Kindheit die Anpassung an die Welt der Gegenstände und das Zusammenspiel seiner Organe und Gliedmaßen gelernt hat[9]. Wer in diesem konkreten Sinn von Konstruktionen spricht, ist sich bewußt, daß man die Eigenschaften der Objekte beachten muß und daß man beispielsweise beim Verbinden zweier auf dem Papier gezeichneter „Punkte" durch eine „Gerade" das Lineal nicht möglichst genau mit den Punkten zur Deckung bringen, sondern in einem durch Übung gewonnenen kleinen Abstand von den Punkten aufs Papier legen wird, weil man es eben nicht bloß mit der Spitze des Bleistiftes oder der Reißfeder und nicht bloß mit der aufliegenden Kante des Lineals zu tun hat, sondern mit Instrumenten von bestimmter räumlicher Gestalt und gewissen Größenausmaßen; und weil bei Nichtbeachtung dieses Umstandes die gezeichnete Linie nicht durch die Punkte ginge, sondern, wegen der Undurchdringlichkeit des Lineal-Körpers und Bleistift-Körpers, ein Stück weit abgedrängt neben den Punkten verliefe. In dem überwiegenden Teil der mathematischen Lehre von den Konstruktionen ist aber durchaus nicht von diesem konkreten Konstruieren die Rede[10]. Das zeigt schon der Umstand, daß den erwähnten realen Objekten in ihren Größenausmaßen im Verhältnis zur Größe und Sehschärfe des Zeichners gewisse Grenzen sowohl nach oben wie nach unten gezogen sind und beispielsweise jedes praktische Konstruieren ausgeschlossen wäre, wenn man das Reißbrett nebst dem Abstand der gegebenen

[9] Natürlich kommt es nicht auf jede der angeführten Einzelheiten an. Man kann auch mit einem Diamant auf Glas längs eines Lineals eine Gerade ziehen. Man kann gewisse Konstruktionen auch einen Blinden mit geschultem Tastsinn ausführen lassen.

[10] Gewisse praktische Hinweise, wie sie im Unterricht der Darstellenden Geometrie gegeben werden, machen hier eine Ausnahme.

Punkte (unter Beibehaltung der Abmessungen der übrigen Gegenstände und Personen) in den Größenausmaßen mit 1000000 oder 1 : 1000000 multiplizierte. Das zeigen noch klarer jene Sätze der Theorie, denen zufolge etwa die „exakte" Dreiteilung eines beliebigen Winkels, für die z. B. die vorzüglichen Näherungs-Konstruktionen des Schneidermeisters Eugen Kopf[11] allen erdenklichen praktischen Anforderungen an Genauigkeit genügen, doch theoretisch mit Lineal und Zirkel unmöglich ist; oder jene Sätze, denen gemäß für eine beliebige natürliche Zahl n das Konstruieren des n-fachen oder des n-ten Teiles einer gegebenen Strecke mit Lineal und Zirkel (oder bei gegebenem Paar paralleler Linien mit dem Lineal allein) theoretisch exakt ausführbar ist[12], während praktisch eine solche Konstruktion z. B. für $n = 1$ Billion unmöglich wäre. Theoretisch bedeutet eben eine Konstruktion Folgendes: Eine gewisse Gesamtheit von Elementen, etwa eine endliche Anzahl von Punkten und Geraden der euklidischen Ebene ist als Ausgangs-Figur gegeben. Es sind gewisse Erweiterungen der Figur (bei den Lineal-Konstruktionen z. B. die Hinzunahme der Verbindungsgeraden zweier in der Figur enthaltener Punkte) zugelassen. Und wornach man fragt, ist eine bestimmte endliche Folge solcher zugelassener Erweiterungen, an deren Abschluß die Hinzunahme eines bestimmten gesuchten Elementes steht. Diese Auffassung ist denn auch allgemein bekannt[13] und in der einschlägigen Lehrbuchliteratur klar entwickelt[14].

---

[11] Siehe in diesen Sitzber. die Aufsätze von Herrn Kollegen Perron: „Die Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf", Jahrgang 1929, S. 341–343; „Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf", Jahrgang 1933, S. 439–445; ferner: Forschungen und Fortschritte, **10**, S. 101. Herr Perron hat dabei aus einer Anzahl verschiedener ihm von Herrn Kopf zur Untersuchung vorgelegter Dreiteilungskonstruktionen die gelungenste ermittelt.

[12] Vgl. unten die Konstruktionsaufgaben *1* und *2* in § 3.

[13] Allerdings trifft man (auch unter denen, die den Akademien ihre, fernab von der fortgeschrittenen Entwicklung der Wissenschaft entstandenen Ergebnisse, ihrer, bisweilen ganz selbstlosen Bemühungen um vermeintliche Probleme einsenden) immer wieder auf solche Bearbeiter der vom klassischen Altertum als ungelöst übernommenen Konstruktionsaufgaben, denen der Unterschied zwischen praktisch genau und theoretisch genau nicht klar geworden ist; und ich selbst hatte einmal in Erlangen den Besuch eines „Qua-

2. Über diesen Unterschied von Theorie und Praxis ist sich ja auch jeder, – Lehrer und Schüler, Verfasser und Leser – klar. Und wenn man innerhalb der Theorie davon spricht, daß man eine Strecke AB „in den Zirkel nimmt" und mit dieser Öffnung, – die „Spitze in M einsetzend", – um M als Mittelpunkt einen Kreis „zeichnet", so sind derartige Ausdrücke einfach atavistische Anklänge an die Praxis als Ursprung der Theorie, die der anschaulichen Belebung der Sprechweise dienen, aber doch nur bedeuten, daß die vorliegende Figur erweitert wird durch Hinzunahme eines Kreises mit M als Mittelpunkt und einem der Strecke AB gleichen Radius. Diese begrifflich-theoretische Auffassung ist es, die die Heranziehung analytisch-algebraischer Tatsachen und damit die Entscheidung der Frage nach Lösbarkeit gewisser Konstruktionsaufgaben ermöglicht hat, die z. T. aus dem klassischen Altertum stammen, das über die praktisch-irdischen Aufgaben der Erd- (oder Himmels-)vermessung hinaus die bewundernswerte, allen theoretischen Naturwissenschaften als Muster voranleuchtende Konzeption einer exakten Geometrie geschaffen hat. Heißt, darüber reden, nicht Eulen nach Athen tragen? Sind durch die bekannten Konstruierbarkeits-Kriterien[15]

drators", dem es nicht bewußt geworden war, daß seine auf großen Bogen mitgebrachten Zeichnungen, – mochten sie für praktische Ansprüche so gut sein, wie sie wollten, – für die auf eine theoretisch exakte Lösung sich beziehende Problemstellung der Quadratur des Kreises völlig ohne Belang sein mußten. Schon weil sich solche Fälle fortwährend wiederholen, sollten die künftigen Lehrer an den mittleren Schulen mit dem, was die Wissenschaft zu sagen hat (vgl.[7] und [14]) ausreichend bekannt geworden sein, um in Städten, wo sie die höchste Instanz ihrer Wissenschaft darstellen, nicht selbst zu versagen. Und in jener Zeit, von der oben gesprochen wurde, sind sie dieser Aufgabe in weitem Maße gewachsen gewesen.

[14] F. Klein, l. c.[7]; F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900; deutsche Ausgabe: Fragen der Elementargeometrie, Bd. II, übersetzt von H. Fleischer, 1907; Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung, 1911. Siehe ferner: Encyklopädie d. math. Wissenschaften, III. Band, I. Teil, II. Hälfte, Artikel III AB 8 (1914) von J. Sommer, woselbst weitere Literatur.

[15] Übrigens ist meines Wissens ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Lösbarkeit einer Konstruktionsaufgabe mit dem Integraphen (vgl. l. c.[8]), etwa in Verbindung mit dem Lineal, oder mit Lineal und Zirkel) noch nicht bekannt; eine wohl nicht uninteressante, aber vielleicht nicht ganz leicht zu beantwortende Frage.

nicht alle einschlägigen Fragen erschöpfend erledigt? Die allgemeine Meinung scheint dies zu bejahen und doch glauben wir, daß man die Frage in gewissem Sinne verneinen darf – und dann wohl muß.

3. In erster Linie handelt es sich dabei um die Zirkel-Konstruktionen, wo wir an Hand eines einfachen Beispiels (vgl. dazu unten, § 3, Aufgabe 4) zeigen wollen, daß in die eben beschriebene rein theoretische Auffassung, – die nur von Adjunktion bestimmter Elemente nach gegebenen Spielregeln handelt, – ein mit seinen Augen die Figur betrachtender Zeichner eingeschmuggelt wird; ein Zeichner nämlich, der beispielsweise bei zwei auf einer Geraden g gezeichneten Punkten A, B ohne weiteres „sieht", welche Punkte der Geraden mit A auf derselben Seite von B liegen, welche Punkte andererseits auf der Verlängerung der Strecke AB über B hinaus; sodaß man dem Zeichner für die Konstruktion der Summe zweier Strecken AB und CD die folgende Vorschrift geben kann: Man nehme die Strecke CD in den Zirkel und trage diese Strecke auf der Geraden g von B aus ab, u. zw. nach derjenigen Seite hin, in der nicht der Punkt A liegt; womit dann, wenn P der so gewonnene Punkt ist, in der Strecke AP die gesuchte Summe konstruiert ist.

Mit einer solchen Vorschrift geht man aber über die bloße Verwendung des Zirkels zum Zeichnen von Kreisen hinaus. Was zur bisherigen Figur (die die Punkte A, B auf g, sowie auf derselben oder einer anderen Geraden die Punkte C, D enthält) adjungiert wird, ist zunächst der Kreis k mit dem Mittelpunkt B und dem der Strecke CD gleichen Radius; hierauf das Paar P', P'' der Schnittpunkte von k mit g. Dieses Punktepaar wird – und Analoges tritt bei dem Schnittpunktepaar zweier Kreise auf – simultan adjungiert; und was man zunächst sagen kann, ist, daß eine der Strecken AP', AP'' die gesuchte Streckensumme darstellt. Wenn man aber zur Entscheidung, welche dieser beiden Strecken nun zu nehmen ist, den mit seinen Sinnesorganen ausgestatteten Zeichner bemüht – der überdies völlig versagen würde, wenn die Länge der Strecke CD ein Billiontel der Länge von AB betrüge[16] – so ist das nicht nur als ein atavistischer oder anschau-

[16] und die allgemeinen Sätze der Theorie kennen doch (abweichend von der Praxis) keine Einschränkung in den Abmessungen nach oben oder unten.

lich belebender Rückfall in die Sprechweise der Praxis zu bewerten; vielmehr wird damit die Feststellung von Anordnungs-Beziehungen als neues Hilfsmittel herangezogen[17].

4. Wenn sich hier zeigt, daß die Bezugnahme auf die reale Welt und ihre Objekte bisweilen nur der Belebung der Ausdrucksweise dient, in anderen Fällen aber zur Verschleierung einer klaren Trennung zwischen Theorie und Praxis führen kann, so liegt eine andere, gelegentlich bereits gemachte Bemerkung[18] in der gleichen Richtung. Sie betrifft die Einführung der Orientierung: Durchlaufungssinn der geraden Linie, Drehungssinn der Ebene, Windungs- (Schraubungs-)sinn des Raumes. Für jeden geometrischen Unterricht ist es bequem, wenn die von den einzelnen Teilnehmern angelegten Zeichnungen ungefähr den gleichen Anblick bieten und so wird man gerne – damit auf die reale empirische Welt Bezug nehmend – davon reden, daß eine erste Gerade beispielsweise ,,horizontal'', ferner daß eine zweite zur ersten parallele Gerade ,,oberhalb'' der ersten gezeichnet werden möge; weiterhin daß ein außerhalb der Zeichenebene liegender Punkt ,,vor'' der Tafel liegend zu denken sei. Kommt man nun aber zur Erklärung der Orientierung, so gibt es vom theoretischen Standpunkt jeweils nur die Unterscheidung in zwei einander entgegengesetzte Orientierungs-Möglichkeiten, von denen dann eine als gewählt zu denken ist, ohne daß man sie innerhalb der Theorie näher kennzeichnen könnte[19]. Und man sollte dies auch genügend hervorheben, wenn man den Umstand, daß die Theorie gegenüber Spiegelungen invariant ist, nicht verwischen will[20], wie es mehr oder weniger geschähe, wenn man z. B.

---

[17] Ein Hilfsmittel, das man allerdings im Gegensatz zur geschilderten Zirkel-Konstruktion bei der bekannten Lineal-Konstruktion der Streckensumme (die das Gegebensein eines Parallelenpaares voraussetzt) entbehren kann.

[18] Siehe ,,Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen I, Monatshefte f. Math. u. Phys. **51** (1943) S. 2, Anm. 3; ,,Über Frenetsche Formeln, Poinsotsche Bewegungen und Gramsche Determinanten'', Journal für d. reine u. angew. Math. **186** (1944), S. 116, Anm. 2.

[19] Vgl. F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie, II, autograph. Vorlesung, ausgearbeitet von Fr. Schilling, 1893, S. 29.

[20] In Monatshefte, l. c.[18] habe ich der Analogie wegen darauf hingewiesen, daß man ja in der Geometrie ganz entsprechend, – wegen der Invarianz der Theorie gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, – auch nur von der ,,irgendwie gewählten'' Längeneinheit zu sprechen pflegt, und nicht von Metern oder Millimetern. Ein Zitat bei F. Klein, das ich damals nur ungefähr aus der Erinnerung anführte, kann ich jetzt genauer belegen. F. Klein erwähnt l. c.[19], S. 28, zwecks drastischer Unterscheidung zwischen geometrischen und topographischen Sätzen, den Königsberger Professor Zöppritz, der zu sagen pflegte: In jedem Dreieck liegt der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises von dem des umbeschriebenen Kreises 3 mm nach Osten entfernt.

der Festlegung eines positiven Drehungssinnes als „entgegengesetzt dem Uhrzeiger“ eine über die bequeme Gleichförmigkeit der entworfenen Zeichnungen hinausgehende grundsätzliche Bedeutung beilegen würde. Ganz anders liegen die Dinge, wenn man die Geometrie auf Gegenstände der realen Welt anwendet, etwa in der Lehre von Magnetismus und Elektrizität, wo z. B. die Ampère'sche Schwimmerregel einen bestimmten Schraubungssinn des Raumes vor dem andern auszeichnet. So ist – dem verschiedenen Windungssinn dieser Pflanzen entsprechend – zwischen Hopfen- und Wein-Koordinatensystem unterschieden worden.[21]

5. Wenn wir uns des Anordnungs-Symbols (ABC) [gleichwertig mit (CBA)] bedienen, um auszudrücken, daß von den drei (verschiedenen) auf einer Geraden liegenden Punkten A, B, C der Punkt B zwischen A und B liegt[22], dann können wir im oben (Nr. **3**) besprochenen Beispiel sagen: In der Strecke AP erhalten wir die Summe der Strecken AB und CD, wenn wir für P denjenigen der beiden Punkte P', P'' nehmen, für den die Anordnung (ABP) besteht. Das neue Hilfsmittel, von dem wir oben gesprochen haben und dessen Verwendung bei manchen Konstruktionen zur Verwendung von Lineal und Zirkel hinzutritt, kann also so gekennzeichnet werden: Auf einer Geraden g gehören zwei Punkte A, B zur gegebenen (bzw. bis dahin konstruierten) Figur, sodaß für jeden von A und B verschiedenen Punkt X von g eine der drei Anordnungen (XAB), (AXB) (ABX) besteht. Es ist durch Schneiden eines Kreises mit g (oder

---

[21] Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, vol. I., art. 22; L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes, I. (1891), S. 60 und S. 67, wo Boltzmann (damals in München) bezüglich der Koordinaten erklärt, „entgegen sonstiger Münchener Art“ sich „unter Verschmähung des Hopfens stets an den Wein halten“ zu wollen, dabei aber den „rein geometrischen“, also von der Koordinatenwahl unabhängigen Charakter des dort benützten Stokes'schen Satzes hervorhebt.

[22] Über die „Axiome der Anordnung“, die den Begriff „zwischen“ abgrenzen und vor allem von M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (1882) 2. Ausg. 1912, § 1, sowie § 2, Grundsatz IV, untersucht wurden, siehe insbesondere D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1. Auflage 1899, als Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, – das Werk, das Pasch selbst (Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie, Sonderdruck aus den Annalen der Philosophie, Vorwort, 1921) als Höhepunkt der axiomatischen Forschung bezeichnet; vgl. von den „Grundlagen“, die 3. Aufl. 1909, erschienen als Band VII der Sammlung: Wissenschaft und Hypothese, § 3, S. 4 (die 4. Aufl. erschien 1913).

durch Schneiden zweier Kreise) auf g ein Schnittpunktepaar X', X'' gewonnen, sodaß eine bestimmte der obigen drei Anordnungen, z. B. (ABX) nur für einen der beiden Punkte X', X'' besteht[23]. Dieser hierdurch eindeutig festgelegte Punkt wird nun als solcher (also genau unterschieden von dem zweiten Punkt des Paares X', X'') der Figur adjungiert[24].

Von diesem zusätzlichen Hilfsmittel der ,,Feststellung der Anordnung" machen nun durchaus nicht alle üblichen Konstruktionen mit Lineal und Zirkel Gebrauch und wir geben unten (siehe § 3, Aufgabe 3) ein Beispiel einer Zirkel-Konstruktion, die ohne dieses Hilfsmittel auskommt. Man wird daher unterscheiden zwischen denjenigen Elementen (Punkten, Geraden, Kreisen, Abständen), die, ausgehend von einer gegebenen Figur, mit Lineal und Zirkel allein – ohne jede Feststellung einer Anordnung – konstruierbar sind und jenen Elementen, deren Konstruktion nur unter Heranziehung von Anordnungs-Beziehungen mit Lineal und Zirkel möglich ist. Von vorneherein wäre es denkbar, daß diese beiden Bereiche konstruierbarer Elemente zusammenfallen; nämlich dann, wenn sich jede Konstruktion, die mit Anordnungs-Beziehungen arbeitet, ersetzen ließe durch eine andere (sei es vielleicht auch umständlichere), die ohne dieses zusätzliche Hilfsmittel auskommt und doch zum selben gesuchten Element führt. Tatsächlich aber sind die beiden Bereiche wesentlich verschieden.

Es zeigt sich nämlich[25], daß mit Heranziehung von Anordnungs-Feststellungen im Verein mit Lineal und Zirkel alle diejenigen Elemente konstruierbar sind, die gewöhnlich als

---

[23] Dies zu erkennen, ist jeweils eine Sache der Theorie, nicht der Praxis. Um dies einzusehen, braucht man nur an Fälle zu denken, in denen die drei Punkte B, X', X'' für das praktische Zeichnen ununterscheidbar nahe aneinander liegen.

[24] l. c. [25], S. 744 (Viertes Beispiel) ist eine andere Art von Anordnungs-Feststellungen und ibid. S. 746 die Frage der Zurückführung beider Arten aufeinander erwähnt. – Diesen Anordnungs-Beziehungen entsprechen analytisch allemal Ungleichungen, während den Koinzidenz-Beziehungen, auf denen die übrigen Konstruktions-Schritte fußen, Gleichungen entsprechen.

[25] ,,Über die Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel", Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-naturw. Klasse, Bd. 118, Abt. IIa (1909), S. 735–757, sowie Akadem. Anzeiger der Wiener Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl., Nr. XIII (21. Mai 1909).

„mit Lineal und Zirkel konstruierbar“ bezeichnet werden, daß dagegen ohne dieses zusätzliche Hilfsmittel, also einzig und allein mit Lineal und Zirkel nur ein wesentlich engerer Bereich von Elementen konstruiert werden kann (s. u., § 4, Satz 1 und 2).

6. Neben vielen anderen Ergebnissen haben Hilbert's weitwirkende „Grundlagen der Geometrie“ durch die an Pasch anknüpfende Bearbeitung der Anordnungs-Beziehungen mit der Analyse des Begriffs „zwischen“ die Einsicht auch in diese Seite des geometrischen Unterbaues gefördert. Und so war es, wie schon erwähnt wurde[26], vor dreieinhalb Jahrzehnten wohl naheliegend gewesen, auf den Unterschied zwischen Konstruktionen mit und solchen ohne Benützung von Anordnungs-Beziehungen aufmerksam zu werden. Daß eine kritische Durcharbeitung eines Gebietes nicht immer bis ans Ende durchgeführt wurde, ist schon mannigfach vorgekommen[27]. Als eine kleine Nachlese möchten die Feststellungen gewertet werden, auf die wir hier nochmals hinweisen.

§ 2. Die Fundamentaloperationen einer Konstruktion.

7. Im nächsten § 3 sollen einige spezielle Konstruktionsaufgaben so behandelt werden, wie sie sich – unter Weglassung aller Reminiszenzen an konkretes praktisches Zeichnen – darstellen, wenn man den oben (§ 1, Nr. **1**, **2**) geschilderten Standpunkt des Adjungierens neuer Elemente zu den schon vorhandenen Elementen einer Figur voll zur Geltung bringt. Eine „Figur“ bestehe dabei[28] aus einer bestimmten Menge von Punkten, Geraden

---

[26] l. c. [50], Einleitung, Nr. **1**.

[27] Man denke z. B. an die sorgsame Arbeit, die, nachdem in den Grundlagen der Differential- und Integralrechnung längst weitgehend Klarheit erzielt war, von E. Kamke auf dem Gebiet der Differentialgleichungen geleistet wurde (vgl. über die vorgefundene Lage das Vorwort von E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930); ganz zu schweigen etwa von dem Gebiet der algebraischen Geometrie, wo noch die Meinungen über den Sinn der Theoreme und über das Bedürfnis nach Klärung merklich auseinandergehen.

[28] Die hier gegebene Kennzeichnung einer Figur hat noch einen in gewissem Sinn provisorischen Charakter, der dem Umstand nicht Rechnung trägt, daß bei den Zirkel-Konstruktionen (siehe unten IIa, IIb in Nr. **8**) Paare von

und Kreisen der euklidischen Ebene, außerdem aus einer bestimmten Menge von Abständen[29]. Die letzteren als gesonderte Elemente zu betrachten[30], empfiehlt sich aus folgendem Grund. Wenn die gegebene Ausgangsfigur drei oder mehr Punkte enthält, so spielen gewöhnlich weiterhin durchaus nicht alle Abstände irgend zweier dieser Punkte eine Rolle; und bei jeder Erweiterung der Figur durch Hinzunahme eines neuen Punktes gilt dasselbe von dessen Abständen von den schon vorher vorhandenen übrigen Punkten der Figur. Es erscheint also sachgemäß, diejenigen Abstände, die bei den weiteren Schritten der Konstruktion wirklich verwendet werden, als besondere Elemente der Figur hervorzuheben. Außerdem ist bisweilen gerade ein bestimmter Abstand das Ziel der Konstruktion (so z. B. unten in § 3, Aufgabe 3). Völlig analog damit, daß wir durchaus nicht alle Abstände der zur Figur gerechneten Punkte von vorneherein selbst mit zur Figur rechnen, ist es übrigens, daß wir auch durchaus nicht alle Schnittpunkte der zu einer Figur gerechneten Geraden oder Kreise zur Figur rechnen; wenn also z. B. eine Figur zwei Punkte A, B enthält und im Verlauf unserer Konstruktion durch einen besonderen Schritt die Verbindungsgerade $g = AB$ zur Figur adjungiert wird, dann sollen keineswegs alle Schnittpunkte von g mit anderen Geraden der Figur von vorneherein mit zu den Elementen der durch die Adjunktion von g neu entstandenen Figur gerechnet werden[31], vielmehr bleibt die Hin-

gleichberechtigten Punkten auftreten, deren keiner vor dem anderen etwas voraus hat. (Wir kommen darauf in Nr. **9** zurück.)

[29] Wer es liebt, die abstrakten Schritte einer Konstruktion, wie wir sie besprechen wollen, fortlaufend mit konkreten praktischen Vorstellungen zu begleiten, der mag sich vorstellen, daß außer den auf dem Zeichenpapier gezeichneten Punkten, Geraden und Kreislinien noch auf einem zweiten Bogen Papier Strecken mit bestimmten Längen markiert sind, um gegebenenfalls in den Zirkel genommen und zum Zeichnen von Kreisen mit einem Radius von der betreffenden Länge benützt zu werden.

[30] Vgl. l. c. [25], § 2, S. 747.

[31] Um hier wieder Vorstellungen der Praxis des Konstruierens nebenher laufen zu lassen: Nur gewisse auftretende Schnittpunkte, die später verwendet werden, benennt man mit Buchstaben, um andere kümmert man sich nicht, insbesondere (von Ausnahmefällen abgesehen) nicht um solche, die außerhalb des Papierbogens liegen. Auch zeichnet man viele Linien, um ein Gewirr von Linien zu vermeiden, gar nicht vollständig aus, sondern nur in denjenigen

zunahme eines solchen Punktes zur Figur jeweils einem besonderen Schritt der Konstruktion vorbehalten.

Die Menge der Elemente (Punkte, Geraden, Kreise, Abstände) der Ausgangsfigur wollen wir als endliche Menge annehmen.

8. Jeder Schritt der Erweiterung einer Figur sei von einer der folgenden Arten[32].

I a. Zu zwei Punkten der Figur wird ihre Verbindungsgerade adjungiert.

I b. Zu zwei nicht-parallelen Geraden der Figur wird ihr Schnittpunkt adjungiert.

I c. Zu zwei Punkten der Firgur wird ihr Abstand adjungiert.

I d. Zu einem Punkt und einem Abstand der Figur wird der Kreis um den Punkt mit dem Abstand als Radius adjungiert.

II a. Zu einer Geraden und einem sie schneidenden Kreise der Figur wird das Paar ihrer beiden Schnittpunkte adjungiert.

II b. Zu zwei einander schneidenden Kreisen wird das Paar ihrer Schnittpunkte adjungiert.

9. Die Konstruktions-Schritte II (d. i. II a und II b) geben der Figur einen neuen Charakter. Wenn wir uns denken, daß wir jeden der bisher vorhandenen Punkte durch einen Buchstaben A, B, C, ... bezeichnet haben, so tritt als Ergebnis einer Konstruktion II ein Paar X', X'' von Punkten auf, von denen keiner vor dem anderen etwas voraus hat. Man kann den einen mit X', den anderen mit X'' bezeichnen, oder auch umgekehrt. Wenn einer der später hinzukommenden Konstruktions-Schritte beispielsweise die Adjunktion der Verbindungsgeraden AX' verlangt, so überträgt sich die Zweideutigkeit in allen den Fällen, in denen $g' = AX'$ und $g'' = AX''$ verschieden sind, auf das Paar der Geraden g', g'', die dann nur simultan und gleichberechtigt zu adjungieren wären[33]. Kommt etwa gemäß einer

Stücken, die man, etwa für Gewinnung eines bestimmten Schnittpunktes benötigt. Das Entsprechende gilt von Kreislinien, von denen man oft nur ganz kurze Bogen in nächster Nähe eines gewünschten Schnittpunktes aufs Papier bringt. Alle anderen Schnittpunkte mit den sonstigen Linien der Figur bleiben außer Betracht.

[32] Vgl. bezüglich dieser „Fundamental-Konstruktionen" l. c. [25], S. 748, 749.

[33] Analoges gälte bei einer Adjunktion I c für die beiden Abstände AX', AX''.

weiteren Fundamentalkonstruktion IIa ein Schnitt der eben gewonnenen Verbindungsgeraden mit einem Kreis k dazu, dann hat man es von da an mit einem Quadrupel gleichberechtigter Punkte, bestehend aus den beiden Punktepaaren[34] (kg'), (kg'') zu tun.

Wollte man das weiter verfolgen, so käme man dazu, anstelle einzelner Punkte, Geraden, Kreise und Abstände als Elemente der Figur vielmehr Gesamtheiten gleichberechtigter Punkte, gleichberechtigter Geraden, usw. zu betrachten, wobei vielleicht für die allererste Ausgangsfigur – nicht aber für jede spätere Figur im Verlauf einer Kette von Fundamental-Konstruktionen – angenommen werden mag, daß jede dieser Gesamtheiten nur einen einzigen Punkt, bzw. eine einzige Gerade, usw. enthält[35].

10. Wir wollen auf eine derartige Ausgestaltung der Betrachtungen hier verzichten[36] und Folgendes vereinbaren: Jedesmal, wenn durch eine Fundamental-Konstruktion II ein Punktepaar X', X'' eingeführt wurde, dann sollen mit einem der beiden Punkte X', X'' weitere Konstruktionen nicht früher vorgenommen werden, ehe nicht durch eine Feststellung von Anordnungs-Beziehungen einer der beiden Punkte X', X'' vor dem anderen

---

[34] Auf Fälle, in denen k nur eine der beiden Geraden g', g'' schneidet (und auf die Möglichkeit, derartige Feststellungen, etwa nach Art des Hilfsmittels III in Nr. **10** geradezu als konstruktives Hilfsmittel einzuführen), soll hier nicht weiter eingegangen werden. Die genauere Durcharbeitung der hier auftretenden Mehrdeutigkeiten muß hier unterbleiben und läuft natürlich darauf hinaus, bei Gleichungen 2^m-ten Grades, die sich auf eine Kette quadratischer Gleichungen zurückführen lassen, zwischen reellen und imaginären Wurzeln zu unterscheiden.

[35] Gerade umgekehrt ist l. c. [25], S. 755, 756 für die nur aus den Fundamental-Konstruktionen Ia und Ib zusammengesetzten, durchwegs eindeutigen Linealkonstruktionen der Fall ins Auge gefaßt, daß sich unter den gegebenen Elementen der Ausgangsfigur ein Paar gleichberechtigter Punkte (nämlich das Paar der uneigentlichen Kreispunkte) befindet. Daß bei der oben (Nr. **7**) auseinandergesetzten Auffassung von Konstruktionen, als Ketten von Adjunktionen, ebenso wie reelle, auch imaginäre Elemente einbezogen werden können, ist klar.

[36] Allerdings ist eine solche Ausgestaltung notwendig verknüpft mit einer Ausführung des Beweises für den Konstruierbarkeits-Satz 2 (Nr. **13**) und steckt implizite in den Entwicklungen l. c. [25], S. 750–752 über „Verzweigungs-Konstruktionen".

eindeutig gekennzeichnet ist. Hiezu führen wir folgende Operation ein, die zu den in Nr. **8** genannten Fundamentaloperationen I und II als Fundamentaloperation dritter Art hinzutritt:

III. Wenn auf einer Geraden g zwei Punkte A, B und die Punkte X', X'' eines durch eine Fundamentaloperation II gewonnenen Punktepaares liegen; wenn außerdem eine bestimmte Anordnung, z. B. $(A\,BX)$, nur für einen der beiden Punkte des Paares besteht (von den Anordnungsbeziehungen $(A\,BX')$, $(A\,BX'')$ also genau eine), dann werde auf Grund der Feststellung dieser Beziehung jeder einzelne der beiden Punkte X', X'' als selbständig zur Figur adjungiert betrachtet[37].

11. Die Fundamentalkonstruktionen Ia und Ib (Nr. **8**) sind Linealkonstruktionen; Ic, Id, IIb sind Zirkelkonstruktionen; IIa ist eine Lineal- und Zirkel-Konstruktion. Die Konstruktionen II sind zweideutig im Gegensatz zu den eindeutigen Konstruktionen I. Ebenfalls eindeutig ist die Verbindung einer Operation II mit nachfolgender zugehöriger Operation III.

§ 3. Vier spezielle Aufgaben.

12. Wir stellen einige Konstruktionsaufgaben zusammen und geben ihnen die den theoretischen Gesichtspunkten von § 2 entsprechende Gestalt.

Aufgabe 1 (Vervielfältigung einer Strecke). Gegeben auf einer Geraden g zwei Punkte A_0, A_1, ferner zu g zwei Parallele h, k; ferner auf k ein Punkt L, sowie[38] die Verbindungsgerade $LA_0 = l$. Sei n eine natürliche Zahl $\geqq 2$. Gesucht wird

---

[37] Wegen Heranziehung von Anordnungs-Beziehungen etwas anderer Art vgl. l. c. [24].

[38] Natürlich brauchte man l nicht zu den Ausgangselementen hinzuzunehmen, sondern könnte die Adjunktion von l als ersten Schritt der Lösung einführen. Wir unterlassen dies nur, um einen völlig gleichmäßigen Verlauf der Lösung mit jener der Aufgabe 2 zu gewinnen.

Außerdem ließe sich bekanntlich allein aus den Elementen A_0, A_1, h (parallel zu $g = A_0 A_1$) und L (auf die man sich somit als Ausgangselemente beschränken könnte) die dritte Parallele k durch L mittelst reiner Lineal-Konstruktionen gewinnen, worauf wir wieder zwecks Gleichförmigkeit mit Aufgabe 2 und um den Umfang der Gesamtkonstruktion einzuschränken, nicht eingehen.

der Punkt A_n, der auf g die Koordinate $x = n$ hat in jenem Abszissensystem, für das A_0 bzw. A_1 die Koordinate $x = 0$ bzw. $x = 1$ hat.

Die Lösung besteht in folgenden Schritten, bei denen nur die linealen Fundamental-Konstruktionen Ia und Ib (siehe Nr. 8) Verwendung finden:

Schnittpunkt $lh = B_0$,
Verbindungsgerade $A_1 B_0 = m_1$,
Schnittpunkt $m_1 k = M$.

Weiterhin, wenn $1 \leqq i < n$ ist und A_i bereits der Figur angehört:

Verbindungsgerade $A_i L = l_i$,
Schnittpunkt $l_i h = B_i$,
Verbindungsgerade $B_i M = m_{i+1}$,
Schnittpunkt $m_{i+1} g = A_{i+1}$.

Durch diese Rekursion von i zu $i + 1$ ist A_n nach endlich vielen Schritten konstruiert.

Aufgabe 2 (Teilung einer Strecke). Gegeben auf einer Geraden g zwei Punkte A_1, B, ferner zwei weitere Gerade h, k durch B, eine Parallele l zu g, sowie [39] der Schnittpunkt $lk = L$. Sei n eine natürliche Zahl $\geqq 2$. Gesucht wird der Punkt A_n, der auf g die Koordinate $x = \frac{1}{n}$ hat in jenem Abszissensystem, für das B bzw. A_1 die Koordinate $x = 0$ bzw. $x = 1$ hat.

Die Lösung deckt sich in allen einzelnen Schritten wörtlich mit jener der vorigen Aufgabe[40].

Aufgabe 3. Gegeben zwei Punkte A, B. Gesucht eine Strecke von der Länge $\sqrt{3}$, wenn der Abstand AB gleich 1 gesetzt wird.

---

[39] Vgl. die analoge Bemerkung in Anm. 38.

[40] Man sieht sofort, daß die Ausgangsfiguren der beiden Aufgaben projektiv gleichwertig sind, wenn man in Aufgabe 1 noch B als uneigentlichen Punkt von g (sowie von h und k) und in Aufgabe 2 noch A_0 als uneigentlichen Punkt von g (und von l) hinzunimmt.

Die Lösung, die zwei Fundamental-Konstruktionen I d, sowie je eine II b und I c umfaßt (vgl. Nr. **8**) erfolgt in den Schritten[41]:

Kreis $(A, AB) = k_1$,
Kreis $(B, AB) = k_2$,
Schnittpunktepaar $k_1 k_2 = C', C''$,
Abstand $C'C'' = \sqrt{3}$.

Man beachte, daß es wegen $C''C' = C'C''$ völlig belanglos für das Ergebnis ist, welchen der beiden Schnittpunkte $k_1 k_2$ man für C', welchen für C'' nimmt[42]. Von einer Operation III (vgl. Nr. **10**) wird also hier kein Gebrauch gemacht. Gleichwohl ergibt sich eine eindeutig bestimmte Lösung.

Aufgabe 4. Gegeben zwei Punkte A, B, deren Abstand, wie in Aufgabe 3, gleich 1 genommen werde. Gesucht eine Strecke von der Länge $1 + \sqrt{3}$.

Die ersten vier Schritte der Lösung wie bei Aufgabe 3. Hierauf fünf weitere Schritte, unter denen sich je eine Fundamentaloperation I a, I d, II a, III und I c befindet:

Gerade $AB = g$,
Kreis $(B, C'C'') = k_3$,
Schnittpunktepaar $g k_3 = P', P''$,
Feststellung desjenigen Punktes P aus dem Paare P', P'', für welchen die Anordnung (ABP) gilt,
Abstand $AP = 1 + \sqrt{3}$.

Daß sich bei Lösung dieser Aufgabe die Operation III nicht vermeiden läßt, geht aus Satz 2 in § 4, Nr. **13** hervor.

§ 4. Konstruierbarkeits-Kriterien.

13. Wir kommen nun zu denjenigen Kriterien, die angeben, welche Konstruktionsaufgaben mit Lineal und Zirkel unter Zuhilfenahme der Feststellung von Anordnungs-Beziehungen (Fundamentaloperation III von Nr. **10**), welche andererseits mit Lineal und Zirkel allein (Fundamentalkonstruktionen I, II von Nr. **8**) lösbar sind; woraus dann hervorgeht, wie schon am Schluß

[41] Der Kreis mit M als Mittelpunkt und $r = AB$ als Radius werde kurz (M, AB) genannt.

[42] Die gleiche Bemerkung ließe sich auch auf die Verbindungsgerade von C' und C'' anwenden.

von Nr. **5** erwähnt, daß der Bereich der letzteren Aufgaben ein gegenüber den ersteren wesentlich engerer ist. Auf die Beweise soll hier nicht eingegangen werden[43]. Übrigens beschränken wir uns auch hier, wie l. c.[25], auf den Fall, daß die Ausgangsfigur nur eine endliche Anzahl von Punkten enthält, und überlassen den Fall allgemeiner Ausgangsfiguren mit irgend einer Menge von gegebenen Punkten, Geraden, Kreisen und Abständen anderweitiger Behandlung.

Die fraglichen Kriterien sind dann in folgenden zwei Sätzen enthalten:

Satz 1. Gegeben seien $n+1$ Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (mit $n \geqq 1$), deren cartesische Koordinaten (x, y) wir gleich $(0, 0)$, $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ annehmen. Wir setzen (für alle $\mu, \nu = 1, \ldots, n$)

$$p_{\mu\nu} = a_\mu a_\nu + b_\mu b_\nu, \qquad q_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$$

und führen vermöge

$$p_{11}\mathfrak{x} = a_1 x + b_1 y, \qquad p_{11}\mathfrak{y} = -b_1 x + a_1 y$$

diejenigen neuen cartesischen Koordinaten ein, für welche A_ν die Koordinaten $\mathfrak{a}_\nu = \frac{p_{1\nu}}{p_{11}}$, $\mathfrak{b}_\nu = \frac{q_{1\nu}}{p_{11}}$, speziell also A_0 und A_1 die Koordinaten $(0, 0)$, $(1, 0)$ erhalten. Damit ein Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, bzw. eine Gerade $\mathfrak{u}\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\mathfrak{y} + \mathfrak{w} = 0$, bzw. ein Abstand $\mathfrak{r}$ konstruierbar sei mit Lineal, Zirkel und Feststellung von Anordnungsbeziehungen (also mittelst der Operationen I, II, III von Nr. **8** und **10**), ist notwendig und hinreichend, daß die Zahlen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ bzw. (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) die Zahlen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, bzw. die Zahl $\mathfrak{r}$ demjenigen Rationalitätsbereich $\mathfrak{Q}$ angehören, dessen Zahlen aus den Zahlen $\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{b}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, d. h. aus $1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n$ durch eine endliche Folge von rationalen Operationen[44] und Quadratwurzelziehungen aus positiven Zahlen er-

---

[43] Es sei auf die Note l. c. [25] und die geplante in Anm. 50 angekündigte Veröffentlichung III verwiesen.

[44] Mit $\mathfrak{R}$ werde der aus denselben Zahlen nur durch die rationalen Rechenoperationen erzeugte Bereich bezeichnet.

zeugt werden[45]. Ein Kreis ist konstruierbar, soferne Mittelpunkt und Radius es sind.

Satz 2. Gegeben die in Satz 1 genannten Punkte. Damit ein Punkt (x, y), eine Gerade $ux + vy + w = 0$, ein Abstand r konstruierbar sei allein mit Lineal und Zirkel, ist notwendig und hinreichend, daß sich x, y, bzw. $u : v : w$, bzw. r darstellen lassen in der Gestalt

$$x = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu a_\nu, \qquad y = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu b_\nu,$$

bzw. (bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor)

$$u = \Sigma \rho_\nu a_\nu, \qquad v = \Sigma \rho_\nu b_\nu, \qquad w = \rho_0 p_{11},$$

bzw.

$$r^2 = \rho p_{11},$$

wobei (wie oben) $p_{\mu\nu} = a_\mu a_\nu + b_\mu b_\nu$ zu setzen ist und unter ρ, $\rho_0, \ldots, \rho_n$ Zahlen desjenigen Rationalitätsbereichs $\mathfrak{R}_0$ zu verstehen sind, der durch die Verhältnisse $\frac{p_{\mu\nu}}{p_{11}}$ (für alle Indexpaare $\mu, \nu = 1, \ldots, n$) erzeugt wird. Für die Konstruierbarkeit eines Kreises gilt das Analoge wie in Satz 1.

14. Nehmen wir nun Aufgabe 3 von Nr. **12**, § 3 vor. Für[46] $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ erhalten wir $p_{11} = 1$ als einzige Größe $p_{\mu\nu}$ und der Bereich $\mathfrak{R}_0$ von Satz 2 wird einfach der aus $\frac{p_{11}}{p_{11}} = 1$ erzeugte Bereich der rationalen Zahlen. Sonach sind die gemäß Satz 2 allein mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Abstände r durch $r^2 = \rho$ als Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen gekennzeichnet. Tatsächlich erwies sich $r = \sqrt{3}$ als konstruierbar.

---

[45] Es ist das (im neuen $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System) die übliche Form des Kriteriums für Lineal-Zirkel-Konstruktionen. Vgl. etwa Enriques-Fleischer, l. c. [14], S. 122-128, Artikel IV von G. Castelnuovo, §§ 8, 9. Daß neben dem $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System vorher das weniger spezialisierte x-y-System eingeführt wurde, geschah im Hinblick auf Satz 2.

[46] Wir spezialisieren das x-y-Koordinatensystem von vornherein so, daß es mit dem in Satz 1 eingeführten $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System zusammenfällt.

Für Aufgabe 4 dagegen gehört $r^2 = (1 + \sqrt{3})^2$ offenbar nicht zum Bereich $\mathfrak{R}_0$ der rationalen Zahlen; wohl aber gehört r zum Bereich $\mathfrak{Q}$, der aus den rationalen Zahlen durch positive Quadratwurzelziehungen und rationale Operationen erzeugt wird. Es ist also r zwar nicht allein mit Lineal und Zirkel konstruierbar, wohl aber (wie auch die Lösung der Aufgabe zeigte) mit diesen Instrumenten unter Heranziehung der Feststellung von Anordnungs-Beziehungen.

Die Aufgaben 1 und 2 sind auf Grund bekannter Kriterien[47] (da die Koordinaten des gesuchten Punktes A_n dem in Anm. 44 erwähnten Bereich $\mathfrak{R}$ angehören) mit dem Lineal allein konstruierbar (wie ja auch die Lösungen zeigten) und genügen erst recht den Kriterien der Sätze 1 und 2.

15. Seinerzeit[48] habe ich vorübergehend noch einen schwächer gefaßten Begriff der Konstruierbarkeit zur Diskussion gestellt, wo von einer Lösung einer Aufgabe auch dann gesprochen werden darf, wenn sich das gesuchte Element unter einer ganzen, durch die successiven Erweiterungen der Figur gewonnenen Gesamtheit von Elementen befindet. Eine derartig mehrdeutige „Lösung" einer Aufgabe zu gestatten, geschah aber mehr aus Respekt vor der allgemein als gültig angesehenen Formulierung des Lineal-Zirkel-Kriteriums, die eben bei Zulassung dieser Mehrdeutigkeit wieder (ohne Heranziehung der Anordnungs-Beziehungen) Gültigkeit erhält. Verzichtet man aber, was doch wohl kaum sachgemäß ist, auf die eindeutig dem gesuchten Element zustrebende Konstruktion, dann sollte man diese starke Abschwächung des Begriffs „Konstruktion" ausdrücklich erwähnen.

16. Wenn wir nur Punkte und Gerade als gesuchte Elemente in Betracht ziehen, dann deckt sich das Kriterium des Satzes 2 für den Fall, daß die Zahl $n + 1$ der gegebenen Punkte $\geqq 3$ ist und diese Punkte nicht alle in einer Geraden liegen, mit dem Kriterium für die Konstruierbarkeit mit dem rechten Zeichenwinkel in der Gestalt, die ich für dieses Kriterium[49] vor einigen Jahren angegeben habe[50]. Für den entgegengesetzten

---

[47] Vgl. etwa l. c. [14], Enriques-Fleischer, Artikel III von A. Giacomini, §§ 1–7, S. 54–78, Artikel IV von G. Castelnuovo, §§ 1–7, S. 107–122.

[48] l. c. [25], S. 738, 739.

[49] das l. c. [25], S. 754, etwas anders formuliert war.

[50] „Über die mit Lineal und Zirkel und die mit dem rechten Zeichenwinkel lösbaren Konstruktionsaufgaben I. Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstage am 7. Mai 1940 gewidmet", Math. Zeitschr. 46 (1940) S. 190–203, Satz 1,

Fall, daß die gegebenen Punkte alle einer Geraden angehören, sind natürlich mit dem rechten Zeichenwinkel nicht alle Punkte und Geraden konstruierbar, die gemäß Satz 2 mit Lineal und Zirkel konstruierbar sind. Vielmehr sind offenbar außer der alle Punkte A_ν enthaltenden Geraden g nur die auf g senkrechten Geraden durch die Punkte A_ν konstruierbar.

17. Die gemäß Satz 2 konstruierbaren Punkte und Geraden lassen sich aber auch kennzeichnen als jene Elemente, die nur durch Lineal-Konstruktionen eindeutig konstruierbar sind, wenn man das Paar U', U'' der uneigentlichen Kreispunkte[51] zu den gegebenen Punkten $A_0, \ldots, A_n$ hinzunimmt[52]. „Eindeutig" konstruierbar heißt dabei ein Element, wenn dieses Element sich nicht ändert bei einer Vertauschung der Rollen, die die Punkte U', U'' im Verlauf der Konstruktion spielen.

18. Was wir nicht in unsere Betrachtungen einbezogen haben, sind willkürlich gewählte Elemente, wie sie bei manchen Konstruktionen[53] eine Rolle spielen[54]. Diese Rolle ist aber nicht ganz so einfach, als es bisweilen dargestellt wird, weil beispielsweise eine willkürlich gewählte Gerade, je nach der getroffenen

---

S. 191; vgl. auch die vorläufige Mitteilung, diese Sitzber., Jahrgang 1937, Sitzung vom 6. II. 1937, S. 4*.

Für die Fortsetzungen II und III war einerseits (in II) eine allgemeine, nicht an die Dimensionszahl 2, d. h. an die Ebene als Bereich der Konstruktionen, und auch nicht an reelle Elemente gebundene (vgl. Anm. 51) Darstellung der linearen Konstruktionen geplant, andererseits (in III) für das oben in Satz 2 (Nr. **13**) wiedergegebene Kriterium eine eingehendere Begründung, als sie l. c. [25] skizzenhaft gegeben worden war. Inmitten der vernichtenden Stürme unserer Tage wäre es vermessen, Zusagen über die Ausführung von Plänen machen zu wollen.

[51] Die Einbeziehung imaginärer Elemente ist natürlich bei der theoretischen Auffassung über den Sinn einer Konstruktion (vgl. Nr. **1**, **2**) ohne weiteres möglich. Über die Einbeziehung von Paaren von Elementen vgl. das am Schluß von Nr. **9** Gesagte.

[52] Vgl. l. c. [25], S. 755, 756.

[53] Man denke an die Aufgabe: Gegeben eine Kreislinie k, gesucht ihr Mittelpunkt.

[54] *In großen Zügen wohl – gewissermaßen unter Beschränkung auf den „allgemeinen Fall"* – ist das Grundsätzliche bekannt. Vgl. Enriques-Fleischer, l. c. [14], Artikel IV von Castelnuovo, § 9, Anmerkung, S. 127, 128.

Wahl, mit einer gegebenen oder bereits konstruierten oder später zu konstruierenden Kreislinie (oder auch mit der Figur schon angehörenden oder später zu konstruierenden Geraden) Schnittpunkte haben kann oder nicht[55]. Darnach werden hier (als zur Konstruktion gehörige Teiloperationen) Feststellungen über die Schnittbeziehungen nötig, gewissermaßen analog der oben (Nr. **10**) als Operation III eingeführten Feststellung. Ob es einmal in einer Fortsetzung dieser Note zu einer Besprechung auch dieser Dinge kommen wird, muß offen bleiben.

---

[55] Beispielsweise muß man sich bei der Aufgabe der Anm. 53 eine k schneidende Gerade verschaffen; eine „willkürlich" gewählte Gerade genügt nicht.