Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIII. Jahrgang 1893.

München.
Verlag der K. Akademie.
1894.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Aequipotential- und Magnetkraftlinien.

Von E. von Lommel.

(Eingelaufen 4. März.)

Ein homogener leitender Körper werde von einem elektrischen Strome durchflossen, der in zwei Punkten seiner Oberfläche ein- und austritt. Jede Stromlinie oder „Stromröhre" ist, wie jeder lineare Leiter, von geschlossenen Magnetkraftlinien umringt, welche die Stromröhre, auf deren Axe ihre Ebenen überall senkrecht stehen, alle in demselben Sinne gleichsam umfliessen. Auf einer Fläche gleichen Potentials, welche sämmtliche Stromröhren rechtwinklig schneidet, grenzen die elementaren Magnetströmchen benachbarter Stromröhren unmittelbar aneinander, und heben sich durch die ganze Aequipotentialfläche gegenseitig ganz oder theilweise auf, ausgenommen da, wo die Aequipotentialfläche die Oberfläche des leitenden Körpers längs einer Aequipotentiallinie rechtwinklig durchschneidet. Hier fliessen sie zu einem einzigen Strome magnetischer Kraft zusammen, welcher den Rand der Aequipotentialfläche in demselben Sinne wie jene elementaren Magnetströmchen umkreist. Jede Aequipotentiallinie ist daher eine auf der Oberfläche des Leiters verlaufende in sich zurückkehrende Magnetkraftlinie. Diese Magnetkraftlinien, also auch die Aequipotentiallinien, lassen sich, wie ich bereits gezeigt habe[1]), auf einer durchströmten ebenen Platte durch aufgestreute Eisenfeile sichtbar machen.

1) Lommel, d. Sitzungsber. XXII, S. 371, 1892.

Wir nennen **Stromfläche** jede Fläche, welche durch eine stetige Aufeinanderfolge von Stromlinien gebildet wird. Durch jede Stromlinie lassen sich alsdann unendlich viele Stromflächen legen, welche alle auf den Aequipotentialflächen senkrecht stehen, und sämmtlich durch die beiden Elektrodenpunkte hindurchgehen. Aus dieser unendlichmal unendlichen Fülle von Stromflächen kann man nun durch Festsetzung gewisser Merkmale einzelne Schaaren herausheben, welche für die weitere Betrachtung besonders bequem sind, wie z. B. diejenige Schaar, welche die Körperoberfläche, die ja stets eine Stromfläche ist, in sich enthält und sich beiderseits an sie anschliesst. Eine zweite Schaar bilden die Stromflächen, welche sich in der geraden Verbindungslinie der Elektroden (die eine Stromlinie ist und auch dann als solche aufzufassen ist, wenn sie ganz oder theilweise ausserhalb der leitenden Körpermasse verläuft) schneiden. Je eine Fläche der einen und eine Fläche der anderen Schaar schneiden sich in einer Stromlinie, und die beiden Schaaren von Flächen zerlegen den Raum in Stromröhren.

Wie einerseits die Körperoberfläche stets eine Stromfläche ist, so kann andrerseits jede Stromfläche als Begrenzungsfläche des Leiters gewählt werden. Man kann daher durch Schnitte, die längs Stromflächen geführt werden, Stücke des Körpers abtragen, oder ihm von Stromflächen begrenzte Stücke anfügen, ohne dass in dem übrigbleibenden oder in den neu hinzugekommenen Körpertheilen die Gestalt und Lage der Aequipotentialflächen und der Stromlinien eine Aenderung erfährt. Kennt man daher für irgend einen Körper diese Flächen und Linien, so kennt man sie auch für eine Unzahl von Körperformen, die sich auf die angegebene Weise aus dem gegebenen Körper bilden lassen.

Betrachten wir z. B. den unendlichen Raum als mit leitender Masse erfüllt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass in diesem allseitig unbegrenzten Leiter die Aquipotentialflächen Rotationsflächen um die Verbindungslinie der Elektroden als Axe, und sämmtliche Meridianebenen Stromflächen sind. In jeder Meridianebene bieten die Aequipotential- und Stromlinien ein ähnliches Bild dar, wie die beiden Systeme zu einander rechtwinkliger Kreise in Fig. 1. Nur sind die Aequipotentiallinien in diesem Falle nicht Kreise, sondern Curven, welche der Gleichung $1/r - 1/r' =$ Const. genügen (wenn r und r' die Entfernungen eines Punktes der Ebene von den Elektrodenpunkten A und B bezeichnen), und die Stromlinien sind die dazu senkrechten Trajectorien. Lässt man beide Systeme von Curven um die Axe AB rotiren, so erzeugen die ersteren die Aequipotentialflächen, die letzteren eine Schaar von Stromflächen, welche mit den Meridianebenen zusammen den Raum in Stromröhren zerschneiden. Jede dieser Stromflächen kann als Oberfläche eines Körpers angenommen werden, den sie aus der leitenden Masse herausschneidet und gegen den übrigen nun als nichtleitend anzunehmenden Raum abgrenzt. Aus jedem so entstandenen Körper kann durch zwei Meridianebenen eine Schnitze herausgeschnitten oder es kann der Körper durch eine Meridianebene halbirt werden. Man kann ferner innerhalb eines solchen Körpers durch eine zweite jener Stromflächen Hohlräume bilden, und so z. B. schalenförmige Körper erhalten, überhaupt die mannigfaltigsten Körperformen, soweit sich deren Oberflächen mittels der von den gegebenen Aequipotentialflächen bedingten Stromlinien bilden lassen.

Will man dagegen die Strömung in einem gegebenen leitenden Körper kennen lernen, so hat man zunächst die zugehörigen Aequipotentialflächen zu finden, welche die Oberfläche des Körpers, die ja stets eine Stromfläche ist, rechtwinklig schneiden. Denkt man sich den Körper um die Verbindungslinie AB der beiden Elektroden gedreht, so wird, da seine Lage in Beziehung zu den Elektroden die nämliche bleibt, die Strömung nicht geändert. Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt einer Aequipotentiallinie, indem er auf der zugehörigen Aequipotentialfläche bleibt, einen Parallelkreis um die Drehungsaxe AB. Die Aequipotentialflächen sind also auch in diesem Falle Rotationsflächen um diese Axe.

Betrachten wir z. B. eine Kugel mit beliebig auf ihrer Oberfläche gelegenen Elektrodenpunkten A und B. Man weiss, dass jeder Kreis, welcher durch A und B geht, von allen Kreisen orthogonal geschnitten wird, deren Mittelpunkte in die Verlängerung der Geraden AB fallen, und welche diese Gerade in Punkten schneiden, die zu den Punkten A und B harmonisch liegen ($AE : AF = BE : BF$, Fig. 2; in Fig. 1 stellen bekanntlich jene Kreise, welche durch die Elektrodenpunkte A und B gehen, die Stromlinien, diese Kreise die Aequipotentiallinien für eine unbegrenzte ebene Platte dar). Dreht sich nun das erstere System von Kreisen um die in der Mitte von AB errichtete Senkrechte CD, so erzeugt jeder Kreis eine durch A und B gehende Kugelfläche, welche von allen Kugeln, die durch Rotation des zweiten Systems von Kreisen um AB entstehen, rechtwinklig geschnitten wird. Lässt man nämlich zwei beliebige Kreise der beiden Systeme, die sich in P und Q (Fig. 2) rechtwinklig schneiden, um die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte O und M rotiren, so erzeugen sie die nämlichen Kugelflächen, als wenn man den Kreis M für sich um AB, den andern O für sich um CD rotiren lässt, und man sieht, dass die beiden Kugeln längs der Kreislinie, in welcher sie sich schneiden, ringsum auf einander senkrecht stehen. Die Kugelflächen des zweiten Systems sind daher die zu jeder Kugel des ersten Systems gehörigen Aequipotentialflächen, und jede Kugelfläche, welche durch die Elektroden A und B geht, ist eine zu den aequipotentialen Kugeln gehörige Stromfläche, und kann daher als Begrenzungsfläche eines leitenden Körpers angenommen werden. Hienach ist aber die Frage nach den Aequipotential- und Stromlinien auf einer Kugelfläche mit zwei beliebig auf ihr angebrachten Elektroden ohne Rechnung beantwortet. Die Linien gleichen Potentials ergeben sich nämlich als Kreise, deren Ebenen sich alle in der Durchschnittslinie der in den Elektrodenpunkten an die Kugel gelegten Tangentialebenen schneiden. Denn legt man an den Kreis O Fig. 2 im Punkte B eine Tangente, welche die verlängerte CD in T schneidet, zieht durch T eine beliebige Secante TPQ, fällt auf diese von O aus eine Senkrechte, welche den Kreis in N und R, die Verlängerung von AB in M trifft, und verbindet M und O mit Q, so ist,

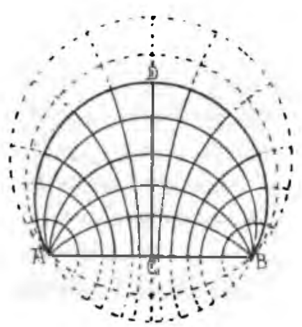

Fig. 1.

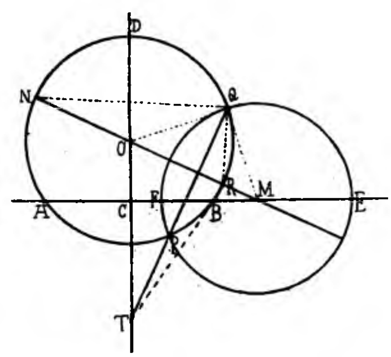

Fig. 2.

wenn man den Winkel MOQ mit φ bezeichnet, der Winkel $OQP = 90^0 - \varphi$ und der Winkel $OMQ =$ W. $ORQ -$ W. $ONQ = \frac{1}{2}(180^0 - \varphi) - \frac{1}{2}\varphi = 90^0 - \varphi$, folglich der Winkel $MQP = \varphi$. Es ist demnach Winkel $MQO =$ W. $OQP +$ W. $MQP = 90^0 - \varphi + \varphi = 90^0$, d. h. jeder von einem so bestimmten Punkt M der Geraden AB mit dem Radius MQ beschriebene Kreis schneidet den Kreis O in Q (und P) rechtwinklig, nach welchem Punkte Q des Kreisumfangs von T aus die Secante TQ auch gezogen wurde. Umgekehrt müssen alle durch die Schnittpunkte P und Q des Kreises O mit jedem der zu ihm orthogonalen Kreise, deren Mittelpunkte auf der verlängerten AB liegen, gezogenen Secanten durch den Punkt T gehen. Es müssen demnach auch im Raume alle Ebenen, welche durch diese Secanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt werden und die Kreise enthalten, längs welchen die Kugel O von der Schaar der zu ihr orthogonalen Kugeln M geschnitten wird, durch die in T auf der Ebene der Figur errichtete Senkrechte gehen, in welcher sich die in A und B an die Kugel O gelegten Tangentialebene begegnen. Auf dasselbe System von Aequipotentiallinien führt natürlich auch die analytische Behandlung der Aufgabe.[1]) — Die Stromlinien auf unserer Kugelfläche sind diejenigen Kreise, in welchen eine durch die Verbindungsgerade der Elektroden gehende Schaar von Ebenen die Kugelfläche schneidet. Da diese Ebenen Stromflächen sind, so kennt man auch die Strömung für jedes durch eine solche Ebene von der Kugel abgetrennte Segment, sowie für jede durch zwei solche Ebenen aus ihr herausgeschnittene Kugelschnitze. Nimmt man zur Begrenzung noch die kugelförmigen Stromflächen hinzu, die sich alle in dem Kreise schneiden, der in der durch AB senkrecht zu CD gelegten Ebene, die ebenfalls eine Stromfläche ist, um C mit dem halben Elektrodenabstand als Radius beschrieben ist, so lassen sich schalenförmige Körper bilden, die innen und aussen durch Kugelflächen begrenzt sind, und für welche ebenfalls der Verlauf ihrer Strom- und Aequipotentiallinien bekannt ist.

Aehnliche Ueberlegungen zeigen, dass bei einem geraden Kreiscylinder mit Elektroden an den Endpunkten seiner Axe auf der Mantelfläche die Erzeugenden des Cylinders Stromlinien, die Parallelkreise Aequipotentiallinien sind, während auf den kreisförmigen Stirnflächen die Aequipotentiallinien von den Elektrodenpunkten aus beschriebene concentrische Kreise, die Stromlinien Radien derselben sind. Von dem Verlaufe der Aequipotentialflächen im Innern des Cylinders erhält man,

---

1) Boltzmann, Sitzungsber. d. Wiener Akad., math.-naturw. Classe, LII. S. 214. 1865.

wenn auch nur empirisch, eine Vorstellung durch Aufstreuen von Eisenfeile auf die Ebene eines durch die beiden Elektroden gelegten Schnitts. Die Feilspäne ordnen sich auf dieser Ebene in Linien von der in Fig. 3 angedeuteten Gestalt. Diese Linien stehen überall senkrecht zum Umfang

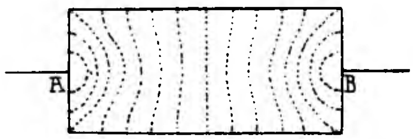

Fig. 3.

des Rechtecks, nur die durch die Ecken gehenden machen hievon eine, jedoch nur scheinbare, Ausnahme. Bei physischen Platten oder Körpern gibt es nämlich keine mathematisch scharfen Ecken und Kanten, sondern dieselben sind in Wirklichkeit mehr oder weniger abgerundet, und die Aequipotentiallinien stehen zu diesen Abrundungen senkrecht.