BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kontakt-Relationen (2. Mitteilung)

Von **Georg Aumann** in München

In meiner ersten Mitteilung über „Kontakt-Relationen“[1] kündigte ich eine nähere Untersuchung des dort gegebenen Beispiels eines „soziologischen“ Kontaktes auf Grund „gemeinsamer Interessen“ an. Es hat sich inzwischen gezeigt, daß eine leichte Verallgemeinerung dieses Beispiels bereits auf die allgemeine Kontakt-Relation führt, womit eine weitere Beschreibungsmöglichkeit für Kontaktbeziehungen gewonnen ist. An dieses Ergebnis schließen wir noch einige weitere Bemerkungen an.

1. Der allgemeine Interessenkontakt

Es sei $j : S \to \mathfrak{P}(J)$ eine Abbildung von S in die Menge $\mathfrak{P}(J)$ der Teilmengen einer Menge J, die „Interessenabbildung“ j; hierzu definieren wir die Kontaktrelation γ_j als eine Relation zwischen den Elementen x von S und den Teilmengen Y von S in folgender Weise:

(1) $$x \gamma_j Y :\Leftrightarrow j(x) \subset \bigcup \{j(y) \,\vdots\, y \subset Y\}.$$[2]

Daß dies die Eigenschaft K_1, K_2 und K_3 einer Kontaktrelation besitzt, zeigt man genauso wie in K. R. 1.1; wir nennen γ_j (den durch j erzeugten) Interessenkontakt. Es gilt der Satz: Jeder Kontakt γ ist ein Interessenkontakt.

Beweis. Gemäß K. R. sei $\mathfrak{H}$ ein Kontakttestmengensystem für γ, d. h. es gilt für $x \in S$ und $Y \subset S$

(2) $$x \gamma Y \Leftrightarrow \bigwedge_{H \in \mathfrak{H}} x \in H \Rightarrow H \cap Y \neq \emptyset .$$

Damit bilden wir die Abbildung $x \mapsto j(x)$ gemäß

(3) $$j(x) := \{H \,\vdots\, H \in \mathfrak{H} \wedge x \in H\},$$

[1] Sitz. Ber. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.–Natur. Kl., 1970, S. 67–77, im folgenden mit „K. R.“ zitiert.

[2] $\{x : \ldots\}$ zu lesen: „Menge aller x, derart daß ...“.

und können nun feststellen, daß die rechten Seiten von (1) und (2) gleichwertige Aussagen sind. Wenn nämlich für x und Y (1) gilt, so folgt für $H \in \mathfrak{H}$ der Reihe nach $x \in H \succ H \in j(x) \succ \bigvee_{y \in Y} H \in j(y) \succ y \in H \succ H \cap Y \neq \emptyset$, also gilt (2). Wenn umgekehrt (2) gilt, so folgt $H \subset j(x) \succ (\bigvee_{y \in Y} H \in j(y)) \succ y \in H \succ H \in j(y)$, also gilt (1).

2. Finitäre Kontakte

2.1. Wir nennen einen Kontakt γ in S finitär, wenn

(4) $$\bigwedge_{x, Y} x\, \gamma\, Y \succ \bigvee_{Y' \subset Y} (Y' \text{ endlich} \wedge x\, \gamma\, Y').$$

Offensichtlich sind die Beispiele **1.1.**, **2.** a) und b) in K. R. finitäre Kontakte. Unmittelbar aus dieser Definition folgt der Satz. Ist $\gamma = \gamma_j$ durch die Interessenabbildung j dargestellt, so ist γ genau dann finitär, wenn das zugehörige Mengensystem

$$\mathfrak{M} := \{j(x) \colon x \in S\}$$

die folgende Endlichkeitsbedingung erfüllt:

(5) Zu jedem $x \in S$ und $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ mit $j(x) \subset \bigcup \mathfrak{M}'$ gibt es ein endliches $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$ mit $j(x) \subset \bigcup \mathfrak{M}''$.

2.2. Zu jedem Kontakt γ in S kann man einen zugehörigen finitären Kontakt γ^* bilden:

(6) $$x\, \gamma^*\, Y :\succ\prec \bigvee_{Y' \subset Y} (Y' \text{ endlich} \wedge x\, \gamma\, Y');$$

man zeigt leicht, daß damit ein Kontakt definiert ist und daß γ^* finitär ist.

Für einen finitären Kontakt γ gilt $\gamma = \gamma^*$; denn einerseits hat man stets $x\, \gamma^*\, Y \succ x\, \gamma\, Y$, andererseits, wenn γ finitär ist, so folgt aus $x\, \gamma\, Y$ die Existenz eines endlichen $Y' \subset Y$ mit $x\, \gamma\, Y'$, also $x\, \gamma^*\, Y$. Daher gilt allgemein

(7) $$\gamma^{**} = \gamma^* \text{ für jeden Kontakt } \gamma.$$

3. Topologische Kontakte

Zur Beantwortung der Frage, welche Eigenschaften eine Interessenfunktion $j: S \to \mathfrak{P}(J)$ haben muß, damit γ_j ein topologischer Kontakt ist, hat man einfach die Eigenschaften K_0 und K_4 von K. R. in die „Interessensprache" zu übersetzen. Man erhält mit der Definition

$$j[A] := \bigcup \{j(y) \vdots y \in A\} \text{ für } A \subset S, \text{ den}$$

Satz: Die Interessenabbildung j erzeugt genau dann einen topologischen Kontakt γ_j, wenn

1. $\bigwedge_{x \in S} j(x) \neq \emptyset$;
2. $\bigwedge_{x \in S} \bigwedge_{A, B \subset S} j(x) \subset j[A \cup B] \succ j(x) \subset j[A] \vee j(x) \subset j[B]$.

Diese letzte Eigenschaft, welche an eine Primidealeigenschaft der $j(x)$ bzgl. des Mengensystems $\{j[A] \vdots A \subset S\}$ erinnert, ist ersichtlich weniger zu konstruktiven Zwecken geeignet.

4. Über Initial- und Final-Kontakte

Es bezeichne $f: S \to S'$ eine Abbildung von S in S', mittels derer wir einen Kontakt von S nach S' bzw. umgekehrt übertragen wollen.

a) Ist γ ein Kontakt in S, etwa gegeben durch das KT-System $\mathfrak{H}$, $\gamma = \gamma_{\mathfrak{H}}$, so bilden wir $\mathfrak{K}' := \{G' \vdots G' \subset S' \wedge f^{-1}(G')\ \gamma\text{-offen}\}$ und betrachten $\mathfrak{K}'$ als ein KT-System in S'; der durch $\mathfrak{K}'$ in S' erzeugte Kontakt $\gamma_{(f)}$ $(:= \gamma_{\mathfrak{K}'})$ heißt Finalkontakt zu γ.

b) Ist γ' ein Kontakt in S', gegeben durch das KT-System $\mathfrak{H}'$, $\gamma' = \gamma_{\mathfrak{H}'}$, so betrachten wir

$$f^{-1}(\mathfrak{H}') := \{f^{-1}(H') \vdots H' \in \mathfrak{H}'\}$$

als KT-System in S und nennen den zugehörigen Kontakt $\gamma'_{(f^{-1})}$ $(= \gamma_{f^{-1}(\mathfrak{H}')})$ den Initialkontakt zu γ'.

Diese Definitionen bedürfen noch einer Rechtfertigung, nämlich des Nachweises, daß die Kontaktrelationen $\gamma_{(f)}$ und $\gamma'_{(f^{-1})}$

unabhängig sind von den gewählten Darstellungen mittels $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$. Es genügt hierzu festzustellen, daß

$$x\,\gamma_{(f^{-1})}\,Y \approxeq f(x)\,\gamma'\,f(Y), \tag{8}$$

was unmittelbar bestätigt werden kann.

Beispiel einer Initialtopologie

Es sei γ' die „diskrete Topologie" in S', d. h. es gelte für die zugehörige Hüllenoperation h'

$$h'\,Y' = Y' \text{ für } Y' \subset S';$$

ferner sei $f\colon S \to S'$ surjektiv. Dann ist $\gamma_{(f^{-1})}$ in S der sogenannte „Freundschaftskontakt" γ_4, für den $x\,\gamma_4\,Y$ genau dann gilt, wenn x einen Freund in Y hat; dabei ist die Freundrelation zwischen x_1 und x_2 die durch die Bildgleichheit $f(x_1) = f(x_2)$ erklärte Äquivalenz in S. (Hier gilt die Regel: „Der Freund eines Freundes ist auch ein Freund").

Bemerkung. $\gamma_{(f)}$ ist der „schwächste" Kontakt in S', $\gamma_{(f^{-1})}$ ist der „stärkste" Kontakt in S, so daß $f\colon S \to S'$ noch „kontakttreu" ist. Von $\gamma_{(f)}$ zu unterscheiden ist der durch

$$x'\,\gamma^0\,Y' :\approxeq \bigwedge\nolimits_{x \in f^{-1}(x')} x\,\gamma\,f^{-1}(Y') \tag{9}$$

erklärte Kontakt γ^0 in S'[3].

[3] Vgl. hierzu den Begriff der „Allgemein-Stetigkeit" G. Aumann, Beiträge zur Theorie der Zerlegungsräume, Math. Anm. **106** (1932), S. 258.