Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1932. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Kritisch-historische Bemerkungen zur Funktionentheorie.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Dezember 1932.

V. Über einen Gaußschen Beweis der Irrationalität von tang x bei rationalem x.

1. Der im Jahre 1900 erschienene Band VIII der Werke von Gauß enthält unter den aus dem Nachlaß entnommenen Beiträgen zur Arithmetik und Algebra auf S. 27/29 einen mit der folgenden Überschrift versehenen: Beweis der Irrationalität der Tangenten rationaler Bögen in einer neuen Gestalt. Ich beabsichtige, im folgenden einige Bemerkungen daran zu knüpfen, zu deren leichterem Verständnis ich einen kurzen Überblick über den Gang dieses Beweises vorausschicke.

I. Es wird zunächst eine unendliche Folge unendlicher Reihen eingeführt, welche (in abgekürzter Schreibweise) folgendermaßen lauten:

$$(\mathrm{I}_0)\quad P_0 = \cos\frac{m}{n} = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu \nu!\, 1\cdot 3 \ldots (2\nu - 1)} \left(\frac{m}{n}\right)^{2\nu}$$

$$(\mathrm{I}_1)\quad P_1 = \sin\frac{m}{n} = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu \nu!\, 1\cdot 3 \ldots (2\nu + 1)} \left(\frac{m}{n}\right)^{2\nu+1}$$

und allgemein für $k > 1$:

$$(\mathrm{I}_k)\quad P_k = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu \nu!\, 1\cdot 3 \ldots (2\nu + 2k - 1)} \cdot \frac{m^{2\nu+2k-1}}{n^{2\nu+k}}$$

(übrigens offenbar auch noch gültig für $k = 1$).

II. Durch eine einfache Gliederabschätzung wird gezeigt, daß bei positiven m, n und hinlänglich großem k die Summen P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, ... durchweg positiv ausfallen und beständig abnehmen.

III. Es folgt die zwar nicht bewiesene, jedoch leicht zu verifizierende Aussage, daß die folgenden Beziehungen bestehen:

$$
\text{(III)} \begin{cases} P_2 = nP_1 - mP_0 \\ P_3 = 3nP_2 - m^2P_1 \\ P_4 = 5nP_3 - m^2P_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{k+1} = (2k-1)\,nP_k - m^2P_{k-1} \qquad (k > 1). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

IV. Angenommen nun, es wäre bei ganzzahligen positiven m, n das Verhältnis $\frac{P_1}{P_0}$ rational, so gäbe es eine Zahl C, derart daß CP_0, CP_1 ganze Zahlen. Dann würden, wenn man jede der Gleichungen (III) mit C multipliziert, zunächst CP_2, dann CP_3 usf. in infinitum ganze Zahlen sein, was nach dem am Schlusse von III Gesagten unmöglich ist.

V. Da $\frac{P_1}{P_0} = \operatorname{tang} \frac{m}{n}$, so folgt, daß $\operatorname{tang} x$ bei rationalem x irrational sein muß.

2. Der vorstehende, durch Einfachheit und außerordentliche Kürze ausgezeichnete Beweis dürfte vielleicht insofern nicht ganz befriedigend erscheinen, als er im Gegensatz zu den mit dem Beweisthema in deutlichem Zusammenhange stehenden Reihen (I_0), (I_1) über die Herkunft der ganz ex abrupto eingeführten Reihen (I_k) und der ebenso unvermittelt auftretenden, nur a posteriori durch Rechnung zu verifizierenden Gleichungen (III)[1] nicht die geringste Andeutung enthält. Wer aber in dieser Hinsicht aus den erklärenden Zusätzen des (übrigens inzwischen verstorbenen) Herausgebers irgendwelche Aufklärung zu gewinnen sucht, findet daselbst nur die spärliche und überdies unzutreffende Bemerkung, daß, abgesehen von der oben unter II erwähnten, durch direkte Abschätzung der Reihensummen P_k gewonnenen Kenntnis ihrer schließlich beständigen Abnahme, die Gaußschen Grundgedanken von den bei Legendre in Note IV seiner Éléments de Géométrie sich findenden nicht abweichen. Offenbar hat dieser Herausgeber von dem Inhalt der genannten Arbeit nur in äußerst unvollkommener Weise Kenntnis genommen und insbesondere, statt der von Legendre selbst am Schlusse seiner Untersuchung hinzu-

[1] Man beachte das schier unerklärliche Auftreten von m^2 in der zweiten und allen folgenden Gleichungen statt des m in der ersten.

gefügten Fußnote[1] nachzugehen, hat er lediglich wieder die alte Legende aufgewärmt, daß Legendre den ersten einwandfreien Beweis der Irrationalität von $\tang \frac{m}{n}$ bei ganzzahligem m, n gegeben habe. Wie in einer Besprechung von Bd. VIII der Gaußschen Werke (Bibl. Math. (3) 2 [1901] S. 368) unter Hinweis auf meine Mitteilung: Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π (dieser Bericht 28 [1898] S. 325/37) Herr Engel schon hervorgehoben hat, dürfte diese Ehre Lambert zukommen. Daß diese Tatsache so lange verborgen blieb, beruht, wie von mir a. a. O. gezeigt wurde, auf dem Umstande, daß die mathematische Öffentlichkeit, statt ihre Kenntnisse aus der einschlägigen Lambertschen Hauptarbeit (nämlich der oben in Fußnote [1] nach Legendre zitierten[2]) zu schöpfen, sich fast ausschließlich mit einem von Lambert mehr ad usum delphini verfaßten vorläufigen Referate[3] begnügt hat. Daran scheint sich leider wenig geändert zu haben. Denn, obschon die von mir gemachte Feststellung nicht einmal auf unsere nicht eben besonders stark verbreiteten Akademieberichte beschränkt blieb, sondern ungefähr gleichzeitig mit ihrem Erscheinen in der Hauptsache auch auf die Encyklopädie (Bd. I_1 S. 136/7) überging, so habe ich die Wahrnehmung gemacht, daß bis in die neueste Zeit hinein die besondere, seiner Zeit weit voraneilende Leistung Lamberts, wo auch immer die Gelegenheit es erfordert hätte, nicht genügend gewürdigt wurde. Aus diesem Grund schien es mir im Sinne der historischen Gerechtigkeit wohlangebracht, den Nachweis zu führen, daß auch die wesentliche Grundlage des vorliegenden Gaußschen Beweises sich vollständig bei Lambert vorfindet.

---

[1] Dieselbe lautet ganz unzweideutig: „Cette proposition a été démontrée pour la première fois par Lambert dans les Mémoires de Berlin, année 1761." (In der mir vorliegenden 12. Auflage von 1823 auf S. 295).

[2] Siehe auch die übernächste, mit [1] numerierte Fußnote der folgenden Seite.

[3] Vorläufige Kenntniße für die, so die Quadratur und Rectifikation des Circuls suchen (in den Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Teil II, Abschnitt I, S. 140/69).

3. Auf S. 294 der Lambertschen Veröffentlichung[1] in den „Mémoires" der Berliner Akademie,[2] bzw. in der von mir gegebenen Darstellung a. a. O. S. 333 unter (6), findet man als Folgerungen einer Kettenbruch-Entwicklung von tang $\frac{\varphi}{\omega}$ die folgenden Gleichungen:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} R' = \omega M - \varphi P \\ R'' = 3\omega R' - \varphi^2 M \\ R''' = 5\omega R'' - \varphi^2 R' \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ R^{(k)} = (2k-1)\,\omega R^{(k-1)} - \varphi^2 R^{(k-2)}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Dabei bedeuten φ, ω positive Zahlen, und es ist (a. a. O. unter (4)):

$$M = \sin\frac{\varphi}{\omega},\ P = \cos\frac{\varphi}{\omega}.$$

Ersetzt man die Lambertsche Bezeichnung $\frac{\varphi}{\omega}$ durch die in I und III von Gauß benützte $\frac{m}{n}$, so wird:

$$M = P_1,\ P = P_0,$$

und es zeigt die Vergleichung von Gl. (6_1) mit (III_1), daß

$$R' = P_2$$

und in dieser Weise fortfahrend:

$$R'' = P_3,\ R''' = P_4,\ \dots\ R^{(k)} = P_{k+1},$$

d. h. das System der Gleichungen (III) ist identisch mit dem System (6). Die allenfalls denkbare Möglichkeit einer unabhängigen Duplizität der Fälle dürfte aber aus zwei Gründen wohl kaum in Betracht kommen. Denn erstens kann als feststehend gelten (wovon weiter unten noch die Rede sein wird), daß Gauß die einschlägigen Lambertschen Arbeiten gekannt hat, sogar sehr genau gekannt haben muß. Zweitens bezeichnet Gauß in der Überschrift seinen Beweis nicht als einen neuen, sondern

[1] Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes, circulaires et logarithmiques. Lu en 1767.

[2] Haupttitel: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres. Année 1761. Unten: Berlin 1768.

als solchen in einer neuen Gestalt. Es handelt sich also dabei lediglich um die Neugestaltung eines bereits vorhandenen Beweises, und das kann nach Lage der Sache kein anderer sein als der Lambertsche.[1]

Jene Neugestaltung dürfte dann ungefähr in folgender Weise vor sich gegangen sein. Gauß hat natürlich sofort erkannt, daß die Gleichungen (6) bzw. (III) den eigentlichen Kernpunkt des Irrationalitätsbeweises bilden. Nun befolgt er ja bekanntlich in allen seinen Arbeiten das Prinzip, die wahre Genesis seiner Beweise dem vorwitzigen Leser nach Möglichkeit zu verbergen.[2] In dem vorliegenden Falle ist er, wie die Endfassung seines Beweises zeigt, zunächst darauf ausgegangen, die Herkunft der Gleichungen (6) aus einer Kettenbruch-Entwicklung von tang $\frac{\varphi}{\omega}$ nach ihrer Umwandlung in die Gleichungen (III) nicht mehr erraten zu lassen. Hierzu entnimmt er, da ja die Reihen für P_0, P_1 von vornherein gegeben sind, aus der ersten der Gleichungen (III) die Reihe für P_2, darauf ebenso aus der zweiten Gleichung (III) diejenige für P_3 usf. bis P_{k+1}. Werden dann umgekehrt diese Reihen zur Definition der P_k ($k \geqq 2$) gemacht und gewissermaßen als eine glückliche Eingebung unter (I) an die Spitze des ganzen Beweises gestellt, so erscheinen sofort die Gleichungen (III) als deren natürliche Folgerungen und alles weitere verläuft dann, wie in Nr. 1 dargestellt, d. h. ungefähr ebenso wie bei Lambert. Nur gewinnt Gauß durch die Reihenform der P_k den Vorteil, die schließlich beständige Abnahme der P_k kürzer herleiten zu können, als sein Vorgänger die Nullkonvergenz seiner $R^{(k)}$ beweist.[3]

---

[1] Der Legendresche Beweis beruht ausschließlich auf der Kettenbruch-Entwicklung von tang $\frac{m}{n}$ und direkter Anwendung des bekannten Legendreschen Irrationalitätssatzes für gewisse Kettenbrüche.

[2] Vgl. z. B. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie 1 [1901] S. 42: „Die Art der Darstellung ist in den disquisitiones, wie überhaupt in den Gaußschen Arbeiten die Euklidische. Er stellt die Sätze auf und beweist sie, wobei er geradezu mit Fleiß jede Spur der Gedankengänge verwischt, die ihn zu seinen Resultaten geführt haben."

[3] In meiner Darstellung (a. a. O. S. 334), anschließend an die Gleichung:

$$(7)\ R^{(k)} = MB_k - PA_k,$$

4. Im übrigen darf man wohl als sicher annehmen, daß Gauß den fraglichen Beweis keineswegs für die Öffentlichkeit bestimmt hat, da es schwerlich seinen Neigungen entsprochen haben mag, Neubearbeitungen fremder Beweise zu publizieren. Er dürfte sich also wohl den Lambertschen Beweis nur zu eigenem Gebrauch so umgeformt haben, wie er selbst gegebenenfalls ihn publiziert hätte, und er mag dabei an der Ausschaltung jeder Beziehung zu der Lehre von den Kettenbrüchen eine besondere Befriedigung gefunden haben.

Überblickt man nämlich das gewaltige, über fast alle mathematischen Gebiete sich erstreckende Gesamtschaffen von Gauß, so gewinnt man den Eindruck, als müsse sich mit der Zeit eine förmliche Abneigung gegen die Beschäftigung mit unendlichen Kettenbrüchen bei Gauß herausgebildet haben. Bekanntlich hat er 1812 in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe den Quotienten zweier solcher Reihen auf rein formalem Wege in einen unendlichen Kettenbruch verwandelt und ohne jede Konvergenzuntersuchung, ohne jede Angabe, was man unter dem Werte eines unendlichen Kettenbruches zu verstehen habe, eine solche rein formale Beziehung zwischen einer wohldefinierten Funktion und einem unendlichen Kettenbruch als vollgültige Darstellungsformel angesehen (s. Werke 3

---

unter A_k, B_k den $k$ten Teilzähler und -nenner der Näherungsbrüche von $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{\omega} = \left[\frac{\varphi}{\omega}, -\frac{\varphi^2}{2\nu+1}\right]^{\infty}$, verstanden. Da a. a. O. über die Herleitung von Gl. (7) nichts gesagt ist, sei zum leichteren Verständnis noch bemerkt, daß (wegen $A_1 = \varphi$, $B_1 = \omega$) Gl. (7) für $k = 1$ offenbar mit der ersten Gl. (6) zusammenfällt. Da ferner $A_0 = 0$, $B_0 = 1$ zu setzen ist, so findet man mit Hilfe der üblichen Rekursionsformeln:

$$A_2 = 3\omega A_1, \quad B_2 = 3\omega B_1 - \varphi^2,$$

und durch Einsetzen in die zweite Gl. (6):

$$R'' = MB_2 - PA_2,$$

schließlich durch vollständige Induktion die Gl. (7) für beliebige k. —

Ich möchte übrigens die gegebene Gelegenheit noch benützen, um folgende Berichtigungen zur Kenntnis zu bringen. Auf S. 333 in der letzten Gleichung vor den Gleichungen (6) fehlt rechts der Faktor ω. Ferner sind auf S. 334 die ersten 3 auf Gl. (9) folgenden Zeilen bis auf die Silbe Mut zu streichen und zu ersetzen durch: wo also $D = \frac{1}{\sqrt{m^2 + p^2}}$.

S. 134/8). Man vergleiche damit die Ausführlichkeit, mit der sich Gauß über den Wert einer unendlichen Reihe auszudrücken pflegte. Um nur das gerade hier nächstliegende Beispiel anzuführen, so findet sich in unmittelbarem Anschluß an die in Nr. 1, I eingeführten Reihen der folgende Satz: „(Diese Reihen) sind offenbar alle, wenn nicht vom Anfange an, doch nach hinlänglich weiter Fortsetzung konvergent, und zwar mehr als jede abnehmende geometrische Progression. Es hat daher jede einen bestimmten Zahlenwert[1]."

Mag nun auch Gauß im Jahre 1812 gegenüber seinen Kettenbrüchen eine ähnlich scharfe Auffassung nicht besessen haben, so erscheint es doch kaum denkbar, daß ihm in dem langen Zeitraum von 1812 bis zu seinem Todesjahre 1855 (beiläufig bemerkt im Zeitalter Cauchys [1789—1857]) die fragliche Lücke entgangen sein sollte. Ob er jemals versucht hat, sie auszufüllen, muß dahingestellt bleiben. Fest steht nur so viel, daß die Lösung dieser Aufgabe der Nachwelt verblieben ist und zuerst 1866/7 von L. W. Thomé durchgeführt wurde. Auf diese Weise hat die Öffentlichkeit nie erfahren, welchen Standpunkt Gauß gegenüber der Frage nach der Konvergenz und Geltung einer Kettenbruch-Entwicklung schließlich eingenommen hat.

Merkwürdigerweise hätte sich vielleicht gerade im Anschluß an die Veröffentlichung des hier besprochenen Nachlaßfragmentes eine Gelegenheit geboten, in dieser Hinsicht gewisse Aufklärungen zu gewinnen, wenn es dem Herausgeber nicht durch einen unbegreiflichen Mißgriff gelungen wäre, das zu verhindern. Am Schlusse seiner Anmerkungen macht er nämlich die folgende recht sonderbare Mitteilung: „Über die hier in Betracht kommenden Untersuchungen Lamberts und Legendres, sowie namentlich über die von letzterem a. a. O. gegebene Darstellung hat übrigens Gauß eine kritische Besprechung aufgezeichnet, die jedoch hier nicht abgedruckt ist."[1](!)

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß die Veröffentlichung dieser Gaußschen Aufzeichnungen auch heute noch ein erhebliches Interesse beanspruchen dürfte. Und da andererseits die diktatorische Verfügung des Herausgebers in Betreff ihrer Unterdrückung sich wohl schwerlich bis zu ihrer Vernichtung

[1] Die Sperrung ist Zusatz des Verfassers.

erstreckt haben wird, so müßten sie sich zur Zeit wohl wieder in dem Göttinger Gauß-Archiv befinden. In dieser Voraussetzung versuchte ich vor einiger Zeit, durch Vermittlung eines Göttinger Kollegen etwas Näheres darüber zu erfahren und eventuell in die fragliche Niederschrift Einsicht bzw. die Möglichkeit zu ihrer Veröffentlichung zu gewinnen. Darauf erfolgte zunächst überhaupt keine Antwort, dagegen erhielt ich nach Wiederholung meiner Anfrage den schriftlichen Bescheid, es seien von Gauß beschriebene Zettel in so unübersehbarer Menge vorhanden, daß es unmöglich erscheine, die in Frage kommenden herauszufinden.

Damit scheint der Zugang zu diesem Nibelungenhort bis auf weiteres verschüttet. Sollten aber vielleicht die vorstehenden Mitteilungen einen der jüngeren in Göttingen sich aufhaltenden Mathematiker zur Wiederaufnahme und Weiterverfolgung der verlorenen Spur anregen, so wäre damit der von mir beabsichtigte Hauptzweck der vorstehenden Veröffentlichung erreicht, selbst wenn durch die Wiederauffindung jener Gaußschen Aufzeichnungen und deren Inhalt die Tragweite der hier zugunsten Lamberts durchgeführten Reklamation eine kleine Einbuße erleiden sollte: „Amicus Plato, magis amica veritas.“ In jedem Falle verbleibt ja für Lambert das immerhin ansehnliche Verdienst, die für den Gaußschen Beweis grundlegenden Gleichungen (III) bzw. (6) und deren Verwertung für den vorliegenden Zweck mindestens ein halbes Jahrhundert vor Gauß entdeckt zu haben.