Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 10. Abhandlung

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen und der Entwicklungen nach Kugelfunktionen

von

Heinrich Burkhardt

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11₂, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11₃, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14₃, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14₂, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17₁, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1,20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 10. Abhandlung

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen und der Entwicklungen nach Kugelfunktionen

von

Heinrich Burkhardt

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Der Satz von der Entwickelbarkeit einer geeigneten Bedingungen genügenden Funktion einer reellen Veränderlichen nach den Legendreschen Polynomen (zonalen Kugelfunktionen) wird gewöhnlich folgendermaßen bewiesen: zuerst wird gezeigt, daß er richtig ist, wenn die Veränderliche in einen der Endpunkte des Intervalls $(-1 \cdots +1)$ fällt, für das die Entwicklung gelten soll; daraus wird dann die Entwicklung einer Funktion zweier Winkel nach Kugelflächenfunktionen abgeleitet, und aus diesem allgemeinen Satz wird erst wieder durch Spezialisierung der zuerst genannte gewonnen.[1]) Doch hat schon vor geraumer Zeit H. Laurent[2]) eine Beweismethode skizziert, bei der zuerst die mit einem bestimmten Glied abgebrochene Reihe durch die von ihm neu gefundene Christoffelsche Formel summiert und dann die Frage mit Hilfe der Laplaceschen asymptotischen Darstellung der Kugelfunktionen für große Werte des Index auf die entsprechende Frage für trigonometrische Reihen zurückgeführt wird. Das setzt voraus, daß der Sinn, in dem diese Darstellung wirklich als Näherungsformel angesehen werden kann, genau festgelegt und der bei ihrer Benutzung begangene Fehler abgeschätzt wird; was auf dem von Laplace selbst vorgezeichneten Weg mühsam ist[3]), auf dem von Herrn Darboux eingeschlagenen[4]) aber eben die

[1]) Auch der Beweis bei U. Dini, Serie di Fourier, p. 278, macht von Sätzen Gebrauch, die wesentlich der Theorie der Kugelfunktionen zweier Argumente angehören.

[2]) J. de math. (3) 1, 1875, p. 394.

[3]) Man vergleiche etwa die Darstellung bei Dini, Ann. di mat. (2) 7, 1876, p. 265–271.

[4]) J. de math. (3) 4, 1878, p. 40.

allgemeine Theorie des Zusammenhangs zwischen der Größenordnung der Koeffizienten einer Potenzreihe und den auf ihrem Konvergenzkreis gelegenen Singularitäten voraussetzt. Auch hebt schon Darboux hervor, daß die Untersuchung in doppelter Beziehung einer Ergänzung bedarf: es muß einmal gezeigt werden, daß die bei Benutzung der Näherungsformel vernachlässigten Glieder den Schluß nicht stören, und ferner muß, da sie nicht bis an die Enden des genannten Intervalls heran gilt, bei ihrer Integration über das ganze Intervall für die Endstrecken noch eine besondere ergänzende Untersuchung geführt werden. Beides zusammen erfordert viel Raum und Sorgfalt.[1]) Bei dem Versuch, die Darstellung der Sache für Vorlesungszwecke zu vereinfachen, hat sich mir ein Beweisverfahren dargeboten, das von jenen „etwas beschwerlichen Sätzen"[2]) überhaupt nicht mehr Gebrauch macht, sondern statt dessen nur die mit einfacheren Mitteln zu leistende Bestimmung der Größenordnung der Legendreschen Polynome für große Werte des Index benutzt, dabei auch nicht mehr auf die Theorie der trigonometrischen Reihen rekurriert, sondern die dort ausgebildeten Schlußweisen direkt auf die zu untersuchenden Reihen anwendet. Außerdem gebrauche ich von der Theorie der Legendreschen Polynome — um die erforderlichen Formeln gleich hier zusammenzustellen — selbstverständlich die Integraltheoreme

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \gtrless n, \\ \dfrac{2}{2n+1} \text{ für } m = n \end{cases} \qquad 1)$$

[1]) Ib., p. 386—390. Die neue Darstellung desselben Beweisgangs bei W. Kapteyn, nieuw archief voor wiskunde (2) 8, 1907, p. 26, ist in diesen beiden Beziehungen unvollständig. — Die auf den Cauchyschen Residuensätzen und die auf der Theorie der Integralgleichungen beruhenden Beweise fallen auch nicht einfacher aus, wenn der Satz in demselben Umfange bewiesen werden soll.

[2]) C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, p. VII.

und die Christoffelsche Gleichung:

$$\begin{aligned} A_n(x,\mu) &= \tfrac{1}{2}P_0(x)P_0(\mu)+\tfrac{3}{2}P_1(x)P_1(\mu)+\cdots+\frac{2n+1}{2}P_n(x)P_n(\mu) \\ &= \frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)P_n(\mu)-P_n(x)P_{n+1}(\mu)}{x-\mu}; \end{aligned} \tag{2}$$

sonst aber nur noch die im ganzen Intervall geltende Ungleichung:

$$|P_n(x)| \leqq 1, \tag{3}$$

die aus einer bekannten Rekursionsformel[1]) sich ergebende Relation

$$\int_a^b P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right]_a^b \tag{4}$$

und die speziellen Gleichungen:

$$P_0(x) = 1, \tag{5}$$

$$P_n(1) = 1, \tag{6}$$

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{7}$$

§ 1. Bestimmung der Größenordnung der Legendreschen Polynome für große Werte des Index.

Bekanntlich ist für reelle nicht negative α:

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n \leqq e^{-\alpha},$$

also folgt:

$$\left|1-\frac{\alpha+i\beta}{n}\right|^n = \left(1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leqq e^{-\alpha+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2n}}, \tag{8}$$

solange

$$\alpha-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2n} \geqq 0 \tag{9}$$

ist.

---

[1]) Vgl. etwa die Zusammenstellung solcher Rekursionsformeln bei F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, pag. 60—61. Die hier benutzte ist dort mit II bezeichnet.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir aus von der von Laplace gefundenen Gleichung

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^n\, d\varphi \\ &= \Re\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^n\, d\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

und nehmen in ihr die von ihm angegebenen Substitutionen vor:

$$\begin{gathered} x + i\sqrt{1 - x^2} = \xi, \qquad x = \tfrac{1}{2}(\xi + \xi^{-1}), \\ i\sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2}(\xi - \xi^{-1}), \\ a^2 = 1 - \xi^{-2} = 2(1 - x^2) + 2ix\sqrt{1 - x^2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} = z = \frac{u}{\sqrt{n}}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi = \xi\cos^2\frac{\varphi}{2} + \xi^{-1}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \xi(1 - a^2 z^2).$$

Damit geht sie über in:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \Re\,\frac{4\xi^n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}(1 - a^2 z^2)^n \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \Re\,\frac{4\xi^n}{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}}\left(1 - \frac{a^2 u^2}{n}\right)^n \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{n}}}. \end{aligned}$$

Da der reelle Bestandteil einer komplexen Größe, absolut genommen, höchstens gleich ihrem absoluten Betrag, da ferner $|\xi| = 1$ und im ganzen Integrationsintervall

$$1 - \frac{u^2}{n} > \frac{1}{2}$$

ist, so folgt daraus weiter:

$$|P_n(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}} \left|1 - \frac{a^2 u^2}{n}\right|^n du.$$

Wird die dabei auftretende Größe $a^2 u^2$ in ihren reellen und imaginären Bestandteil zerlegt:

$$a^2 u^2 = \alpha + i\beta,$$

so ergibt sich:

$$\alpha = 2(1-x^2)u^2, \quad \beta = 2x\sqrt{1-x^2}\,u^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 4(1-x^2)u^4,$$

$$\alpha - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2n} = 2(1-x^2)u^2\left(1 - \frac{u^2}{n}\right) \geq (1-x^2)u^2;$$

die Bedingung 9) ist also für alle x des Intervalls $(-1 \cdots +1)$ und für alle u des Integrationsintervalls erfüllt. Daher kann man die Formel 8) anwenden und schreiben:

$$|P_n(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}} e^{-(1-x^2)u^2} du < \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \int\limits_0^{\infty} e^{-(1-x^2)u^2} du,$$

d. i.[1]):

$$|P_n(x)| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{12}$$

Daraus ergibt sich weiter, mit Hilfe einer ebenfalls bekannten Rekursionsformel[2]):

$$|P_n'(x)| < \frac{4\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}. \tag{13}$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Differenz

$$P_{n+2}(x) - P_n(x)$$

---

[1]) Daß in der Formel 12) die zweite und nicht wie bei Laplace die vierte Wurzel aus $1-x^2$ im Nenner erscheint, liegt an der roheren Abschätzung und ist für unseren Zweck gleichgültig.

[2]) Gleichung A) an der p. 5 unter 1) zitierten Stelle.

an, so erhält man unter dem Integralzeichen außer den in 10) auftretenden noch einen Faktor:

$$(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^2 - 1,$$

der durch die Substitutionen 11) in

$$a^2(\xi^2 - 2\,\xi^2 z^2 + \xi^2 a^2 z^4)$$

übergeht. Dabei ist der absolute Betrag der Klammer höchstens gleich $\frac{5}{2}$, der von a^2 ist $2\sqrt{1 - x^2}$; es ergibt sich also:

$$|P_{n+2}(x) - P_n(x)| < \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}. \tag{14}$$

Das Wesentliche an diesen Resultaten für uns ist, daß die Funktion

$$\sqrt{n}\,|P_{n+2}(x) - P_n(x)|$$

im ganzen Intervall $(-1 \cdots +1)$, einschließlich der Grenzen, die Funktionen

$$\sqrt{n}\,|P_n(x)|, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\,|P'_n(x)|$$

aber wenigstens in jedem Teilintervall, das ganz im Innern dieses Intervalls liegt, unterhalb einer von n und x unabhängigen endlichen Grenze bleiben.

§ 2. Beweis der Entwickelbarkeit einer Funktion von beschränkter Schwankung nach den Legendreschen Polynomen.

Nach dieser Vorbereitung gliedert sich nun der eigentliche Beweis folgendermaßen:

I. Aus der Definition der Funktion $A_n(x, \mu)$ ergibt sich unter Zuhilfenahme von 4) und 7):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x} A_n(x,\mu)\,d\mu &= \tfrac{1}{2}P_0(x)(P_1(x)+1) + \tfrac{1}{2}P_1(x)(P_2(x) - P_0(x))\\ &+ \cdots + \tfrac{1}{2}P_n(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}P_n(x)P_{n+1}(x),\end{aligned} \tag{15}$$

also wegen (12):

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{x} A_n(x, \mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2}; \tag{16}$$

und zwar gleichmäßig in jedem Teilintervall, das ganz im Innern von $(-1 \cdots +1)$ liegt.

II. Seien a, b irgend zwei Punkte des Intervalls $(-1 \cdots +1)$. Wenn x nicht dem Intervall $(a \ldots b)$ angehört, so ist die Funktion $(x-\mu)^{-1}$, als Funktion von μ betrachtet, in diesem Intervall monoton; man kann sie also bei Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes vor das Integralzeichen ziehen und findet so: es gibt in diesem Intervall mindestens einen Punkt c von der Art, daß die Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b A_n(x,\mu)\, d\mu = \frac{n+1}{2} \Bigg\{ & \frac{1}{x-a} \left(\frac{P_{n+1}(x)}{2n+1} [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)]_a^c \right. \\ & \left. - \frac{P_n(x)}{2n+3} [P_{n+2}(\mu) - P_n(\mu)]_a^c \right) \\ & + \frac{1}{x-b} \left(\frac{P_{n+1}(x)}{2n+1} [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)]_c^b \right. \\ & \left. - \frac{P_n(x)}{2n+3} [P_{n+2}(\mu) - P_n(\mu)]_c^b \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wendet man dann auf die hier auftretenden Funktionen von a, b, c die Ungleichung 14), auf die von x die Ungleichung 3) an, so findet man:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b A_n(x, \mu)\, d\mu = 0, \tag{18}$$

und zwar gleichmäßig für alle x von jedem Teilintervall von $(-1 \ldots +1)$, das mit $(a \ldots b)$ keinen Punkt (auch keinen Endpunkt) gemein hat.

III. Aus I und II folgt, daß die Grenzgleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_b^x A_n(x, \mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2}$$

gleichmäßig gilt, wenn x auf ein Intervall $(-1+\varepsilon \ldots 1-\varepsilon)$ und b auf ein Intervall $(-1 \ldots x-\varepsilon)$ beschränkt wird; wobei ε irgend eine positive Größe < 2 bedeuten kann.

IV. Fällt x mit b zusammen, so kann man nicht so schließen. Man teile dann das Intervall $(a \ldots x)$ durch Einschaltung eines geeignet gewählten Zwischenpunktes — etwa $x - \frac{1}{n}$ — in zwei Teile. Für den ersten dieser Teile gilt die Gleichung 17), und dabei sind $(x-a)^{-1}$ und $(x-b)^{-1}$ höchstens gleich n; es ergibt sich also durch Anwendung der Ungleichungen 12) und 14)

$$\left|\int_a^{x-\frac{1}{n}} A_n(x,\mu)\, d\mu\right| < \frac{n+1}{2n+1} \cdot n \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{(n-1)\pi}}$$

und das ist für $n \geqq 2$ sicher:

$$< \frac{192\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Für den zweiten Teil dagegen benutzen wir zunächst unter dem Integralzeichen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wodurch wir

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{x} A_n(x,\mu)\, d\mu$$

$$= -\frac{n+1}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} \{P_{n+1}(x)\, P_n'(x-\Theta h) - P_n(x)\, P_{n+1}'(x-\Theta h)\}\, dh$$

erhalten, und dann den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, sowie die Ungleichungen 12) und 13); wir finden so:

$$\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x} A_n(x,\mu)\, d\mu\right|$$

$$< \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{16}{\pi} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2},$$

d. h.:

$$< \frac{27}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

Beides zusammen ergibt:

$$\left|\int_a^x A_n(x, \mu)\, d\mu\right| < \frac{60}{(1-x^2)^2}. \tag{19}$$

Man kann also zu jedem ganz im Innern von $(-1 \cdots +1)$ gelegenen Teilintervall eine von a, x und n unabhängige Zahl G so bestimmen, daß die Ungleichung

$$\left|\int_a^x A_n(x, \mu)\, d\mu\right| < G \tag{20}$$

für alle x dieses Teilintervalls, für alle a des Intervalls $(-1 \ldots x)$ und für alle $n \geqq 2$ besteht.

V. Daraus folgt endlich noch: Für jedes ganz im Innern von $(-1 \cdots +1)$ gelegene Teilintervall kann man eine Zahl G so bestimmen, daß die Ungleichung

$$\left|\int_a^b A_n(x, \mu)\, d\mu\right| < G$$

für alle x dieses Teilintervalls und für alle a, b des Intervalls $(-1 \ldots x)$ besteht.

Damit sind nun aber alle Vorbedingungen für die Anwendung der von Herrn C. Jordan[1]) vorgezeichneten Schlußweise auf die Funktion $A_n(x)$ gegeben.

VI. Zunächst ergibt eine abermalige Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes, sobald die Funktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist, auf Grund von 18) die Grenzgleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^b f(\mu) A_n(x, \mu)\, d\mu = 0, \tag{21}$$

und zwar gleichmäßig für alle x von jedem Teilintervall, das mit $(-1 \ldots b)$ keinen Punkt (auch keinen Endpunkt) gemein hat.

---

[1]) Cours d'analyse 2, p. 217 der 1. Auflage. — Die Unentbehrlichkeit eines Resultats wie das hier unter V abgeleitete für derartige Schlüsse hat Herr C. Neumann betont, p. 41 der p. 4 unter 2) zitierten Schrift.

VII. Das Integral

$$\int_{-1}^{x} f(\mu)\, A_n(x,\mu)\, d\mu$$

kann geschrieben werden, wenn die Funktion f an der Stelle x links stetig ist:

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} f(\mu)\, A_n(x,\mu)\, d\mu + f(x-0) \int_{x-\varepsilon}^{x} A_n(x,\mu)\, d\mu$$
$$+ \int_{x-\varepsilon}^{x} (f(\mu) - f(x-0))\, A_n(x,\mu)\, d\mu.$$

Wird auf den letzten Bestandteil wieder der zweite Mittelwertsatz angewendet, so geht er über in:

$$(f(x-\varepsilon) - f(x-0)) \int_{x-\varepsilon}^{c} A_n(x,\mu)\, d\mu,$$

wo c einen Wert zwischen $x - \varepsilon$ und x bedeutet. Man kann dann wegen der vorausgesetzten Stetigkeit und wegen des Satzes V das ε so klein wählen, daß dieser letzte Bestandteil unterhalb einer beliebig vorgegebenen Grenze fällt und auch unter ihr bleibt, wenn nachher n vergrößert wird; und dann kann man n noch so groß wählen, daß der erste Bestandteil nach VI beliebig klein wird und das Integral im zweiten Bestandteil beliebig wenig von seiner unter III angegebenen Grenze abweicht. So ergibt sich:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{x} f(\mu)\, A_n(x,\mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2} f(x-0), \tag{22}$$

und zwar gleichmäßig in jedem Intervall, das ganz dem Innern von $(-1 \cdots +1)$ angehört und in dem die Funktion $f(x)$ stetig ist.

VIII. Ebenso ergibt sich, wenn $f(x)$ an der betrachteten Stelle x rechtseitig stetig ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x}^{1} f(\mu)\, A_n(x,\mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2} f(x+0). \tag{23}$$

IX. Beide Formeln zusammen geben das zu beweisende Resultat: Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $(-1 \cdots +1)$ von beschränkter Schwankung, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_n(\mu)\, d\mu$$

an jeder Stelle, an der $f(x)$ stetig oder höchstens von der ersten Art unstetig ist, gegen:

$$\tfrac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}. \tag{24}$$

Auch ergibt sich aus dem Beweis die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz für jedes Stetigkeitsintervall der Funktion $f(x)$, das ganz dem Innern von $(-1 \cdots +1)$ angehört.

Soll auch bewiesen werden, daß die Reihe für $x = +1$ gegen $f(x-0)$ konvergiert, so bedarf die Schlußweise nur der Modifikation, daß an Stelle der Christoffelschen Formel die auch sonst für diesen Fall benutzte Formel

$$\tfrac{1}{2} P_0(\mu) + \tfrac{3}{2} P_1(\mu) + \cdots + \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) = \tfrac{1}{2}(P_n'(\mu) + P_{n+1}'(\mu)) \tag{25}$$

herangezogen wird. Dagegen scheint auf diesem Wege nicht bewiesen werden zu können, daß auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz für ein Stetigkeitsintervall statthat, das bis an diesen Punkt heranreicht. Entsprechendes gilt für $x = -1$.

Will man den Beweis zunächst nur für stetige Funktionen führen, so kann man an Stelle der Gleichung 16) die noch einfachere

$$\int_{-1}^{+1} A_n(x, \mu)\, d\mu = 1 \qquad \text{(für jedes } n) \tag{26}$$

benutzen. In der Tat besagt die Benutzung der Gleichung 16) nichts anderes, als daß zunächst für eine spezielle unstetige Funktion, nämlich die durch

$$f(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \mu \\ 0 & \text{für } x > \mu \end{cases} \tag{27}$$

definierte, das Verhalten ihrer Reihenentwicklung an der Sprungstelle untersucht wird.

§ 3. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen.

Die im vorhergehenden entwickelten Schlußweisen erlauben nun auch, den Beweis für die Entwickelbarkeit einer Funktion beschränkter Schwankung in eine harmonische trigonometrische (sog. Fouriersche) Reihe in einem Punkte zu vereinfachen. Abgesehen von dem ersten ziemlich mühsamen Dirichletschen Beweise wird nämlich bei denjenigen Beweisanordnungen, die die Heranziehung der Potentialtheorie oder der Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments vermeiden, immer das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x}$$

benutzt, das doch dieser Theorie eigentlich fremd ist, vielmehr der Theorie der Fourierschen Integrale angehört. Sieht man genauer zu, so findet man, daß dieses Integral nur deswegen eingeführt wird, um für die hier die Stelle der Funktion A_n vertretende Funktion

$$A_n(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \cos(\nu x - \nu\mu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\mu)}{\sin \frac{1}{2}(x-\mu)} \tag{28}$$

den Beweis zu führen, daß das Integral

$$\int_a^b A_n(x, \mu)\, d\mu \tag{29}$$

immer unterhalb einer von a, b, x, n unabhängigen endlichen Grenze bleibt, wie auch die Werte a, b, x im Intervall $(-\pi \cdots + \pi)$ gewählt werden mögen. Das aber kann mit Hilfe der in § 2 unter IV angegebenen Zerlegung auch hier an dem Integral 29) selbst direkt gezeigt werden; man muß dabei nur die für die in Betracht kommenden Werte gültige Doppelungleichung $x \cos x < \sin x < x$ beachten.

Dabei hat man noch den Vorteil, daß man auch Reihen, die nur Kosinus- oder nur Sinusglieder enthalten, direkt behandeln kann, was bisher, abgesehen von einer Andeutung bei

Herrn Kneser,[1]) noch nicht geschehen zu sein scheint. Man kann hier nämlich die in Betracht kommenden endlichen Summen auf die zur Christoffelschen Formel 2) analoge Gestalt bringen:

$$\begin{aligned} A_n(x,\mu) &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \cos\nu x \cos\nu\mu \\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(n+1)x\cos n\mu - \cos nx\cos(n+1)\mu}{\cos x - \cos\mu}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} A_n(x,\mu) &= \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \sin\nu x \sin\nu\mu \\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(n+1)x\sin n\mu - \sin nx\sin(n+1)\mu}{\cos x - \cos\mu}. \end{aligned} \tag{31}$$

Für die erstere gilt dann:

$$\int_0^\pi A_n(x,\mu)\,d\mu = 1; \tag{32}$$

für die letztere hat das zunächst entsprechende Integral keinen so einfachen Ausdruck, im Zusammenhang damit, daß hier die Konstanten nicht mit zu den Eigenfunktionen gehören. Man muß also hier die erste Eigenfunktion $\sin\mu$ mit heranziehen und von

$$\int_0^\pi \sin\mu\, A_n(x,\mu)\,d\mu = \sin x \tag{33}$$

ausgehen. Das bedingt, daß man hier zunächst an die zu entwickelnde Funktion noch die Forderung stellen muß, sie solle an beiden Enden des Intervalls mindestens von der ersten Ordnung Null werden.

Die Behandlung von Funktionen mit Unstetigkeiten ist bei der Reihe, die Sinus- und Cosinusglieder enthält, deswegen einfach, weil hier der Anfangspunkt der Zählung der x gleichgültig ist, es also genügt, eine Unstetigkeit im Nullpunkt anzunehmen, wofür die Gleichung

---

[1]) Math. Ann. 58, p. 95.

$$\int_0^\pi A_n(0, \mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2} \tag{34}$$

dienen kann. Dagegen bei den Reihen, die nur Glieder der einen oder der andern Art enthalten, führt ein entsprechendes Vorgehen zunächst auf die Frage nach der Summe der Reihe

$$\sum \frac{\sin n x}{n} \tag{35}$$

oder der Reihe:

$$\sum \frac{\sin (2n + 1) x}{2n + 1}. \tag{36}$$

Diese Fragen können allerdings auf dem von Fourier,[1]) dem von Abel,[2]) dem von Schlömilch[3]) oder dem von Herrn H. A. Schwarz[4]) eingeschlagenen Wege unabhängig von der allgemeinen Theorie erledigt werden; auch die strenge Durchführung der ersten Fourierschen Ableitung[5]) sollte der heutigen Theorie der unendlichen linearen Gleichungen möglich sein; aber all das bringt doch eine gewisse Komplikation mit sich, so daß in diesem Punkte die Reihen nach Legendreschen Polynomen gegenüber den hier in Rede stehenden als die einfacheren erscheinen. — Analoges gilt für die Sinusreihenentwicklung einer Funktion, die der obengenannten Bedingung nicht genügt.

§ 4. Reihenentwicklungen nach Ultrakugelfunktionen.

Die im vorhergehenden entwickelten Hilfsmittel erlauben auch, die nach den sogenannten Ultrakugelfunktionen fortschreitenden Reihenentwicklungen direkt zu untersuchen. Am bequemsten geht man dabei aus von der von Gegenbauer[6]) gegebenen Integraldarstellung:

---

[1]) Théorie de la chaleur, nr. 179, oeuvres 1, p. 258; vgl. Cesàro-Kowalewski p. 305.

[2]) In der Abhandlung über die Binomialreihe, oeuvres 1, p. 247.

[3]) Z. B. algebraische Analysis, p. 126, 277 (der 5. Auflage).

[4]) Ges. Abhandlungen 2, p. 195.

[5]) Théorie de la chaleur, nr. 167, oeuvres 1, p. 253.

[6]) Wiener Ber. 100, 1891, p. 755, 757.

$$A_n(x) = \int_0^\pi (x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2})^n \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi, \qquad 36)$$

wobei ν eine beliebige komplexe Größe mit positivem reellen Bestandteil bedeuten kann. Sie erlaubt in der Tat, alle erforderlichen Eigenschaften dieser Funktionen rasch abzuleiten. Zunächst gibt die Jacobische Substitution:

$$\cos\varphi = \frac{i\sqrt{1-x^2} - x\cos\psi}{i\sqrt{1-x^2}\cos\psi - x}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sin\psi}{x - i\sqrt{1-x^2}\cos\psi},$$

$$x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{x - i\sqrt{1-x^2}\cos\psi}, \qquad 37)$$

$$d\varphi = \frac{d\psi}{x - i\sqrt{1-x^2}\cos\psi}$$

die zweite Darstellung:

$$A_n(x) = \int_0^\pi (x - i\cos\psi\sqrt{1-x^2})^{-n-2\nu} \sin^{2\nu-1}\psi\, d\psi;$$

der Integrationsweg ist dabei zunächst ein Kreisbogen in der Ebene der komplexen Variabeln $\cos\psi$, kann aber ohne Überschreitung eines singulären Punktes in die gerade Verbindungsstrecke der Punkte $\psi = 0$, $\psi = \pi$ verlegt werden. Die erste Darstellung gibt durch Differentiation:

$$(1 - x^2) A_n' = n(A_{n-1} - x A_n), \qquad 38)$$

die zweite:

$$(1 - x^2) A_n' = (n + 2\nu)(x A_n - A_{n+1}); \qquad 39)$$

Elimination von A_n' aus den beiden so erhaltenen Gleichungen die Rekursionsformel zwischen drei aufeinander folgenden A[1]):

$$2(n + \nu) x A_n = (n + 2\nu A_{n+1} + n A_{n-1}). \qquad 40)$$

Wird diese Gleichung mit derjenigen kombiniert, die aus

[1]) N. Nielsen geht von den Gleichungen 38) und 40), aus denen 39) folgt, aus: Ann. di mat. (3) 14, 1908, p. 69; Ann. éc. norm. (3) 25, 1908, p. 373. Er stellt eine zusammenhängende Darstellung der Theorie dieser Funktionen in Aussicht.

ihr hervorgeht, wenn man x durch ein anderes Argument μ ersetzt, so erhält man

$$2(n+\nu)(x-\mu)A_n(x)A_n(\mu)=(n+2\nu)(A_{n+1}(x)A_n(\mu) - A_n(x)A_{n+1}(\mu)) - n(A_n(x)A_{n-1}(\mu)-A_{n-1}(x)A_n(\mu))$$

und daraus durch Summation [1]):

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{n} 2(n+\nu)\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)}A_n(x)A_n(\mu)\\ &=\frac{\Gamma(n+2\nu+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{A_{n+1}(x)A_n(\mu)-A_n(x)A_{n+1}(\mu)}{x-\mu}.\end{aligned} \tag{41}$$

Wird ferner in der Gleichung 38) n durch $n+1$ ersetzt und die so erhaltene Gleichung mit 39) kombiniert, so kommen die beiden Gleichungen:

$$(n+1)(n+2\nu)A_n=(n+2\nu)A'_{n+1}-(n+1)xA'_n, \tag{42}$$

$$(n+1)(n+2\nu)A_{n+1}=(n+2\nu)xA'_{n+1}-(n+1)A'_n; \tag{43}$$

und wenn in der letzten n durch $n-1$ ersetzt und dann A'_n eliminiert wird, als Verallgemeinerung von 4):

$$\begin{aligned}\int A_n\,dx&=\frac{n+2\nu}{2(n+1)(n+\nu)}A_{n+1}\\ &-\frac{n+2\nu}{2(n+2\nu-1)(n+\nu)}A_{n-1}+\text{Const.}\end{aligned} \tag{44}$$

Endlich ergibt sich durch abermalige Differentiation von 39), unter Benutzung von 42) die Differentialgleichung

$$(1-x^2)A''_n-(1+2\nu)xA'_n+n(n+2\nu)A_n=0 \tag{45}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\frac{dA_n}{dx}\right\}+n(n+2\nu)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}A_n=0$$

und aus ihr die Integraltheoreme

[1]) G. Darboux, J. de math. (3) 4, 1878, p. 381; J. Deruyts, Brux. mém. cour. in 4°, 47, 1886, p. 17.

$$n(n+2\nu)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}A_n(x)\,dx=0 \qquad 46)$$

und:

$$[n(n+2\nu)-m(m+2\nu)]\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}A_m(x)A_n(x)\,dx=0\,. \qquad 47)$$

Damit sind nun aber alle Vorbereitungen erledigt; die Abschätzung der Größe des A für große Werte von n kann wie in § 2 geschehen, indem der Faktor $\sin^{2\nu-1}\varphi$ auf sie gar keinen Einfluß hat, die Formel 44) dient zu demselben Zwecke wie 4), und 41) unter der Bedingung $\Re\nu \leqq \frac{1}{2}$ zu demselben wie 2), da bekanntlich[1]) für große n

$$\frac{\Gamma(n+2\nu+1)}{\Gamma(n+1)}\sim n^{2\nu} \qquad 48)$$

ist. Damit läßt sich unter den angeführten Einschränkungen für ν und unter denselben Annahmen für $f(x)$ wie in § 2 die Gültigkeit der Entwicklungsformel

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}f(x)A_n(x)dx:\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}A_n^2(x)dx \qquad 49)$$

in der Tat beweisen.

Man kann aber auch negative Werte der ganzen Zahl n in Betracht ziehen. Wenn ν wie in § 2 gleich $\frac{1}{2}$ ist, so erhält man auf diesem Wege nichts Neues; andernfalls aber erhält man an Stelle von 41) die folgende Formel:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{n}2(n-\nu)\frac{\Gamma(n-2\nu)}{\Gamma(n+1)}A_{-n}(x)A_{-n}(\mu)\\ &=\frac{\Gamma(n-2\nu)}{\Gamma(n+1)}\frac{A_{-n-1}(x)A_{-n}(\mu)-A_{-n}(x)A_{-n-1}(\mu)}{x-\mu}.\end{aligned} \qquad 50)$$

Damit hat man die zweite Entwicklungsformel:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}f(x)A_{-n}(x)dx:\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}A_{-n}^2(x)dx, \qquad 51)$$

[1]) Die Formel steht nicht in allen Lehrbüchern der Integralrechnung, findet sich aber z. B. bei Boussinesq, Cours II, 2, p. 141.

in der, da

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-n+2\nu+1)} = \frac{\sin(n-2\nu-1)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma(n-2\nu)}{\Gamma(n+1)},$$

ν keiner weiteren Beschränkung unterliegt als der gleich zu Anfang eingeführten, daß sein reeller Teil positiv sein soll.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob man auch für andere als ganzzahlige Werte von n (resp. von $n+2\nu$) entsprechende Entwicklungen müßte bekommen können. Man erkennt aber bald, daß das nicht möglich sein kann, daß nicht alle unsere Folgerungen für andere als die genannten Werte Gültigkeit haben können. Es müßte sonst auch für beliebige voneinander verschiedene Werte von m und n

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} A_m(x) A_n(x)\, dx = 0$$

sein, im Widerspruch mit einem Satze von Herrn E. Schmidt.[1]) In der Tat hat schon Herr E. W. Hobson[2]) darauf hingewiesen, daß das Integral 36) zwar sowohl für positive wie für negative Werte von x je einen Zweig einer analytischen Funktion darstellt, daß aber diese Zweige im allgemeinen nicht analytische Fortsetzungen voneinander sind. Läßt man nämlich x von der positiven Seite her der Null sich nähern und nimmt dabei die Basis der n^{ten} Potenz in 36) zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ mit dem Arcus $\frac{\pi}{2}$, so muß man sie aus Stetigkeitsrücksichten[3]) zwischen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \pi$ mit dem Arcus $-\frac{\pi}{2}$ nehmen, so daß man erhält:

---

[1]) Vgl. Rieß, Paris C. R. 143, p. 738.

[2]) Lond. trans. 187, 1896, p. 496.

[3]) Wollte man diese Rücksichten nicht nehmen, so würden durch die partiellen Integrationen, die zu den Formeln 46) und 47) führen, noch weitere Glieder vom Integralzeichen frei werden.

$$\lim_{x=+0} A_n(x) = 2\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^n\varphi \sin^{2\nu-1}\varphi|\, d\varphi$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}. \tag{52}$$

Läßt man aber x von der negativen Seite her der Null sich nähern und nimmt die Basis der Potenz in dem ersten Teilintervall wieder mit dem Arcus $\frac{\pi}{2}$, so muß man sie im zweiten mit dem Arcus $\frac{3\pi}{2}$ nehmen, so daß man erhält:

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = e^{n\pi i}\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}. \tag{53}$$

Es ergibt sich also:

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = e^{n\pi i}\lim_{x=+0} A_n(x). \tag{54}$$

Ebenso wird erhalten:

$$\lim_{x=-0} A_n'(x) = e^{(n-1)\pi i}\lim_{x=+0} A_n'(x). \tag{55}$$

Für ganzzahlige, nicht negative Werte von n folgt:

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = \lim_{x=+0} A_n(x), \qquad \lim_{x=-0} A_n'(x) = \lim_{x=+0} A_n'(x); \tag{56}$$

für gerade. weil dann:

$$e^{n\pi i} = 1, \quad \cos\frac{n-1}{2}\pi = 0, \quad \text{also} \quad A_n'(+0) = A_n'(-0) = 0,$$

für ungerade weil dann:

$$e^{(n-1)\pi i} = 1, \quad \cos\frac{n\pi}{2} = 0, \quad \text{also} \quad A_n(+0) = A_n(-0) = 0.$$

Für andere Werte von n dagegen findet solche Übereinstimmung nicht statt und kann auch durch andere Verfügung über die Werte der sonst noch in den Integralen auftretenden Wurzelgrößen nicht für A_n und A'_n zugleich erreicht werden[1]).

Eine entsprechende Untersuchung der zweiten Formel gibt[2]):

$$\lim_{x=+0} A_n(x) = \cos\frac{(n+2\nu)\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{-n-2\nu+1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{-n+1}{2}\right)} \tag{57}$$

und[3]):

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = e^{(n+2\nu)\pi i}\lim_{x=+0} A_n(x), \tag{58}$$

also noch das Resultat, daß die Gleichungen 50) auch in dem Falle gelten, daß $n+2\nu$ eine (nicht positive) ganze Zahl ist.

Einer Übertragung der Resultate dieses Paragraphen auf die noch allgemeineren Jacobi-Tschebyscheffschen Polynome steht nichts im Wege, wenn man die Abschätzung ihrer Größenordnung den Untersuchungen von Darboux entnehmen will; will man das nicht, so begegnet man der Schwierigkeit, daß eine zu 36) analoge Integraldarstellung für sie nicht zu existieren scheint. —

Nachdem die vorstehenden Untersuchungen der Akademie bereits vorgelegt waren, habe ich durch die Freundlichkeit des Herrn Verfassers zwei neuere Abhandlungen von E. W. Hobson über denselben Gegenstand (Lond. math. proc. (2) 6, 1908, p. 390; 7, 1909, p. 24) erhalten. Der hier mit § 2, V bezeichnete Satz wird auch in ihnen auf dem Umwege über

[1]) Dieser letzte Punkt bleibt bei Hobson unerörtert.

[2]) Die Übereinstimmung der Formeln 52) und 57) folgt aus einer bekannten Formel der Theorie der Gammafunktionen.

[3]) Ein Widerspruch zwischen den Beziehungen 54) und 58) liegt insofern nicht vor, als der erste Ausdruck von A'_n in denjenigen Fällen versagt, in welchen der zweite für A_n brauchbar ist. Man könnte allerdings den Gültigkeitsbereich der Ausdrücke durch Heranziehung von Schleifenintegralen erweitern, müßte aber dann mit Hobson für jedes Stück der Schleife die den Wurzelgrößen beizulegenden Werte besonders ermitteln.

trigonometrische Reihen gewonnen. Die dort behandelte Frage nach den zuläßigen Unstetigkeiten der zu entwickelnden Funktion in einem Endpunkt des Intervalls ist hier nicht berührt; man erkennt übrigens, daß sie sich auch mit den hier entwickelten Hilfsmitteln teilweise erledigen läßt — nicht vollständig, wegen des in der Note 1) von p. 7 berührten Umstandes.