Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1941. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1941

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Rekursionsformeln für den Inhalt gewisser Polyeder.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Dezember 1941.

1. Beginnen wir mit dem Fall von $n = 2$ Dimensionen. Hier betrachten wir Polygone Π, die aus endlich vielen Rechtecken

$$0 < x_1 \leqq x_1^{(\lambda)}, \quad 0 < x_2 \leqq x_2^{(\lambda)}$$

($\lambda = 1, \ldots, l$) durch Bildung ihrer Vereinigungsmenge gewonnen werden. Legt man eine solche Numerierung der Rechtecke zugrunde, daß

$$x_2^{(\lambda)} \geqq x_2^{(\lambda+1)} \quad (1 \leqq \lambda \leqq l) \tag{1}$$

gilt, so wird der Flächeninhalt von Π gegeben durch

$$V_2 = \sum_{\lambda=1}^{l}{}' (x_2^{(\lambda)} - x_2^{(\lambda+1)}) \ \mathrm{Max}\ (x_1', \ldots, x_1^{(\lambda)}) \tag{2}$$

(darin $x_2^{(l+1)} = 0$ gesetzt), somit in dem besonderen Falle, daß $x_2' > x_2'' > \ldots > x_2^{(l)} > 0$ und $0 < x_1' < x_1'' < \ldots < x_1^{(l)}$ ist (ein Fall, auf den sich der allgemeine Fall zurückführen läßt[1]) durch

$$V_2 = \sum_{\lambda=1}^{l}{}' x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} - \sum_{\lambda=1}^{l-1}{}' x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda+1)}. \tag{3}$$

Das Folgende betrifft eine Verallgemeinerung dieser Inhaltsbestimmung auf drei und mehr Dimensionen[2].

2. Seien $x_1, \ldots, x_n$ cartesische Koordinaten im n-dimensionalen Raum. Nur Punkte, deren sämtliche Koordinaten $\geqq 0$ sind, kommen weiterhin in Betracht, u. zw. vor allem Punkte

---

[1] Vgl. Nr. 6, Formel (19).

[2] Im Falle ganzzahliger Koordinaten $x_\nu^{(\lambda)}$ gewinnt man damit zugleich für gewisse Gitterpunktmengen eine Bestimmung der Anzahl ihrer Punkte (vgl. Anm. 4).

in dem durch $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ gekennzeichneten positiven Teil $\mathfrak{T}$ des Raumes und nur aushilfsweise Punkte am Rand von $\mathfrak{T}$ (für die ein Teil der Koordinaten $= 0$ ist). Die Menge aller Punkte mit $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ heiße $\overline{\mathfrak{T}}$. Mit $\mathfrak{S}_b^a$, bzw. $\mathfrak{S}_b^\infty$ bezeichnen wir den in $b < x_n \leqq a$, bzw. in $x_n > b$ gelegenen Teil von $\mathfrak{T}$, hierbei $0 \leqq b < a$ angenommen. Es ist

$$\mathfrak{S}_b^a + \mathfrak{S}_a^\infty = \mathfrak{S}_b^\infty. \tag{4}$$

Der n-dimensionale Rauminhalt eines in $\mathfrak{T}$ gelegenen Polyeders Π werde mit $V(\Pi)$ oder auch mit $V_n(\Pi)$ bezeichnet. Offenbar ist (wie man aus (4) für $b = 0$, sowie aus $\mathfrak{S}_0^\infty = \mathfrak{T}$ und $\Pi = \mathfrak{T}\Pi$ erkennt)

$$V(\Pi) = V(\mathfrak{S}_0^a \Pi) + V(\mathfrak{S}_a^\infty \Pi), \tag{5}$$

wobei beispielsweise $\mathfrak{S}_0^a \Pi$ den Durchschnitt von $\mathfrak{S}_0^a$ mit Π bedeutet.

Ist $P = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so werde mit P^n der durch Projektion auf eine Ebene $x_n = \text{const.}$ erhältliche Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ eines $(n-1)$-dimensionalen $(x_1 \ldots x_{n-1})$-Raumes bezeichnet; ferner werde, falls $\xi_n \geqq a$ ist, mit $P(x_n - a)$ der Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n - a)$ bezeichnet. Da für die Projektion P^n von P der Wert der x_n-Koordinate des Punktes P belanglos ist, gilt

$$P^n(x_n - a) = P^n. \tag{6}$$

3. Es seien nun endlich viele Punkte

$$P_\lambda = (x_1^{(\lambda)}, \ldots, x_n^{(\lambda)}) \qquad (1 \leqq \lambda \leqq l)$$

aus $\mathfrak{T}$ gegeben. Wir betrachten dann das Polyeder $\Pi = \Pi(P_1, \ldots, P_l)$, das durch Vereinigung der rechtwinkligen Parallelotope

$$0 < x_1 \leqq x_1^{(\lambda)}, \ldots, 0 < x_n \leqq x_n^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{7}$$

entsteht[3]. Das Volumen dieses Polyeders werde mit $V_n(P_1, \ldots, P_l)$ oder auch mit

---

[3] Das Parallelotop (7) werden wir auch mit $k(P_\lambda)$ bezeichnen. (Es ist, wenn der positive Teil $\mathfrak{T}$ des Raumes als „Grundmenge" (Fundamental-

$$V_n\begin{pmatrix} x_1', \ldots, x_n' \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(l)}, \ldots, x_n^{(l)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

bezeichnet[4]. Wir wollen übrigens die Bezeichnung (8) auch noch in dem Falle anwenden, daß einige der Zahlen $x_n^{(\lambda)}$ gleich null sind[5] (wo also für den betreffenden Index λ ein Parallelotop (7) gar nicht vorliegt); es soll dann beispielsweise

$$V_n\begin{pmatrix} x_1', \ldots, x_{n-1}', x_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(l)}, \ldots, x_{n-1}^{(l)}, 0 \end{pmatrix} = V_n\begin{pmatrix} x_1', \ldots\ldots\ldots, x_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(l-1)}, \ldots, x_n^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

gesetzt, analog allgemein unter (8) der entsprechende Ausdruck nach Weglassung der Punkte P_λ mit $x_n^{(\lambda)} = 0$ verstanden werden. In dem Falle, daß alle $x_n^{(\lambda)} = 0$ sind, werde unter (8) die Zahl 0 verstanden.

Sind in (8) alle $x_n^{(\lambda)} \geqq a > 0$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$, so ist offenbar[6]

$$V_n(\mathfrak{S}_a^\infty \cdot \Pi(P_1, \ldots, P_l)) = V_n(P_1(x_n - a), \ldots, P_l(x_n - a)) \tag{9}$$

---

menge) genommen wird, das Parallelotop $k(P_\lambda)$ bzw. das Polyeder Π nichts anderes als die „komprimierte Hülle" der aus dem einzigen Punkt P_λ bzw. der aus den Punkten $P_1, \ldots, P_l$ bestehenden Punktmenge; vgl. hierüber „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren" Note II, diese Sitz.ber., Jgg. 1940, S. 69 ff., Nr. **1** und **7** und Note V, ebenda, Jgg. 1941, S. 1 ff., Nr. **3**.

[4] Sind alle $x_n^{(\lambda)}$ ganze positive Zahlen, die Punkte P_λ also Gitterpunkte in $\mathfrak{T}$, dann ist das Volumen (8) natürlich zugleich die Anzahl der Gitter-Punkte aus $\mathfrak{T}$, die dem Polyeder $\Pi(P_1, \ldots, P_l)$ angehören. Es sind auch Fragen nach der Anzahl der Gitterpunkte in gewissen derartigen Gitterpunktmengen (vgl. diese Sitz.ber. 1941, S. 23* ff., Sitzung vom 15. 11. 1941, Punkt 5 und 6) der Anstoß für die vorliegenden Betrachtungen gewesen. In dem besonderen Fall, daß die Punkte P_λ „unabhängig" sind (vgl. Anm. 10), handelt es sich um Bestimmung der Anzahl der Punkte einer komprimierten Gitterpunktmenge bei Kenntnis der Menge ihrer „Eckpunkte", bzw. im allgemeinen Fall bei Kenntnis irgend einer „erzeugenden Menge" (vgl. Note II, l. c.[3], § 4, Nr. **18**, S. 86).

[5] Man kann übrigens überhaupt den Fall miteinbeziehen, daß der Wert Null unter den Koordinaten der Punkte P_λ auftritt, ein solcher Punkt P_λ aber dann natürlich ohne Einfluß auf den Wert von (8) ist.

[6] Es ist ja, wenn wir Σ zur Bezeichnung der Vereinigungsmenge schreiben, $\Pi(P_1, \ldots, P_l) = \Sigma\, k(P_\lambda)$ und (wegen der Vertauschbarkeit von Ver-

und

$$V_n\left(\mathfrak{S}_0^a \cdot \Pi\,(P_1, \ldots, P_l)\right) = V_n\begin{pmatrix} x_1', \ldots, x_{n-1}', a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(l)}, \ldots, x_{n-1}^{(l)}, a \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Sind im besonderen alle $x_n^{(\lambda)}$ gleich derselben Zahl a $(\geqq 0)$ und ist $n > 1$, so ist ersichtlich

$$V_n\begin{pmatrix} x_1', \ldots, x_{n-1}', a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(l)}, \ldots, x_{n-1}^{(l)}, a \end{pmatrix} = a \cdot V_{n-1}\begin{pmatrix} x_1', \ldots, x_{n-1}' \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(l)}, \ldots, x_{n-1}^{(l)} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

4. Falls die Dimensionszahl $n = 1$ ist, gilt

$$V_1\,(P_1, \ldots, P_l) = V_1\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_1^{(l)} \end{pmatrix} = \mathrm{Max}\,(x_1', \ldots, x_1^{(l)}). \tag{12}$$

Falls die Punkteanzahl $l = 1$ ist, gilt

$$V_n\,(P_1) = V_n\,(x_1', \ldots, x_n') = x_1'\,x_2' \ldots x_n'. \tag{13}$$

Liegt keiner dieser beiden Fälle vor und nehmen wir an, die Numerierung der Punkte $P_1, \ldots, P_l$ sei so vorgenommen, daß alle $x_n^{(\lambda)} \geqq x_n^{(l)}$ seien $(1 \leqq \lambda \leqq n)$, dann folgt aus (5), wenn wir darin $a = \mathrm{Min}\,(x_n', \ldots, x_n^{(l)}) = x_n^{(l)}$ setzen und (10), (11), (9) sowie

$$V_n\,(P_1\,(x_n - x_n^{(l)}), \ldots, P_l\,(x_n - x_n^{(l)})) = \\ = V_n\,(P_1\,(x_n - x_n^{(l)}), \ldots, P_{l-1}\,(x_n - x_n^{(l)}))$$

beachten, die *Rekursionsformel*[7]:

$$V_n\,(P_1, \ldots, P_l) = x_n^{(l)}\,V_{n-1}\,(P_1^n, \ldots, P_l^n) + \\ + V_n\,(P_1\,(x_n - x_n^{(l)}), \ldots, P_{l-1}\,(x_n - x_n^{(l)})) \tag{R}$$

mit $n \geqq 2$, $l \geqq 2$, $x_n^{(l)} = \mathrm{Min}\,(x_n', \ldots, x_n^{(l)})$.

---

einigung und Durchschnittsbildung) $\mathfrak{S}_a^\infty \Sigma\, k\,(P_\lambda) = \Sigma\, \mathfrak{S}_a^\infty\, k\,(P_\lambda)$; das letztgenannte Polyeder aber ist kongruent und daher inhaltsgleich mit $\Sigma\, k\,(P_\lambda\,(x_n - a)) = \Pi\,(P_1\,(x_n - a), \ldots, P_l\,(x_n - a))$.

[7] Formel (R) gilt übrigens auch noch für $x_n^{(l)} = 0$, wie aus den früheren Festsetzungen über diesen Fall folgt.

Im ersten Summanden ist die Anzahl der Dimensionen, im zweiten die Anzahl der Punkte vermindert; fortgesetzte Anwendung der Rekursionsformel (R) gestattet also Zurückführung der Berechnung von $V_n(P_1, \ldots, P_l)$ auf (12) und (13).

5. Denkt man die Numerierung der Punkte $P_1, \ldots, P_l$ speziell so vorgenommen, daß $x_n' \geqq x_n'' \geqq \ldots \geqq x_n^{(l)}$ ist, dann gewinnt man aus (R) durch vollständige Induktion (Anwendung der Rekursionsformel auf den letzten Summanden in (R) bzw. in (14)) unter Beachtung von (6) die für $0 \leqq m \leqq l-2$ gültige Formel

$$V_n(P_1, \ldots, P_l) = \sum_{\mu=0}^{m} (x_n^{(l-\mu)} - x_n^{(l-\mu+1)})\, V_{n-1}(P_1^n, \ldots, P_{l-\mu}^n) + \\ + V_n(P_1(x_n - x_n^{(l-m)}), \ldots, P_{l-m-1}(x_n - x_n^{(l-m)})) \quad (14)$$

(darin $x_n^{(l+1)} = 0$ gesetzt). Wegen der gemäß (13) geltenden Gleichung $V_n(P_1(x_n - x_n'')) = (x_n' - x_n'')\, V_{n-1}(P_1^n)$ folgt hieraus für $m = l-2$ (wenn man noch $l - \mu = \lambda$ setzt) die *Rekursionsformel*

$$V_n(P_1, \ldots, P_l) = \sum_{\lambda=1}^{l} (x_n^{(\lambda)} - x_n^{(\lambda+1)})\, V_{n-1}(P_1^n, \ldots, P_\lambda^n) \quad (R^*)$$

mit $n \geqq 2, l \geqq 1$ und

$$x_n' \geqq x_n'' \geqq \ldots \geqq x_n^{(l)} \geqq x_n^{(l+1)} = 0, \quad (15)$$

wodurch die n-dimensionalen auf $(n-1)$-dimensionale Inhaltsbestimmungen zurückgeführt sind.

6. Angewendet auf $n = 2$ erhält man aus (R^*) gemäß (12) die Formel

$$V_2(P_1, \ldots, P_l) = \sum_{\lambda=1}^{l} (x_2^{(\lambda)} - x_2^{(\lambda+1)})\, M^{(\lambda)} \quad (16)$$

$$\text{mit } x_2' \geqq x_2'' \geqq \ldots \geqq x_2^{(l)} \geqq x_2^{(l+1)} = 0,$$

wenn

$$\text{Max}(x_1', \ldots, x_1^{(\lambda)}) = M^{(\lambda)} \quad (1 \leqq \lambda \leqq l)$$

gesetzt ist. Bestimmt man nun die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \nu_{k+1} = l + 1$ so, daß

$$x_1^{(\lambda)} \leqq x_1^{(\nu_h)} \qquad \text{für } \nu_h \leqq \lambda < \nu_{h+1},\ 1 \leqq h \leqq k$$

und

$$x_1^{(\nu_h)} < x_1^{(\nu_h+1)}, \qquad 1 \leqq h < k \tag{17}$$

ist[8], dann wird $M_\lambda = x_1^{(\nu_h)}$ für $\nu_h \leqq \lambda < \nu_{h+1}$ und aus (16) ergibt sich (darin $x_2^{(\nu_k+1)} = 0$ gesetzt)

$$V_2(P_1, \ldots, P_l) = \sum_{h=1}^{k} x_1^{(\nu_h)} (x_2^{(\nu_h)} - x_2^{(\nu_h+1)}) = \\ = V_2(P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \ldots, P_{\nu_k}). \tag{18}$$

Um in der Summe (18) solche Summanden wegzulassen, für die $x_2^{(\nu_h)} - x_2^{(\nu_h+1)} = 0$ ist, zerlegen wir die Zahlenfolge $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ in Abschnitte derart, daß in einen Abschnitt alle Zahlen ν_h mit gleichem Wert von $x_2^{(\nu_h)}$ aufgenommen sind; ist p die Anzahl der Abschnitte und umfaßt der i-te Abschnitt die Zahlen ν_h mit $h_{i-1} + 1 \leqq \nu \leqq h_i$ (wobei $h_0 = 0$ zu setzen ist), so hat man (wenn man μ_i für ν_{h_i} schreibt)

$$x_2^{(\nu_h)} = x_2^{(\mu_i)} \qquad \text{für } h_{i-1} < h \leqq h_i, \qquad 1 \leqq i \leqq p$$

und

$$x_2^{(\mu_i)} > x_2^{(\mu_i+1)}.$$

Aus (18) ergibt sich dann

$$V_2(P_1, \ldots, P_l) = \sum_{i=1}^{p} x_1^{(\mu_i)} (x_2^{(\mu_i)} - x_2^{(\mu_i+1)}) = \\ = V_2(P_{\mu_1}, \ldots, P_{\mu_p}) \tag{19}$$

mit

$$x_2^{(\mu_1)} > x_2^{(\mu_2)} > \ldots > x_2^{(\mu_p)} > x_2^{(\mu_p+1)} = 0$$

$$0 < x_1^{(\mu_1)} < x_1^{(\mu_2)} < \ldots < x_1^{(\mu_p)}.$$

[8] Falls auch Punkte P_λ auftreten, für welche $x_1^{(\lambda)} = 0$ ist (vgl. Anm. 5), dann ist für ν_1 der kleinste Wert von λ zu nehmen, für den $x_1^{(\lambda)} > 0$ ist. Andernfalls ist $\nu_1 = 1$ zu setzen.

Von den Punkten P_{μ_i} gehört keiner einem Parallelogramm $k(P_{\mu_j})$ mit $j \neq i$ an, während die Koordinaten aller anderen einem Parallelogramm $k(P_{\mu_i})$ angehörenden Punkte P_λ in der Formel (19) nicht mehr auftreten[9]. Dies entspricht der Tatsache, daß $\Pi(P_1, \ldots, P_l) = \Pi(P_{\mu_1}, \ldots, P_{\mu_p})$ ist.

7. Als Beispiel (auf das wir in Nr. **8** zurückgreifen) betrachten wir in der Ebene die acht Punkte

$$\begin{array}{llll} P_1 = (1, 5), & P_2 = (2, 4), & P_3 = (1, 4), & P_4 = (2, 3), \\ P_5 = (4, 2), & P_6 = (3, 2), & P_7 = (5, 1), & P_8 = (4, 1). \end{array} \tag{20}$$

Ersichtlich ist hier $\Pi(P_1, \ldots, P_8) = \Pi(P_1, P_2, P_5, P_7)$, da beispielsweise P_3, weil zu $k(P_2)$ gehörig, weggelassen werden kann. Gemäß (19) ergibt sich dann $V_2(P_1, P_2, P_5, P_7) = 14$.

8. Um noch ein Beispiel im 3-dimensionalen Raum für die Anwendung unserer Rekursionsformeln zu geben, betrachten wir das Polyeder $\Pi = \Pi(P_1, \ldots, P_{12})$, das man erhält, wenn man für $P_1, \ldots, P_{12}$ die folgenden Punkte nimmt[10]

$$\begin{array}{llll} A_1 = (1, 5, 4), & A_2 = (2, 4, 3), & U_1 = (1, 4, 5), & U_2 = (2, 3, 4), \\ B_1 = (4, 1, 5), & B_2 = (3, 2, 4), & V_1 = (5, 1, 4), & V_2 = (4, 2, 3), \\ C_1 = (5, 4, 1), & C_2 = (4, 3, 2), & W_1 = (4, 5, 1), & W_2 = (3, 4, 2), \end{array}$$

die wir, um der Forderung $x_3' \geqq x_3'' \geqq \ldots \geqq x_3^{(12)}$ (vgl. (15)) zu genügen, in der Anordnung $U_1, B_1, A_1, U_2, B_2, V_1, A_2, V_2, W_2, C_2, W_1, C_1$ mit $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ bezeichnen. Bei Anwendung von (R^*) bleiben dann in der Summe nur die Summanden für $\lambda = 2$, 6, 8, 10 und 12 stehen, da für alle anderen $x_3^{(\lambda)} - x_3^{(\lambda+1)}$ null wird; man erhält somit

$$V_3(\Pi) = V_3(P_1, \ldots, P_{12}) = V_2^{(2)} + V_2^{(6)} + V_2^{(8)} + V_2^{(10)} + V_2^{(12)},$$

[9] Irgend zwei verschiedene Punkte P_{μ_i} sind also „unabhängig" in dem in Anm. 10 erwähnten Sinn.

[10] Vgl. „Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe", Crelles Journal 184, S. 55, Nr. **10**, Fig. 5 sowie Nr. **16**, S. 63, wo die gleiche Punktmenge unter der Bezeichnung $\mathfrak{L}_h$ für $h = 2$ zu finden ist. Die hier mit A_h B_h, C_h bezeichneten Punkte heißen dort P_h, Q_h, R_h. Die obigen 12 Punkte P_λ sind „unabhängig" in dem Sinn (vgl. l.c., S. 63, Nr. **16**), daß für $\lambda \neq \mu$ niemals P_λ dem Parallelepiped $k(P_\mu)$ angehört.

wenn man kurz $V_2^{(\lambda)}$ für $V_2(P_1^3, \ldots, P_\lambda^3)$ schreibt. Nimmt man etwa $\lambda = 8$, so sind die Punkte $P_1^3, \ldots, P_8^3$ bis auf die Reihenfolge die unter (20) angegebenen Punkte und gemäß Nr. **7** erhält man $V_2^{(8)} = 14$. Auf die gleiche Weise findet man $V_2^{(2)} = 7$, $V_2^{(6)} = 12$, $V_2^{(10)} = 17$, $V_2^{(12)} = 24$ und somit den Wert 74 für den Inhalt $V_3(\Pi)$ unseres Polyeders; zugleich ist dies natürlich die Anzahl der dem Polyeder Π angehörenden Gitterpunkte mit positiven Koordinaten[11].

---

[11] In Einklang mit der l. c.[10] hergeleiteten (hier für $h = 2$ anzuwendenden) Formel $m_h^* + 6h = 4h^3 + 9h^2 + 3h$ für die Anzahl der Gitterpunkte in der Menge $\mathfrak{N}_h = h(\mathfrak{L}_h)$; vgl. dort Nr. **12** und **16**.