# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft II

Mai- bis Dezembersitzung

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Zur Abhandlung des Herrn F. Lindemann: Über Biegungsflächen.

Von **H. Liebmann** und **K. Kommerell.**

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1923 von dem korrespondierenden Mitglied A. Brill in Tübingen.

Im 29. Band der Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, ist eine Arbeit von Herrn F. Lindemann „Die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche“ erschienen.

Die Ankündigung (Sitzung vom 5. Februar 1921) stellt in Aussicht, der Verfasser werde „für jede Fläche beliebig viele Verbiegungen durch bloße Quadraturen angeben und weiter . . alle Biegungsflächen einer gegebenen Fläche unter Einführung willkürlicher Funktionen mittelst aufeinander folgender Quadraturen analytisch darstellen“.

Ein erstes Verfahren erstrebt das Ziel auf folgendem Weg. Es seien $\alpha$, $\beta$ Minimalparameter, also das Bogenelement gegeben durch

$$ds^2 = 2F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

und $x$, $y$, $z$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Fläche $S$. Dann wird gesetzt (§ 8, S. 22)

$$z_1 = ax + by + cz,$$

wo zwischen den Konstanten $a, b, c$ die Beziehung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ bestehen soll, und behauptet, eine neue Fläche $S_1$ mit zwei wesentlichen Konstanten und demselben Bogenelement

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = 2F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

könne so bestimmt werden, daß sie zu $S$ weder kongruent noch symmetrisch ist.

Dieser Behauptung steht folgende Überlegung entgegen. Man betrachte die Fläche $S_2$ mit den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
z_2 &= ax + by + cz, \\
x_2 &= a'x + b'y + c'z, \\
y_2 &= a''x + b''y + c''z,
\end{aligned}
$$

wo rechts die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation stehen. Dann ist

$$z_2 = z_1$$

und

$$dz_1^2 + dx_1^2 + dy_1^2 = dz_2^2 + dx_2^2 + dy_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

also

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2.$$

Daraus folgt, daß die Projektionen von $S_1$ und $S_2$ auf die $xy$-Ebene kongruent oder symmetrisch sind und, weil $z_1 = z_2$ ist, daß die Flächen $S_1$ und $S_2$ kongruent oder symmetrisch sind und darum auch $S_1$ und $S$.

Die Methode kann also keine neuen Flächen geben, was übrigens der Verfasser für das Beispiel der Kugel selber festgestellt hat (S. 24).

Die zweite Methode soll sodann die allgemeine Lösung der Bourschen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (Gl. 36, S. 11, Gl. 84, S. 31, vgl. Gl. 17, S. 6) liefern, welche jede der rechtwinkligen Koordinaten der Fläche mit gegebenem Bogenelement zu erfüllen hat — sie soll die allgemeine Lösung geben, wenn eine partikuläre ($z = W$) vorliegt.

Für $z_1$ wird der Ansatz gemacht (S. 31)

$$z_1 = i \int (R\, W_\alpha\, d\alpha - R'\, W_\beta\, d\beta)$$

und die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung (82), S. 28

$$R_\beta W_\alpha + R'_\alpha W_\beta + (R + R') W_{\alpha\beta} = 0$$

gefordert. Der Verfasser stellt auch ausdrücklich die zweite Bedingung (84 b), S. 31 auf, die hinzukommen muß, damit $z_1$ die Boursche Gleichung erfüllt.

Es heißt dann wörtlich (S. 31): „Die Funktionen $R$ und $R'$ sind also allein . . . durch die Gleichung (82) gebunden, außerdem aber mit $W$ durch die Gleichung (84 b) verkettet, die eine Folge der übrigen Gleichungen sein muß.

Dies würde also Folgendes besagen: Für $z_1$ darf eine willkürliche Funktion von $\alpha$, $\beta$ genommen werden, worauf sich aus

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = i R W_\alpha, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \beta} = -i R' W_\beta$$

die Funktionen $R$ und $R'$ ergeben; diese erfüllen dann (82) identisch. Wäre nun die Gleichung (84 b) wirklich „eine Folge der übrigen Gleichungen“ so würde dies heissen, daß die willkürliche Funktion $z_1$ die Boursche Gleichung erfüllt. Auf S. 34 steht dementsprechend: „Nach letzteren [den allgemeinen Formeln] sind $R$ und $R'$ allein an die Gleichung (82) (die Integrabilitätsbedingung) gebunden.“ —

In der Tat versagt die Methode, wie der Verfasser feststellt (eben auf Seite 34), für den einfachsten Fall, nämlich die abwickelbaren Flächen; er fügt hinzu: „diese Ausnahme kann offenbar auch nur dann eintreten, wenn die Fundamentalgröße $F$ gleich einer Konstanten ist“ — also nur bei Anwendung der Methode auf die abwickelbaren Flächen.