

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Bemerkungen zu einem Satze über die Dimensionen

von \mathbb{R}^n

von Hans Hahn, Wien

Erhalten am 2. Februar 1927, vom Abdruck am 4. Mai 1927

Es sei \mathbb{R}^n ein n -dimensionaler reeller Vektorraum, K ein n -gliedriges System von n -gliedrigen reellen Vektoren, die n -gliedrige Determinante D bilden, die sich nicht als Produkt von Nullen darstellen lässt.

Es sei \mathbb{R}^m ein m -dimensionaler reeller Vektorraum, L ein m -gliedriges System von m -gliedrigen reellen Vektoren, die m -gliedrige Determinante E bilden, die sich nicht als Produkt von Nullen darstellen lässt.

Es sei \mathbb{R}^k ein k -dimensionaler

121

reeller Vektorraum, M ein k -gliedriges System von k -gliedrigen reellen Vektoren, die k -gliedrige Determinante F bilden, die sich nicht als Produkt von Nullen darstellen lässt, es sei \mathbb{R}^l ein l -dimensionaler reeller Vektorraum, N ein l -gliedriges System von l -gliedrigen reellen Vektoren, die l -gliedrige Determinante G bilden, die sich nicht als Produkt von Nullen darstellen lässt.

122

Es sei \mathbb{R}^p ein p -dimensionaler reeller Vektorraum, O ein p -gliedriges System von p -gliedrigen reellen Vektoren, die p -gliedrige Determinante H bilden, die sich nicht als Produkt von Nullen darstellen lässt.

Es sei \mathbb{R}^q ein q -dimensionaler reeller Vektorraum, P ein q -gliedriges System von q -gliedrigen reellen Vektoren, die q -gliedrige Determinante I bilden, die sich nicht als Produkt von Nullen darstellen lässt.

Es sei μ eine reellwertige Funktion auf dem reellen Bereich \mathbb{R} , die in der Umgebung des Nullpunktes 0 zweifach differenzierbar ist. Dann ist die Funktion μ genau dann μ -harmonisch, wenn μ die Differentialgleichung $\mu'' + \mu = 0$ erfüllt. Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung $\mu(x) = A \cos x + B \sin x$, wobei A, B beliebige reelle Konstanten sind. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 1$ gilt. In diesem Fall ist $\mu(x) = \sin x$. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 1$ und $\mu'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\mu(x) = \cos x$. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\mu(x) = 0$.

Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 1$ gilt.

$$\mu(x) = \sin x$$

$$\mu(x) = \cos x$$

Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 1$ gilt. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 1$ und $\mu'(0) = 0$ gilt. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 0$ gilt.

Es sei μ eine reellwertige Funktion auf dem reellen Bereich \mathbb{R} , die in der Umgebung des Nullpunktes 0 zweifach differenzierbar ist. Dann ist die Funktion μ genau dann μ -harmonisch, wenn μ die Differentialgleichung $\mu'' + \mu = 0$ erfüllt. Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung $\mu(x) = A \cos x + B \sin x$, wobei A, B beliebige reelle Konstanten sind. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 1$ gilt. In diesem Fall ist $\mu(x) = \sin x$. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 1$ und $\mu'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\mu(x) = \cos x$. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\mu(x) = 0$.

Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 1$ gilt. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 1$ und $\mu'(0) = 0$ gilt. Die Funktion μ ist genau dann μ -harmonisch, wenn $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) = 0$ gilt.

In der folgenden Tabelle ist α mit β verknüpft

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right) \quad (1)$$

Die Umkehrfunktion $\beta = \beta(\alpha)$ ist durch

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (2)$$

beschrieben. Diese Funktion ist mit Hilfe der Binomischen Formel leicht zu verifizieren.

Die Ableitung der Umkehrfunktion $\beta(\alpha)$ ist durch

$$\beta'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (3)$$

beschrieben.

$$\beta''(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (4)$$

Es ist auch von Interesse, die Umkehrfunktion $\beta(\alpha)$ in der Form $\beta = \beta(\alpha)$ zu schreiben.

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (5)$$

Die Umkehrfunktion $\beta(\alpha)$ ist durch die Gleichung $\beta = \beta(\alpha)$ gegeben. Die Umkehrfunktion $\beta(\alpha)$ ist durch die Gleichung $\beta = \beta(\alpha)$ gegeben.

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (6)$$

In der folgenden Tabelle ist α mit β verknüpft

Halbkreis ist nach Umkehrung C und damit nach (16) bei M durch $-\frac{1}{2} \pi$ bestimmt. Γ ist auf beiden Halbkreisen bezüglich C gleichmäßig stetig und nimmt mit wachsender Amplitude hinreichend kleine Häufungen von Nullstellen an. Das bedeutet, was die Nullstellenanzahl einer meromorphen Funktion auf dem Rand eines Kreises und ihrer Fortsetzung im Innern an sich selbst. Man weiß nach 17 die Existenz einer positiven Konstanten K und K' davon, daß in dem äußeren Kreise $-\frac{1}{2} \pi < \arg z < \frac{1}{2} \pi$.

$$18. \quad \frac{1}{2} \pi < \arg z < \frac{3}{2} \pi.$$

Wiederum ist eine positive Zahl ϵ durch die Bedingung

$$19. \quad \frac{1}{2} \pi - \epsilon < \arg z < \frac{3}{2} \pi - \epsilon$$

definiert. Man wähle sich durch die Bedingung (19) den Kreis der Stelle $z = \frac{1}{2} \pi + i\epsilon$ aus, dessen $\arg z$ sich von dem Kreisbogen C unterscheidet.

$$20. \quad \frac{1}{2} \pi + \epsilon < \arg z < \frac{3}{2} \pi + \epsilon.$$

Man wähle den Kreis der Stelle $z = \frac{3}{2} \pi + i\epsilon$ aus, dessen $\arg z$ sich von dem Kreisbogen C unterscheidet.

$$21. \quad \frac{1}{2} \pi + \epsilon < \arg z < \frac{3}{2} \pi + \epsilon.$$

Wird die γ -Linie Γ durch γ_1 der Teil von C im inneren Kreis C_1 und γ_2 der Teil von C im äußeren Kreis C_2 bezeichnet, so ist γ_1 durch $22.$ $\frac{1}{2} \pi + \epsilon < \arg z < \frac{3}{2} \pi + \epsilon$ bestimmt.

Man wähle, indem man die Kreisbogen C_1 und C_2 durch γ_1 und γ_2 verbindet.

$$23. \quad \frac{1}{2} \pi + \epsilon < \arg z < \frac{3}{2} \pi + \epsilon$$

H. Herglotz und E. Mielitz, *Über meromorphe Funktionen*. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1926. 100 S. 1000.

