Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Boursche Methode der Flächenbestimmung aus dem Linienelement.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 14. Januar 1922.

Als zweites Hauptproblem der Biegungstheorie bezeichnet A. Voss die Aufgabe, alle Flächen mit gegebenem Bogenelement

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

zu bestimmen[1]). Bours Verdienst besteht darin, daß er (zuerst unter Verwendung von Minimalparametern, die er „symmetrische Koordinaten" nennt, also für den Fall $E = G = 0$, sodann unter Verwendung eines geodätischen Orthogonalsystems, also für den Fall $E = 1$, $F = 0$) die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt hat, der die rechtwinkligen Koordinaten einer Fläche mit dem Bogenelement (1) genügen müssen. Ist eine Lösung $z(u, v)$ dieser „Biegungsgleichung" gefunden, dann kann man die zugehörigen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ leicht durch Quadraturen bestimmen. Die hierbei neu auftretenden Integrationskonstanten sind übrigens „parasitär" — Bour hat dieses charakteristische Adjektivum in ähnlichem Sinne verwendet — insofern, als ihre Werte auf die Gestalt der Fläche gar keinen Einfluß haben, nur auf ihre Lage[2]).

---

[1]) Math. Enc. III, D 6a, Nr. 18, Das Boursche Problem.

[2]) Dieser Umstand wird genauer besprochen in einer demnächst in den „Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" erscheinenden Arbeit.

Bour hat sich über seine Biegungsgleichung mit folgenden Worten geäußert: „Die Differentialgleichung erhält man leicht und sogar in recht eleganter Form, aber es scheint geradezu unmöglich zu sein (*à peu près impossible*), ihr allgemeines Integral zu erhalten[1])."

Angesichts dieser schwer zu widerlegenden Behauptung[1]) wollen wir uns hier mit der Behandlung von Beispielen begnügen, um zu sehen, was sich unter Verzicht auf die allgemeine Lösung unter günstigen Umständen doch erreichen läßt. Im übrigen werden wir dann ganz von selbst dazu geführt, zum Vergleich die neuere Weingartensche Methode[2]) heranzuziehen und einige weitere Fragen zu erörtern, z. B. die Verbiegung einer Fläche unter Festhaltung einer Kurve, die dann bekanntlich Haupttangenten-Kurve sein muß.

§ 1. Die Boursche Gleichung für den Fall $E = 1$, $F = 0$, $G = u$.

Die Biegungsgleichung hat für das Bogenelement

$$ds^2 = du^2 + G(u)\, dv^2 \tag{2}$$

die Gestalt

$$\begin{aligned} &4\,G(z_{11}\,z_{22} - z_{12}^2) + 2\,G\,G'\,z_1\,z_{11} \\ &+ (2\,G\,G'' - (G')^2)\,(1 - z_1^2) - 2\,G''\,z_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

in der die Differentialquotienten von G nach u durch Akzente, die von z nach u und v durch Fußmarken bezeichnet sind.

Die Fundamentalgrößen L, M, N sind dann durch

$$\begin{aligned} L : M : N : 1 = 2\,z_{11}\,G : (2\,z_{12}\,G - z_2\,G') : (2\,z_{22}\,G \\ + z_1\,G\,G') : 2\sqrt{G(G(1 - z_1^2) - z_2^2)} \end{aligned} \tag{4}$$

bestimmt.

---

[1]) Voss hat (a. a. O., S. 397) insbesondere darauf hingewiesen, daß auf die Biegungsgleichung, die die Monge-Ampèresche Form hat, die Charakteristikentheorie nicht angewendet werden kann, „da dieselbe keine Zwischenintegrale besitzt".

[2]) Voss, a. a. O., Nr. 31, S. 420 ff.

Zu einem derartigen Bogenelement (2) gehören bekanntlich, wie **Bour** zuerst festgestellt hat, Schraubenflächen, die man leicht bestimmen kann, indem man in (3) einsetzt

$$z = U(u) + \varkappa v; \tag{5}$$

für $\varkappa = 0$ erhält man Rotationsflächen.

Wir wollen jetzt unter Ausschaltung der trivialen Lösungen (5) den Fall $G = u$ genauer untersuchen. (3) nimmt hier die Form an

$$4u(z_{11}z_{22} - z_{12}^2) + 2uz_1z_{11} + z_1^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

Von dieser Gleichung sollen jetzt verschiedene Lösungen angegeben werden.

Zunächst einmal gelingt es, in bescheidenem Maß eine „Separation der Veränderlichen" zu erreichen. Macht man z. B. den Ansatz

$$z = U(u) + \frac{\varkappa}{2}v^2 + c_1 v \qquad (\varkappa \neq 0), \tag{7}$$

so erhält man zur Bestimmung von U die Gleichung

$$4u\varkappa U'' + 2uU'U'' + (U')^2 - 1 = 0,$$

deren Integration auf

$$(1 + U')^{1-2\varkappa}(1 - U')^{1+2\varkappa} = \frac{c_2}{u}$$

führt. U ist damit bis auf eine Quadratur bestimmt, und z enthält dann **drei** wesentliche Konstanten, während (5) nur **eine** wesentliche Konstante enthält[1]).

Ein zweiter Ansatz

$$z = u + V(v)$$

mit einer willkürlichen Funktion erfüllt (6) identisch und ergibt Regelflächen. Man erkennt dies sofort, da (4) in diesem Falle ergibt

$$L = 0.$$

---

[1]) Vgl. hierzu die eingehende Darstellung der Verbiegung von Rotations- und Schraubenflächen bei G. **Scheffers**, Einführung in die Theorie der Flächen (Leipzig 1902), S. 293 und 421.

Also sind jetzt die geodätischeu Linien $dv = 0$ zugleich Haupttangenten-Kurven, daher[1]) gerade Linien.

Dieses Tasten nach partikulären Lösungen ist aber nicht der einzige Weg zur Bearbeitung von (6).

Es liegt vielmehr hier einer der wenigen Fälle vor, bei denen die klassische Integrationsmethode der Monge-Ampèreschen Gleichungen mit Erfolg für die Theorie der Flächenverbiegung herangezogen werden kann.

Dieser Umstand rechtfertigt wohl eine genauere Behandlung nach der Methode. Um die übliche Bezeichnung verwenden zu können, schreiben wir in (6) jetzt x und y an Stelle von u und v und nach Monge

$$p, \ q, \ r, \ s, \ t$$

für die ersten und zweiten Differentialquotienten. Für (6) ist also zu schreiben

$$4x(rt - s^2) + 2xpr + p^2 - 1 = 0. \tag{6'}$$

Die beiden Systeme von Charakteristiken erster Ordnung sind aus

$$4x\,dp + \lambda_1\,dy = 0,$$
$$4x\,dq + \lambda_2\,dx + 2xp\,dy = 0$$

und den beiden Gleichungen zu erhalten, die hieraus durch Vertauschung von λ_1 und λ_2 entstehen[2]); dabei ist

$$\lambda_1 = 2\sqrt{x(p^2-1)}, \qquad \lambda_2 = -2\sqrt{x(p^2-1)}.$$

Die allgemeine Theorie lehrt weiter, daß man ein intermediäres Integral

$$f(x, y, z, p, q) = c$$

von (6′) erhalten kann, wenn es gelingt, aus einem der beiden Systeme eine „integrable Kombination"

---

[1]) Weil geodätische Krümmung und Normalkrümmung beide gleich Null sind.

[2]) Vgl. Math. Enc. II, A. 5 (von Weber), Partielle Differentialgleichüngen, Nr. 43—45. Daselbst muß in (157) das letzte Vorzeichen unter der Wurzel geändert werden.

$$df = 0$$

zu gewinnen. Dieser Fall liegt hier vor. Eliminiert man nämlich dy, so kommt

$$-dq + \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{p^2-1}}\,dp + \tfrac{1}{2}\,dx\sqrt{\frac{p^2-1}{x}} = 0$$

oder

$$-d\left(q - \sqrt{x(p^2-1)}\right) = 0.$$

Also ist

$$(q-c)^2 + x(p^2-1) = 0$$

ein intermediäres Integral von (6'), was nachträglich sofort durch Differentiation nach x und y bestätigt werden kann. Die vollständige Lösung dieser Gleichung erster Ordnung ist

$$(9') \qquad z = y(c+a) + \int\sqrt{1-\frac{a^2}{x}}\,dx + b = z(x, y, a, b, c).$$

Die allgemeine Lösung erhält man dann in bekannter Weise, indem man in (7') für b eine willkürliche Funktion $b(a)$ von a einsetzt, sodann bildet

$$\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{db}{da} = 0,$$

und a eliminiert. — Schließlich hat man für x und y wieder u und v zu schreiben.

Es ist immerhin bemerkenswert, daß die erforderlichen Integrationen sich hier soweit führen lassen, daß man eine „Biegungsgruppe“ mit einer willkürlichen Funktion $b(a)$ und einer willkürlichen Konstanten c angeben kann, die die zuerst gefundenen partikulären Lösungen wesentlich ergänzt.

§ 2. Die Weingartensche Methode.

Das Bogenelement

$$ds^2 = du^2 + u\,dv^2$$

dessen „Biegungsgruppe“ durch direkte Behandlung der Bourschen Gleichung (6) in § 1 noch nicht vollständig gewonnen worden ist, ist auf der andern Seite geradezu das klassische Beispiel für die Weingartensche Methode. Die Flächen mit diesem Bogenelement sind nämlich Zentraflächen von Minimalflächen, und da einerseits alle Flächen mit derselben Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien, in unserem Fall

$$R_1 + R_2 = 0$$

aufeinander abwickelbare Zentraflächen besitzen, anderseits alle Minimalflächen bekannt sind, so sind damit alle Flächen mit dem genannten Bogenelement bekannt[1]).

Wir wollen aber der Vollständigkeit halber diese Lösung hier entwickeln, um sie der weniger elastischen Bourschen Methode gegenüberzustellen und zugleich das Ergebnis weiter verwenden.

Wir bezeichnen die Koordinaten jetzt mit ξ, η, ζ und stellen uns die Aufgabe, durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \xi &= uX + x, \\ \eta &= uY + y, \\ \zeta &= uZ + z \end{aligned} \tag{8}$$

zu erreichen, daß das Bogenelement den Wert

$$d\sigma^2 = du^2 + u\,dv^2 \tag{9}$$

erhält. Dabei ist (x, y, z) eine noch zu bestimmende Fläche, X, Y, Z sollen die Richtungscosinus ihrer Normalen bedeuten. Bezeichnet man das Bogenelement dieser Hilfsfläche mit ds^2, so hat man die Forderung

$$du^2 + u\,dv^2 = d\sigma^2 = du^2 + u^2 \Sigma dX^2 + ds^2 + 2u \Sigma dX\,dx$$

zu erfüllen. Führt man auf der Hilfsfläche Minimalparameter ein und bezeichnet man die Fundamentalgrößen der Hilfsfläche mit E, F, G, L, M, N, mittlere Krümmung und Krümmungsmasse wie üblich mit H und K, so erhält man hieraus die Forderung[2])

[1]) Vgl. auch Math. Enc. III, D 5 (von Lilienthal), Besondere Flächen, Nr. 17 und 18, sowie Darboux, Théorie des surfaces IV (Paris 1896), p. 324.

[2]) Der Formelapparat der Flächentheorie ist in den „Tafeln" am Schluß des oben genannten Werkes von Scheffers zusammengestellt. Hier kommen namentlich die Tafeln XII und XVIII in Betracht.

$$u\,dv^2 = u(v_1\,d\alpha + v_2\,d\beta)^2$$
$$= u^2(H(L\,d\alpha^2 + 2M\,d\alpha\,d\beta + N\,d\beta^2) - 2KF\,d\alpha\,d\beta)$$
$$+ 2F\,d\alpha\,d\beta - 2u(L\,d\alpha^2 + 2M\,d\alpha\,d\beta + N\,d\beta^2),$$

also

$$u v_1^2 = u^2 HL - 2uL,$$
$$u v_2^2 = u^2 HN - 2uN.$$
$$u v_1 v_2 = u^2(HM - KF) + F - 2uM.$$

Diese drei Bedingungen sind erfüllt, wenn man für die Hilfsfläche eine Minimalfläche nimmt, denn alsdann ist

$$H = M = 0,$$

und die Mainardi-Codazzischen Gleichungen liefern

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0,$$

sind also mit

$$v_1^2 = -2L, \qquad v_2^2 = -2N$$

verträglich.

Hiermit ist die vollständige Biegungsgruppe des Bogenelementes (9) gewonnen, da man alle Minimalflächen kennt. Wir erhalten sie so. Die Hilfsfläche (Minimalfläche) stellen wir dar durch

$$\begin{aligned} z &= c(\alpha + \beta) \\ x &= ci\left(\int \cos A\,d\alpha + \int \cos B\,d\beta\right), \\ y &= ci\left(\int \sin A\,d\alpha + \int \sin B\,d\beta\right), \end{aligned} \tag{10}$$

worin A und B willkürliche Funktionen von α und β sind.

Es wird dann

$$\begin{aligned} u &= \frac{2c\sin^2 \frac{1}{2}(A - B)}{\sqrt{A'B'}}, \\ v &= \sqrt{2ic}\left(\int \sqrt{A'}\,d\alpha + \int \sqrt{-B'}\,d\beta\right), \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$
\begin{aligned}
&\xi = c\left(\frac{\sin A - \sin B}{\sqrt{A'B'}} + i\int \cos A\, d\alpha + i\int \cos B\, d\beta\right),\\
(12)\quad &\eta = c\left(\frac{\cos B - \cos A}{\sqrt{A'B'}} + i\int \sin A\, d\alpha + i\int \sin B\, d\beta\right),\\
&\zeta = c\left(\frac{\sin(A-B)}{i\sqrt{A'B'}} + \alpha + \beta\right).
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung umfaßt dann alle Flächen mit dem vorgeschriebenen Bogenelement (9).

Wir wollen die Darstellung verwenden, um ein Beispiel bedingter Verbiegung anzugeben, nämlich die Gesamtheit aller Flächen, die eine vorgeschriebene Kurve gemein haben und aufeinander abwickelbar sind. Diese starre Kurve ist dann bekanntlich Haupttangenten-Kurve für alle sie enthaltenden Flächen dieser speziellen Biegungsgruppe[1]).

Das Ergebnis ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&\xi = c\left(-\sin\alpha\cos\alpha\left(i + \sqrt{\frac{2}{B'}}\right) - \frac{\sin B}{\sqrt{2B'}} + i\int_0^\beta \cos B\, d\beta\right),\\
(13)\quad &\eta = c\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2B'}} - i\sin^2\alpha + \frac{\cos B}{\sqrt{2B'}} + i\int_0^\beta \sin B\, d\beta\right),\\
&\zeta = c\left(i\,\frac{\sin(2\alpha - B)}{\sqrt{2B'}} + \alpha + \beta\right)
\end{aligned}
$$

und wurde erhalten durch die Wahl

$$A = \pi + 2\alpha .$$

Die Funktion $B(\beta)$ ist ganz beliebig wählbar bis auf die beiden Nebenbedingungen

$$B(o) = 0, \qquad B'(o) = 2 .$$

[1]) Voss, a. a. O., S. 399, Nr. 19.

Alle diese Flächen haben die aus (13) für $\beta = 0$ sich ergebende Kurve gemein:

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, 0) &= -c \cos\alpha \sin\alpha (1 + i), \\ \eta(\alpha, 0) &= c(\cos^2\alpha - i \sin^2\alpha), \qquad (14) \\ \zeta(\alpha, 0) &= c(\alpha + i \sin\alpha \cos\alpha). \end{aligned}$$

u und v sind wieder durch (11) gegeben. Insbesondere ist unter den Flächen eine reelle Schraubenfläche enthalten, die sich für $B = 2\beta$ ergibt.

Diese Fläche wird in reeller Form dargestellt durch

$$\begin{aligned} \xi &= c(sh\,t \cos\varphi - ch\,t \sin\varphi), \\ \eta &= c(sh\,t \sin\varphi + ch\,t \cos\varphi), \\ \zeta &= c(\varphi - sh\,t\,ch\,t). \end{aligned}$$

Dabei ist dann

$$\begin{aligned} u &= c \cdot ch^2 t, & v &= \sqrt{2c}\,(\varphi - t), \\ \varphi - it &= 2\alpha, & \varphi + it &= 2\beta. \end{aligned}$$

Andere reelle Flächen enthält diese spezielle Biegungsgruppe nicht.

§ 3. Weitere Verwendung der Bourschen Gleichung.

Wir kehren nochmals zur Fragestellung des ersten Paragraphen zurück, die wir jetzt so wenden wollen: Wie muß man in

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2 \qquad (2)$$

die Funktion G wählen, damit die zugehörigeBoursche Gleichung durch den Ansatz

$$z = U(u) + V(v) \qquad (15)$$

gelöst werden kann, ohne daß $V(v)$ als lineare Funktion angenommen werden muß?

Diese Wahl ist, wie schon in § 1 bemerkt worden ist, immer möglich und führt auf die Schraubenflächen; wir schalten sie deshalb aus.

Setzt man (15) in die Boursche Gleichung (3) ein, so kommt

$$4\,U''V''G - 2\,G''(V')^2$$
$$+\,2\,U'U''GG' + (2\,G''G - (G')^2)(1 - (U')^2) = 0;$$

dabei sind die Differentialquotienten von U und G nach u und die von V nach v durch Akzente bezeichnet, überdies ist die Anordnung so gemacht, daß die zweite Zeile von v frei ist.

Man kann nun die Wahl treffen

$$G'' = 0, \qquad V'' = \varkappa$$

und kommt damit wieder auf das in § 1 und 2 behandelte Bogenelement, man kann aber auch setzen

$$V'' = \varkappa(V')^2,$$

also

$$V = -\frac{1}{\varkappa}\log(\varkappa v)$$

und erhält dann die beiden Forderungen

$$4\,U''G\varkappa - 2\,G'' = 0,$$
$$2\,U'U''GG' + (2\,GG'' - (G')^2)(1 - (U')^2) = 0,$$

die jetzt zu erfüllen sind.

Setzt man

$$G(u) = g^2(u),$$

so verwandelt sich die zweite Gleichung in

$$U'U''g' + (1 - (U')^2)\,g'' = 0$$

und gibt das Integral

$$(g')^2 = c^2(1 - (U')^2).$$

Es ist einfach zu behandeln durch Verwendung eines Hilfsparameters t, indem man setzt

$$\frac{dg}{du} = g' = c\sin t,$$
$$\frac{dU}{du} = U' = \cos t.$$

Sodann ist noch zu setzen

$$U'' = \frac{G''}{2\varkappa G} = \frac{gg'' + (g')^2}{\varkappa g^2}.$$

Dabei ist

$$U'' = \frac{dU'}{du} = -\sin t \cdot t',$$

also

$$-\sin t \cdot t' = \frac{c\cos t \cdot t'}{\varkappa g} + \frac{1}{\varkappa}\frac{c^2 \sin^2 t}{g^2},$$

und es ist

$$t' = \frac{dt}{du} = \frac{dt}{dg}\cdot\frac{dg}{du} = c\sin t \cdot \frac{dt}{dg}.$$

Man erhält so

$$c\frac{dt}{dg}\left(\sin t + \frac{c\cos t}{\varkappa g}\right) + \frac{1}{\varkappa}\frac{c^2 \sin t}{g^2} = 0,$$

also die Riccatische Gleichung

$$\frac{dg}{dt} + g\cot t + \frac{\varkappa}{c}g^2 = 0.$$

Um hier eine bestimmte Wahl der Fundamental-Größe $G = g^2$ zu treffen, setzen wir

$$c = \varkappa,$$

(16) $$g = \frac{1}{\sin t \lg \operatorname{tang}\frac{t}{2}}$$

und erhalten das Bogenelement

(17) $$ds^2 = du^2 + g^2 dv^2 = \frac{dg^2}{\varkappa^2 \sin^2 t} + g^2 dv^2.$$

Der zugehörige Wert von z ist

(18) $$z = U(u) + V(v) = \int \frac{\cos t}{\sin t}\, dg - \frac{1}{\varkappa}\log \varkappa v.$$

Zu jedem Bogenelement (17) hat man also von vorneherein (außer den Schrauben- und Rotationsflächen) noch eine Fläche (18); dabei ist t als Funktion von g gegeben durch (16).

Damit scheinen dann alle Möglichkeiten erschöpft zu sein, die Boursche Gleichung durch einen „separierenden" Ansatz

$$z = U(u) + V(v)$$

zu integrieren.

Bour hat übrigens seine eigenen Leistungen überschätzt; die von Voss in seinem Enzyklopädie-Artikel kritisierte Stelle (Voss, a. a. O., S. 421, Anm. 288) enthält zwei Irrtümer. Er meint, daß die von ihm bestimmten, zum Bogenelement (2) gehörigen Schrauben- und Rotationsflächen drei wesentliche Konstanten enthalten, während in der Tat nur eine wesentlich ist, die anderen „parasitär". Außerdem aber glaubt er, die allgemeinste Lösung der zugehörigen partiellen Differentialgleichung (3) aus einer partikulären mit drei willkürlichen Konstanten erhalten zu können. Seine pathetische Wendung: „Meine langwierigen Bemühungen . . . sind von Erfolg gekrönt worden in dem wichtigen und sehr umfangreichen Fall der Flächen, die auf die Rotationsflächen abwickelbar sind", schießt also weit über das hier erreichte Ziel hinaus.