Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft III

Oktober- bis Dezembersitzung

München 1918
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über elektrische Wellen in geschichteten Medien.

Von R. Emden.

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Oktober 1918.

Die nachfolgende Untersuchung befaßt sich mit dem Fortschreiten einer ebenen, elektro-magnetischen Welle in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante in Richtung der Wellennormale sich stetig ändert. Ist diese Änderung durch eine Potenz oder eine Exponentialgröße gegeben, so lassen sich die auftretenden Differenzialgleichungen durch Zylinderfunktionen integrieren. Es zeigt sich, daß, obwohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die Raumdichte der Energie, der elektrische und der magnetische Vektor, letztere nach verschiedenen Gesetzen, sich ändern, die Intensität der Strahlung, der Poyntingsche Vektor, konstant bleibt. Geht ein Strahl in beliebiger Anfangsrichtung durch ein parallel geschichtetes Medium von veränderlichem Brechungsexponenten, so ist die Bahn stetig gekrümmt; dabei ist die Richtungsänderung des Strahles dieselbe, ob die Differenz zweier Brechungsexponenten in gekrümmter Bahn stetig oder in einmaliger Brechung unstetig ausgeglichen wird. Da mit Brechung von endlichem Betrage stets Reflexion verbunden ist, liegt die Vermutung nahe, daß auch bei stetigem Ausgleich der Brechungsexponenten unendlich kleine reflektierte Mengen sich zu endlichen Beträgen addieren. Ihre Unrichtigkeit wird durch vorliegende Untersuchung wenigstens für senkrechte Incidenz nachgewiesen; bei stetiger, aber beliebig rascher Änderung des Brechungsexponenten bleibt der Poyntingsche Vektor konstant. Damit ist in diesem Einzelfalle ein Resultat bestätigt, das allgemein auf anderem Wege von v. Seeliger[1]) erhalten wurde.

Die gefundene Lösung gestattet noch eine weitere Anwendung. In der gewöhnlichen Behandlungsweise des Vorganges der Reflexion und Brechung wird die Berührungsfläche zweier Medien als mathematische Fläche aufgefaßt, an welcher der Brechungsexponent sich sprungweise ändert. Eine Reihe von Beobachtungen sprechen gegen diese Auffassung und verlangen vielmehr stetigen Ausgleich in einer dünnen Übergangsschicht. Von diesem Gesichtspunkte aus habe sich mit dem Reflexionsproblem L. Lorenz[2]) und Drude[3]) befaßt. Da die vorliegende Lösung das Verhalten der Wellen bei stetigen Verhältnissen wiedergibt, läßt sie wenigstens für senkrechte Incidenz das Reflexionsproblem ungleich strenger behandeln. Es zeigt sich, daß bei stetigem Übergange zu beliebig großem Quotienten des Brechungsexponenten der reflektierte Betrag der Wellen, die den Maxwellschen Gleichungen folgen, die also groß sind gegen molekulare Dimensionen, bestimmt ist durch die Größe der Änderung auf der Strecke gleich einer Wellenlänge. Sie bestimmt die relative Menge reflektierter Energie, die von 0 bis 1 variieren kann.

§ 1. Eine ebene polarisierte Welle bewege sich in Richtung der z Achse, den elektrischen Vektor parallel der x Achse, den magnetischen Vektor parallel der y Achse gerichtet. Die Dielektrizitätskonstante ε und infolgedessen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V seien längs der z Achse veränderlich. Dann lauten die Maxwellschen Gleichungen

1 a) $$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}$$

1 b) $$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}$$

---

[1]) H. v. Seeliger, Bemerkung zu dem Aufsatze des Hrn. A. Schmidt: „Beobachtung der Helligkeitsabnahme durch Brechung". Physikalische Zeitschrift, S. 237, 1904.

[2]) L. Lorenz, Über die Reflexion des Lichtes an den Grenzflächen zweier isotropen, durchsichtigen Mittel. Poggendorf. Annalen, Bd. 111, S. 460, 1860.

[3]) D. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl., S. 272 ff., 1906.

mit der Folge

2a) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2}$$

2b) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right)$$

Um periodische Lösungen von der Schwingungszahl $n = \frac{2\pi}{\tau}$ zu erhalten, setzen wir

3a) $$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{R} e^{int} \cdot F(z)$$

3b) $$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{R} e^{int} \cdot \varphi(z)$$

und erhalten aus 2) für $F(z)$ und $\varphi(z)$ die Bestimmungsgleichungen

4a) $$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\varepsilon n^2}{c^2} F = 0$$

4b) $$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{d\varphi}{dz} + \frac{\varepsilon n^2}{c^2} \varphi = 0$$

Für die weitere Untersuchung muß ε als Funktion von z gegeben sein; sie soll unter zwei verschiedenen Annahmen durchgeführt werden.

§ 2. Als erste Annahme setzen wir

5) $$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + az)^m = \varepsilon_0 \zeta^m; \quad \zeta = 1 + az$$

und erhalten damit die spezialisierten Gleichungen 4)

6a) $$\frac{d^2 F}{d\zeta^2} + \frac{\varepsilon_0 n^2}{a^2 c^2} \zeta^m F = 0$$

6b) $$\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - \frac{m}{\zeta} \frac{d\varphi}{d\zeta} + \frac{\varepsilon_0 n^2}{a^2 c^2} \zeta^m \varphi = 0$$

Beide Gleichungen können aus der Gleichung[1])

$$y'' + \frac{1 - 2a}{x} y' + \left[(\beta \gamma x^{\gamma - 1})^2 + \frac{a^2 - p^2 \gamma^2}{x^2}\right] y = 0$$

[1]) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909, S. 166. Wir benützen für die Zylinderfunktionen die Bezeichnungsweise dieses Werkes, auf welches wir im folgenden unter J und E verweisen. Um

die durch die Zylinderfunktion

$$y = x^a Z_p(\beta x^\gamma)$$

gelöst wird, durch Spezialisierung der Konstanten a, β, γ, p gewonnen werden. Von den zur Verfügung stehenden partikulären Integralen erweisen sich die dritter Art (die Hankelschen Integrale) $H_p^{(1)}$ und $H_p^{(2)}$ besonders geeignet, da sie die Trennung der reellen und imaginären Teile der Lösungen einfach bewerkstelligen lassen. Die in p quadratische Gleichung stellt $+$ und $-p$ Werte zur Verfügung. So erhalten wir die Lösungen

$$\text{7 a)} \quad F = \zeta^{\frac{1}{2}}\left[A_1 H^{(1)}_{\pm\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right) + A_2 H^{(2)}_{\pm\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)\right]$$

$$\text{7 b)} \quad \varphi = \zeta^{\frac{m+1}{2}}\left[B_1 H^{(1)}_{\pm\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right) + B_2 H^{(2)}_{\pm\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)\right]$$

Um Aufschluß über das Vorzeichen der p Werte und den Zusammenhang der Konstanten A_1, A_2, B_1, B_2 zu erhalten, gehen wir mit 7 a), 7 b) in Gleichung 1 a) ein, benutzen die Fundamentalgleichung der Zylinderfunktionen

$$\frac{d\,Z_p(x)}{dx} = -\frac{p}{x}\,Z_{p-1}(x)$$

beachten, daß

$$\frac{m+1}{m+2} + \frac{1}{m+2} = 1$$

und finden, daß

$$-\frac{1}{m+2} \quad \text{und} \quad +\frac{m+1}{m+2}$$

Mißverständnis auszuschließen, sei angemerkt, daß das N_p bei J und E dem $Y^{(\nu)}$ des Handbuches der Zylinderfunktionen von H. Nielsen entspricht.

für die p Werte angesetzt und

$$B_1 = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,A_1, \quad B_2 = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,A_2$$

gesetzt werden müssen, so daß sich ergibt

$$\text{8 a)}\quad \begin{aligned} F = \zeta^{\frac{1}{2}}\Bigg[A_1 H^{(1)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right) \\ + A_2 H^{(2)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{1\,m+2}{2}}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

$$\text{8 b)}\quad \begin{aligned} \varphi = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,\zeta^{-\frac{+1}{2}}\Bigg[A_1 H^{(1)}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right) \\ + A_2 H^{2}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+1}{2}}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

Weiter beachten wir, daß für 8a) und 8b) die semiekonvergenten Entwicklungen[1]) gelten:

$$\text{9)}\quad \begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(P_p(x) + i\,Q_p(x))\,e^{+i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} \\ H_p^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(P_p(x) - i\,Q_p(x))\,e^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} \\ P_p(x) &= 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(8x)^2} + \\ Q_p(x) &= \frac{4p^2-1}{8x} - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!\,(8x)^3} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf 3a), 3b) liefern für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ die Gleichungen 9) die Exponentialausdrücke

$$e^{i\left(nt+z-\frac{2p+1}{4}\pi\right)} \text{ und } e^{i\left(nt-z+\frac{2p+1}{4}\pi\right)},$$

also Wellen, die in Richtung $-z$ und $+z$ fortschreiten. Da nur letztere in Betracht kommen, muß $A_1 = 0$ sein. Somit ergeben sich für $F(x)$ und $\varphi(x)$ die Lösungen

[1]) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 58, J und E, S. 98–99.

$$10\text{a)} \qquad F = A\zeta^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{-\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2}{m+2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\, n}{a\, c}\, \zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

$$10\text{b)} \qquad \varphi = -i\sqrt{\varepsilon_0}\, A\zeta^{\frac{m+1}{2}} H^{(2)}_{\frac{m+1}{m+2}} \left(\frac{2}{m+2} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\, n}{a\, c}\, \zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

§ 3. Das x der Gleichungen 9) haben wir zu setzen

$$11) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{2}{m+2} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\, n}{ac}\, \zeta^{\frac{m+2}{2}} = \frac{2}{m+2} \cdot \frac{2\pi}{a\lambda} (1 + az)^{\frac{m+2}{2}} \\ &=> \frac{2}{m+2} \cdot \frac{2\pi}{a\lambda} + 2\pi \frac{z}{\lambda} \end{aligned}$$

Indem wir die Untersuchung des Eintritts der Wellen in das Medium, ($z = 0$), den §§ 6—8 vorbehalten, ergeben sich, unabhängig von a, für Werte von z, die nur wenige λ betragen, Werte von x, genügend groß gegen 1, wie gegen

$$p = \frac{1}{m+2} \quad \text{und} \quad \frac{m+1}{m+2}$$

so daß die Reihen 9) sich auf die ersten Glieder beschränken. Setzen wir in der Gl. 9 für $H_p^{(2)}$

$$11) \qquad \begin{gathered} P_p(x) - i\, Q_p(x) = C e^{i\delta} \\ C = P_p(x) \sqrt{1 + \left(\frac{Q_p(x)}{P_p(x)}\right)^2}; \quad \delta = -\operatorname{arctg} \frac{Q_p(x)}{P_p(x)} \end{gathered}$$

und beachten, daß stets $p < 1$, $x > 2\pi \frac{z}{\lambda}$, so können schon für $z = 2\lambda$, die in x quadratischen Glieder, da sie $< \frac{1}{100}$ sind, gegen 1 weggelassen werden. Wir erhalten so $C = P_p(x) = 1$, und im Exponenten kann $\delta = \dfrac{4p^2 - 1}{8x}$ gegen x wegbleiben. Beachten wir weiter, daß

$$e^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} = e^{-i\left(x - \frac{m\pi}{4(m+2)}\right)} \text{ für } p = -\frac{1}{m+2}$$

$$-ie^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} = e^{-i\left(x - \frac{m\pi}{4(m+2)}\right)} \text{ für } p = \frac{m+1}{m+2}$$

so erhalten wir die so behandelten Werte von $H_p^{(2)}$ in 8a) und 8b) eingesetzt und A entsprechend abgeändert

12a) $$F = A(1 + az)^{-\frac{m}{4}} e^{-i\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}} - \frac{m\pi}{4(m+2)}\right)}$$

12b) $$\varphi = \sqrt{\varepsilon_0}\,A(1 + az)^{+\frac{m}{4}} e^{-i\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}} - \frac{m\pi}{4(m+2)}\right)}$$

Um $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ zu erhalten, haben wir nach 3a), 3b) mit e^{int} zu multiplizieren und die reellen Teile zu nehmen, so daß wir schließlich mit geeigneter Wahl des Nullpunktes der Zeit erhalten

13a) $$\mathfrak{E}_x = A(1 + az)^{-\frac{m}{4}} \cos n\left(t - \frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

13b) $$\mathfrak{H}_y = \sqrt{\varepsilon_0}\,A(1+az)^{+\frac{m}{4}} \cos n\left(t - \frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

Diese Ausdrücke geben die gesuchte Lösung und sind zu diskutieren.

§ 4. Wir finden für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

14) $$V = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}(1 + az)^{\frac{m}{2}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Als Konsequenz der Maxwellschen Gleichungen ergibt sie sich unabhängig von der Wellenlänge; es findet keine Dispersion statt und Phase und Energie wandern mit derselben Geschwindigkeit.

Der elektrische und der magnetische Vektor ändern sich beim Fortschreiten der Welle nach verschiedenen Gesetzen; ersterer nimmt im Verhältnis $(1 + az)^{\frac{m}{4}}$ a b, letzterer im gleichen Verhältnisse z u.

Wir suchen weiter die Raumdichte der elektrischen und der magnetischen Energie und erhalten für deren Mittelwerte während einer Periode

$$15\text{a)}\qquad \varrho_{\text{elektr.}} = \frac{1}{8\pi}\,\varepsilon\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}(1+az)^m\cdot\frac{A^2}{2}(1+az)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{16\pi}(1+az)^{\frac{m}{2}}A^2$$

$$15\text{b)}\qquad \varrho_{\text{mag.}} = \frac{1}{8\pi}\,\overline{\mathfrak{H}_y^2} = \frac{\varepsilon_0}{16\cdot\pi}(1+az)^{\frac{m}{2}}A^2$$

also gleiche Werte. Für die gesamte Energiedichte (Dichte der Strömung) ergibt sich somit

$$16)\qquad \varrho = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_0(1+az)^{\frac{m}{2}}A^2 = \varrho_0(1+az)^{\frac{m}{2}}$$

Die Dichte der Strahlung steigt somit in Richtung z wie $\sqrt{\varepsilon}$.

Wir suchen weiter die Strahlungsintensität S, das ist die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit in Richtung der z Achse durchsetzt. Da die Energie sich mit der Geschwindigkeit $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ bewegt, ergibt sich

$$17)\qquad S = \varrho V = \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi}A^2$$

Derselbe Wert ergibt sich, wenn wir nach dem Poyntingschen Satze $S = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}_x\cdot\mathfrak{H}_y$ bilden.

Die Strahlungsintensität bleibt während des Fortschreitens der Welle konstant. Trotz des variabeln Brechungsexponenten finden keinerlei Reflexionen statt.

§ 5. Diese für den Ansatz $\varepsilon = \varepsilon_0(1+az)^m$ gewonnenen Resultate lassen sich durch Grenzübergang für die Änderung des ε nach der Annahme $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{az}$ umformen. Aus $\lim\limits_{q=\infty}\left(1+\frac{1}{q}\right)^q = e$ folgt $\lim\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qaz} = e^{az}$ und für $q = \frac{m}{az}$ folgt

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{az}{m}\right)^m = e^{az}.$$

Ersetzen wir in den gewonnenen Gleichungen a durch $\frac{a}{m}$ und gehen mit $m = \infty$ zur Grenze über, so erhalten wir für die Änderung der Dielektrizitätskonstanten

5') $$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{az}$$

die Lösungen:

13a) $$\mathfrak{E}_x = A e^{-\frac{az}{4}} \cos n \left(t - \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{ac} e^{\frac{az}{2}}\right)$$

13b) $$\mathfrak{H}_y = \sqrt{\varepsilon_0} A e^{\frac{az}{4}} \cos n \left(t - \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{ac} e^{\frac{az}{2}}\right)$$

14) $$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} e^{-\frac{az}{2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

15'a) $$\varrho_{\text{elektr.}} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon_0 A^2 e^{\frac{az}{2}}$$

15'b) $$\varrho_{\text{mag.}} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon_0 A^2 e^{\frac{az}{2}}$$

16') $$\varrho = \cdot \frac{1}{8\pi} \varepsilon_0 A^2 \varepsilon^{\frac{az}{2}} = \varrho_0 e^{-\frac{az}{2}}$$

17') $$S = \varrho V = \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} A^2$$

Die in § 4 gezogenen Schlüsse bleiben unverändert.

Die Mechanik des Vorganges läßt sich in beiden Fällen klar übersehen. In gleichem Maße, wie längs des Weges die Geschwindigkeit der Strahlung zu- oder abnimmt, nimmt deren Dichte ab oder zu, so daß das Produkt aus beiden, die Strahlungsintensität, konstant bleibt.

Stellen wir der Strahlung an verschiedenen Stellen eine auffangende Fläche (das Auge), gegenüber, so wird diese von Strahlung verschiedener Dichte getroffen, während die in der Zeiteinheit (durch die Pupille) hindurchgehende Energiemenge konstant bleibt. Es kann wohl kein Zweifel sein, daß letztere die „Helligkeit" bedingt. Diese schlechthin durch die „Energie" der Strahlung messen zu wollen, kann leicht zu Zweideutigkeit Veranlassung geben, da zwischen an Ort und Stelle vorhandener und transportierter Energie unterschieden werden muß.

§ 6. Wir wenden uns dem 2. Teil unserer Untersuchung zu und behandeln das Problem der Reflexion senkrecht einfallender Wellen an der Berührungsfläche zweier Medien, indem wir die mathematische Trennungsfläche ersetzen durch eine Übergangsschicht, in welcher die Dielektrizitätskonstante (der Brechungsquotient) stetig variiert. In dieser Übergangsschicht gelten dann die in den §§ 1—5 gewonnenen Gleichungen.

Die ebene, polarisierte Welle bewege sich durch ein Medium 1 mit konstantem ε_1 in Richtung $+z$; von der Stelle $z = 0$ ab beginnt sich ε zu ändern, wobei wir wieder die beiden Annahmen $\varepsilon = \varepsilon_2 (1 + a z)^m$ und $\varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$ unterlegen. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ gibt dann stetigen Übergang von ε_1 in ε bei unstetigem Gefälle. Dann gelten in 1 für die einfallende und die refektierte Welle die bekannten Beziehungen

$$(\mathfrak{E}_x)_e = \mathfrak{R}\, E e^{in\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

$$(\mathfrak{H}_y)_e = \mathfrak{R} \sqrt{\varepsilon_1}\, E e^{in\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

$$(\mathfrak{E}_x)_r = \mathfrak{R} - R_p e^{in\left(t + \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

$$(\mathfrak{H}_y)_r = \mathfrak{R} \sqrt{\varepsilon_1}\, R_p e^{in\left(t + \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

und für die durchgehende Welle fanden wir für $\varepsilon = \varepsilon_2 (1 + a z)^m$ und für $\varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$ die Ausdrücke für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ in den §§ 3—5 entwickelt. Dann gelten für $z = 0$ die Grenzbedingungen

$$(\mathfrak{E}_x)_e + (\mathfrak{E}_x)_r = (\mathfrak{E}_x)_d$$
$$(\mathfrak{H}_y)_e + (\mathfrak{E}_y)_r = (\mathfrak{H}_r)_d$$

die in unserem Falle geschrieben werden können:

$$18)\qquad \frac{E - R}{(E + R)\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\mathfrak{R}\, H^{(2)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, n}{a c}\right)}{\mathfrak{R} - i\sqrt{\varepsilon_2}\, H^{(2)}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, n}{a c}\right)}$$

für $\varepsilon = \varepsilon_2 (1 + a z)^m$

$$19)\qquad \frac{E-R}{(E+R)\sqrt{\varepsilon_1}} = -\frac{\Re H_0^{(2)}\left(2\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\,n}{a\,c}\right)}{\Re - i\sqrt{\varepsilon_2}\,H_1^{(2)}\left(2\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\,n}{a\,c}\right)} \quad \text{für } \varepsilon = \varepsilon_2 e^{a z}$$

Wir behandeln sie unter den beiden verschiedenen Annahmen, daß a erstens sehr langsam, zweitens sehr rasch sich ändert, wodurch starke resp. schwache Änderung von ε auf der Strecke gleich 1 Wellenlänge bedingt ist.

§ 7. Erster Fall: a ändert sich sehr langsam. Die Gleichung 13) und 13') hatten wir aus der allgemeinen Lösung unter Benützung der semikonvergenten Entwicklung 9) spezialisiert unter Voraussetzung eines hinreichend großen Argumentes x der Zylinderfunktionen

$$x = \frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\,n}{a\lambda}\,(1+az)^{\frac{m+2}{2}}$$

Steht wie dort wachsendes z zur Verfügung, so läßt sich dies stets erreichen. Jetzt soll diese Bedingung für $z = 0$ befriedigt werden, was bei gegebenem n oder λ_2, $\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\,n}{a\,c} = \frac{\pi}{a\,\lambda_2}$ nur durch hinreichend kleines a, geringe Änderung des ε auf der Strecke gleich einer Wellenlänge, erreicht werden kann. Es muß dazu, wie dort

$$\frac{4p^2-1}{8x^2}, \quad x = \frac{2}{m+2}\cdot\frac{2\pi}{a\lambda_2}$$

klein gegen 1 sein. Sehen wir dies als befriedigt an, wenn wir haben

$$20)\qquad \frac{4p^2-1}{8x^2} < \frac{1}{100}$$

und wählen von den beiden p Werten

$$-\frac{1}{m+2} \quad \text{und} \quad \frac{m+1}{m+2}$$

den zweiten, welcher a enger begrenzt, so erhalten wir für die gesuchte Bedingung

$$21)\qquad a\lambda_2 < 1{,}13 \cdot \pi \sqrt{\frac{1}{3m^2+4m}} = \frac{3{,}55}{\sqrt{3m^2+4m}}$$

Die folgende, kleine Tabelle enthält einige Zahlenwerte, zu welchen diese Bedingung führt

$$\begin{array}{lccccc}
 & m = 1 & 2 & 10 & \infty \\
22)\qquad a\lambda_2 < & \frac{1}{0{,}75} & \frac{1}{1{,}26} & \frac{1}{5{,}20} & \frac{1}{0{,}49 \cdot m} \\
\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} : \frac{\Delta z}{\lambda} < & \frac{1}{0{,}75} & \frac{1}{0{,}63} & \frac{1}{0{,}52} & \frac{1}{0{,}49}
\end{array}$$

Für den Ansatz $\varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$ ergibt sich durch Grenzübergang

$$a\lambda_2 < \frac{1{,}13 \cdot \pi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{0{,}49}; \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} : \frac{\Delta z}{\lambda} < \frac{1}{0{,}49}$$

Gehen wir nun mit 13) in die Grenzbedingung 18) ein, so erhalten wir

$$\frac{E-R}{(E+R)\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

und daraus

$$23)\qquad R = E\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} = E\frac{n-1}{n+1}, \quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Das ist die bekannte Fresnelsche Reflexionsformel für senkrechte Incidenz. Für $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ wird $R = 0$. Bei stetigem Übergange der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + az)^m$ resp. $\varepsilon = \varepsilon_1 e^{az}$ findet, so lange $a\lambda_2$ die durch 22) gegebene Grenze nicht überschreitet, keine meßbare Rexion statt; die Welle tritt ungescwächt von 1 nach 2 über. So wird z. B. die Sonnenstrahlung ungeschwächt in die mit abnehmender Dichte auslaufende Atmosphäre eindringen können.

§ 8. Im zweiten Falle, rasche Änderung des ε durch große Werte von a, führt die semikonvergente Entwicklung nicht zum Ziele. In Gleichung 18) sondern wir mit Hülfe der Beziehung[1])

$$H_p^{(2)} x = J_p(x) - i\, N_p(x)$$

die reellen Teile ab und erhalten

$$\frac{E-R}{(E+R)\sqrt{\varepsilon_1}} = -\frac{J(x)_{-\frac{1}{m+2}}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, N(x)_{\frac{m+1}{m+2}}}$$

Nun gelten für kleine x die asymptotischen Beziehungen[2])

$$J_{-p}^{(x)} = \left(\frac{2}{x}\right)^p \frac{1}{\Pi(-p)}(1+\delta_1);$$

$$N_p(x) = -\left(\frac{2}{x}\right)^p \frac{1}{\pi}\,\Pi(p-1)\cdot(1+\delta_2)$$

$$\delta_1 \text{ und } \delta_2 = < \frac{e^{\frac{x^2}{4}}-1}{|p-1|}$$

und vernachlässigen wir Glieder mit x^2 gegen 1 und setzen die p Werte $-\frac{1}{m+2}$ resp. $\frac{m+1}{m+2}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{E-R}{(E+R)\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}} \frac{\Pi}{\Pi^2\left(-\frac{1}{m+2}\right)}$$

und daraus

$$24)\quad R = E\,\frac{1-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}}\frac{\Pi}{\Pi^2\left(-\frac{1}{m+2}\right)}}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}}\frac{\Pi}{\Pi^2\left(-\frac{1}{m+2}\right)}};\quad x = \frac{2}{m+2}\cdot\frac{2\pi}{a\lambda_2}$$

Da $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ergibt sich für $m = 0$ wieder die Fresnelsche Formel und für $m = \infty$ bei stetigem Übergange $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ tritt vollständige Reflexion ein.

---

[1]) *J.* und *E.*, S. 95.

[2]) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 2 und § 3.

Um die Größe von δ_1 und δ_2 abzuschätzen, bei welcher wir $\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} = 1$, δ_1 und δ_2 die in x quadratischen Glieder setzen dürfen, kann für $J(x)_{-\frac{1}{m+2}}$ für alle Werte von m die bekannte Reihenentwicklung angesetzt werden, wodurch sich $\delta_1 = -\frac{x^2}{4}\frac{m+2}{m+1}$ ergibt. Da

$$N_p(x)\sin p\pi = J_p(x)\cdot\cos p\pi - J_{-p}(x), \quad p = \frac{m+1}{m+2},$$

läßt sich für größere Werte von m kein einfacher Ausdruck für δ_2 angeben. Beschränken wir uns auf die kleinen m Werte, $m = 1, 2$, so kommt nur der Wert von $J(x)_{-\frac{m+1}{m+2}}$ in Betracht mit der Folge $\delta_2 = -\frac{x^2}{4}(m+2)$. Somit ergibt sich

$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} = \frac{1-\frac{x^2}{4}\frac{m+2}{m+1}}{1-\frac{x^2}{4}(m+2)} = 1 + \frac{x^2}{4}\cdot\frac{m(m+2)}{m+1}$$

Für sehr große m benützen wir die Beziehung

$$\frac{\pi}{2}N_1 = Y_1\lg x - J_1\lg\frac{2}{\gamma} = J_1(x) - \frac{1}{x}J_0(x) + \frac{3}{1.2}J_3(x) + \cdots + -J_1\lg\frac{2}{\gamma}$$

und erhalten

$$\lim\frac{\pi}{2}N_1 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}\lg\frac{2}{\gamma} = -\frac{1}{x}(1 + x^2\cdot 1{,}1)$$

und somit

$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} = \frac{1-\frac{x^2}{4}}{1+\frac{11}{10}x^2} = 1 - \frac{5}{4}x^2$$

Vernachlässigen wir wieder die quadratischen Glieder gegen 1, falls sie $< \frac{1}{100}$ sind, so erhalten wir als Bedingung für Bildung der Gleichung 24)

$$a\lambda_2 > 20\pi \sqrt{\frac{m}{(m+1)(m+2)}} \quad \text{für kleine } m$$

$$a\lambda_2 > \frac{40\pi}{m} \quad \text{für große } m$$

und daraus folgende Zahlwerte

$$\begin{array}{llll} & m = 1 & 2 & \infty \\ \text{25)} \quad & a\lambda_2 > 25{,}6 & 25{,}6 & \frac{40 \cdot \pi}{m} = \frac{125{,}6}{m} \\ & \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\Delta z}{\lambda_2} > 51{,}2 & 51{,}2 & 40 \cdot \pi = 125{,}6 \end{array}$$

Wir berechnen noch die Amplituden R des reflektierten Lichtes nach Gleichung 24) für diese unterm Grenzwert von $a\lambda_2$ und erhalten für stetigen Übergang $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ nach dem Ansatze $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + a z)^m$

$$\begin{array}{llll} \text{für } m = 1 & 2 & \infty \\ R \quad > 0{,}15\,E & > 0{,}32\,E, & = E \end{array}$$

und nach dem Ansatze $\varepsilon = \varepsilon_1 \, e^{az}$

$$R > 0{,}73\,E.$$

Von diesen unteren Werten an steigt mit wachsendem a die Menge des reflektierten Lichtes bis zur vollständigen Reflexion.

§ 8. Aus den in den beiden letzten Paragraphen gewonnenen Beziehungen ziehen wir einige Folgerungen. Mancherlei Erscheinungen sprechen dafür, daß sich bei Berührung zweier Medien der Übergang der Brechungsexponenten nicht sprungweise, sondern in einer Übergangsschicht stetig vollzieht. Wir versuchen deren Dicke abzuschätzen, haben dabei aber im Auge zu behalten, daß unseren Untersuchungen die Maxwellschen Gteichungen zu Grunde liegen, welche Dispersion ausschließen. Diese regeln die Ausbreitung von Wellen, deren

Dimensionen groß sind gegen molekulare Abmessungen, wie sie etwa in der drahtlosen Telegraphie zur Anwendung kommen. In welcher Annäherung sie auch für den sichtbaren Teil des Spektrums gelten, in welchem allein sicheres Beobachtungsmaterial vorliegt, läßt sich nicht allgemein angeben.

Aus den Beziehungen 22) folgt für senkrechte Incidenz: Bei sprungweisem Übergange von ε_1 in ε_2 gilt die Fresnelsche Reflexionsformel, und tritt bei stetigem Übergang keine Reflexion ein, falls für linearen Anstieg des ε, $m = 1$

26) $$\Delta z > 0{,}75\,\lambda \cdot \frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}$$

und treten auch bei stetigem Übergange reflektierte Lichtmengen auf, die sich nach Gleichung 24) berechnen, falls

27) $$\Delta z < \frac{\lambda}{25}\,\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}$$

Für wachsendes m und den Ansatz $\varepsilon = \varepsilon_2\, e^{a\,z}$ ändern sich diese Grenzwerte bis

26') $$\Delta z > 0{,}5\,\lambda\,\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{resp.} \quad 27')\ \Delta z < \frac{\lambda}{126}\,\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}$$

Für den Übergang von Luft in Benzol gilt auch im sichtbaren Teile des Spektrums die Maxwellsche Beziehung $n = \sqrt{\varepsilon}$; für gelb ist $n = 1{,}48$, $\sqrt{\varepsilon} = 1{,}49$. Dann ist $\varepsilon = 2{,}2$; $\Delta\,\varepsilon = 1{,}2$ und nach Gleichung 26) und 26') wird $\Delta z = 0{,}9\,\lambda$ resp. $0{,}6 \cdot \lambda$. Gilt bei senkrechter Incidenz die Fresnelsche Formel, so muß die Dicke der Übergangsschicht kleiner wie diese Beträge, also rund kleiner wie λ sein. Auch bei andern festen und flüssigen Körpern, bei welchen die Maxwellsche Beziehung gilt, ergeben sich Δz von derselben Größenordnung. Um Lichtmengen zu erhalten, wie sie nach der Fresnelschen Formel auftreten müssen und durch die Messung bestätigt werden, braucht an der Grenzfläche kein Sprung der Brechungsexponenten aufzutreten, sondern genügt eine Übergangsschicht von molekularen Abmessungen. (Für Wasser, Luft gilt die Maxwellsche Beziehung nicht; hier ist $\varepsilon = 81$, also $\Delta\,\varepsilon = 80$. Und nach 26), 27) ergeben sich $\Delta z > 172\,\lambda$ resp. $112\,\lambda$ und $\Delta z < 3\,\lambda$ resp. $< 0{,}65\,\lambda$).

Wir berechnen weiter nach Gleichung 24) den Betrag an reflektierter Strahlung, den wir bei senkrechter Incidenz sehr langwelliger Strahlung erwarten können. Wir gehen nicht fehl, wenn wir die Dicke Δz der Übergangsschicht, in welcher wir an der Berührungsfläche zweier Körper den Ausgleich der Dielektrizitätskonstanten sich vollziehen lassen, der Größenordnung nach gleich einigen Wellenlängen sichtbarer Strahlung setzen, also in Mikrons messen, was wir durch $\Delta z = [\mu]$ ausdrücken. Den Unterschied der ε setzen wir gleich $\Delta\varepsilon = q\,\varepsilon$, wobei wie bei Wasser-Luft q bis zu 80 ansteigen kann, berechnen den Wert von a aus der Beziehung $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + a\Delta z)^m$ und erhalten $a\Delta z = (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1 = q'$. Damit gehen wir in Gleichung 24) ein und erhalten $x = \dfrac{2}{m+2} \cdot \dfrac{2\pi}{q'} \cdot \dfrac{[\mu]}{\lambda_2}$. Da $\dfrac{\lambda_2}{[\mu]}$ der Größenordnung nach die Wellenlänge λ_2 in Mikron ausdrückt, ergeben sich so kleine Werte von x, daß bereits für Wellen von einigen Zentimetern Länge $R = E$ wird. Die Wellen der drahtlosen Telegraphie werden deshalb bei senkrechter Incidenz auf Erd- und Wasseroberflächen vollständig reflektiert.

Wir fragen weiter nach dem Verhalten dieser Wellen bei unstetiger, atmosphärischer Schichtung. Der Brechungsquotient der Gase kann angesetzt werden $\mu = 1 + \nu\varrho$, für atmosphärische Luft $\mu = 1 + 0{,}0002927\,\dfrac{\varrho}{\varrho_0}$, ϱ_0 die normale Luftdichte. Bei der Kleinheit des ν können wir auch setzen $\varepsilon = \mu^2 = 1 + 2\nu\varrho$, also für Luft $\varepsilon = 1 + 0{,}0006\,\dfrac{\varrho}{\varrho_0}$. Wir nehmen an, daß zwei Luftschichten mit einer Temperaturdifferenz von 10^0 aneinander grenzen und der Ausgleich dieser Temperaturen sich stetig in einer Schicht von der Dicke Δz vollzieht. Da an dieser die Luftschichten unter gleichem Drucke stehen, verhalten sich die Dichten wie die Temperaturen. Da 1° Temperatur die Dichte um rund 4‰ ändert, unterscheiden sich die Luftdichten um rund 4%. Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = 0{,}0006 \cdot \frac{4}{100} = 2{,}4 \cdot 10^{-5},$$

und damit keine Reflexion eintritt, muß nach § 7 rund sein $\Delta z > 2\lambda \cdot 2{,}4{,}10^{-5} = 5.10^{-5}\lambda$. Beträgt die Wellenlänge k km $= k\,10^5$ cm, so ergibt sich $\Delta z > 5\,k$ cm. Für Wellen von 10—20 km Länge muß also sein $\Delta z > 0{,}5 - 1$ m. Da so scharf ausgeprägte Schichtung kaum auftreten wird, können wir schließen, daß Temperaturschichtung selbst diese langen Wellen bei senkrechtem Auftreffen ungeschwächt durchgehen läßt. An Wolkengrenzen können die Verhältnisse wesentlich anders liegen. Über die Dielektrizitätskonstanten der Wolken liegen keine Beobachtungen vor; der außerordentlich große Wert des ε für Wasser läßt an der Grenze Luft-Wolke weit größere $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$ erwarten wie zwischen ungleich temporierten Luftschichten. Nehmen wir dasselbe nur 10 mal größer an wie oben zwischen den beiden Schichten von 10° Temperaturdifferenz, geben also der Wolke ein ε rund $\varepsilon = \varepsilon$ Luft $+ 0{,}00024$, so erhalten wir jetzt $\Delta z > 5$ m — 10 m. Da nach meinen Beobachtungen bei Bodennebeln und an Wolken im Gebirge und bei Ballonfahrten sich der Übergang von klarer Luft zu Wolke sich innerhalb dieser Strecken vollziehen kann, sind von Wolken reflektierte Strahlungsmengen zu erwarten. Damit Gl. 24) zur Anwendung kommen kann, müßte allerdings $\Delta z < \frac{k}{10}$ also < 1—2 cm sein, was ausgeschlossen erscheint. Nun haben wir bei dieser Überlegung das ε der Wolken sehr niedrig abgeschätzt. Wir können anderseits versuchen, die Dielektrizitätskonstante der Wolken aus ihren Werten für Luft und Wasser nach der Mischungsregel zu berechnen. Nach Hann[1]) sind im

[1]) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 6. Aufl., S. 105 ff.

Kubikmeter Wolke höchstens 5—8 Gramm flüssiges Wasser vorhanden. A. Wagner fand auf dem Sonnenblick bei 50 m Sehweite 1,6 g; bei 30 m 3,3 g und bei 25 m Sehweite 4,5 g. Dann erhalten wir nach der Mischungsregel für die Wolke rund bei 1 g Wassergehalt $\varepsilon = \frac{1000 + 80}{1000} = 1{,}08$ und bei 5 g ein $\varepsilon = 1{,}4$, also außerordentlich große Werte, die denen bei vielen flüssigen und festen Körpern nahe kommen. Wie leicht ersichtlich, kann Gl. 24) zur Anwendung kommen, und berechnen wir wie in § 8 das x, so ergeben sich, da $\frac{[\mu]}{\lambda^2}$ jetzt von der Größenordnung 10—20 m/10—20 km wird, so kleine Werte, daß R rund gleich E wird. Ist die Dielektrizitätskonstante der Wolken von einer Größenordnung, wie sie sich durch Berechnung nach der Mischungsregel ergibt, so kann es bei senkrechtem Einfallen der langen Wellen der drahtlosen Telegraphie auf Wolken bis zu Totalreflexion kommen.
