Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1937. Heft II
Mai-Dezember-Sitzung

München 1937
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Verwirklichung einer geschlossenen Fläche mit vorgeschriebenem Bogenelement im Euklidischen Raum.

Von W. Blaschke und G. Herglotz.

Vorgelegt von Herrn Tietze in der Sitzung vom 4. Dezember 1937.

1915 hat H. Weyl[1] eine umfangreiche Beweisskizze für folgende Behauptung angegeben:

Ist auf der Gesamtfläche einer Kugel beliebig eine positiv definite quadratische Differentialform q mit positivem Krümmungsmaß vorgeschrieben, so gibt es stets im dreidimensionalen Euklidischen Raum eine auf die Kugel so topologisch abbildbare Eifläche, daß q ihr Bogenelement wird.

Hier werden wir diese Existenzaussage auf ein Variationsproblem zurückführen. Es sei F eine geschlossene Fläche vom Zusammenhang der Kugel, I ihr Inneres und q die auf F vorgeschriebene positiv definite quadratische Differentialform. Dann nehmen wir in I eine positiv quadratische Differentialform Q so an, daß sie der Randbedingung genügt, sich auf dem Rande F von I auf q zu reduzieren. Für die Riemannsche Metrik, die in I durch Q bestimmt wird, berechnen wir uns das aus der Gravitationstheorie bekannte Integral

$$W = \int_I R \cdot dV, \tag{1}$$

worin dV das Raumelement des Riemannraumes und R seine skalare Krümmung bedeutet. Die Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems $\delta W = 0$ lauten bekanntlich so:

$$R_{ik} = \frac{1}{2} R G_{ik}. \tag{2}$$

---

[1] H. Weyl, Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 61 (1915), S. 40–72.

Darin bedeutet R_{ik} Riccis Krümmungstensor für unser Bogenelement

$$Q = d S^2 = G_{ik}\, d x^i\, d x^k, \tag{3}$$

der mit Riemanns Krümmungstensor so zusammenhängt:

$$R_{ik} = G^{pq} \cdot R_{ip,kq}. \tag{4}$$

Multipliziert man Eulers Gleichungen (2) mit G^{ik}, so ist wegen der 3 Dimensionen unseres Raumes

$$G_{ik}\, G^{ik} = 3 \tag{5}$$

und damit folgt $R = 0$ und $R_{ik} = 0$ aus (2). Wenn man beachtet, daß nach (4) die 6 R_{ik}, nämlich R_{11}, R_{22}, R_{33}; R_{23}, R_{31}, R_{12}, sich linear aus den 6 Komponenten $R_{23,\,23}$, $R_{31,\,31}$, $R_{12,\,12}$; $R_{31,\,12}$, $R_{12,\,23}$, $R_{23,\,31}$ zusammensetzen und daß die Substitutionsdeterminante von Null verschieden ist, wie man am schnellsten für $G_{ik} = \delta_{ik}$ bestätigt, so erkennt man, daß aus $R_{ik} = 0$ auch

$$R_{ik,\,pq} = 0 \tag{6}$$

folgt. Somit gibt es eine Euklidische Verwirklichung unserer Fläche F immer dann, wenn unser Variationsproblem $\delta W = 0$ eine Lösung besitzt, die die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt.

Hamburg und Göttingen, im November 1937.