Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 10. Abhandlung

# Über
# die Verbiegung geodätischer Netze

von

M. Lagally

Vorgelegt am 2. Juli 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# DRUCKSCHRIFTEN

der

# KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

---

**Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.**

---

**In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.**

Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroïdbarometer. 1874 1 ℳ 80 ₰.
— Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 ₰.
Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 ₰.
Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. 2 ℳ
— — — Fortsetzung XX,3 1900 I. 1 ℳ 60 ₰.
— — — — Abh. XXI,3 1901 II. 80 ₰.
*Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electrischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 4.
* — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
— Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
— Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
— Weitere Beobachtungen der Luftelektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
— Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 ₰.
— Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 ₰.
Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
— Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 ℳ
Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
— Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 3 ℳ
— Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
— Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 10. Abhandlung

# Über die Verbiegung geodätischer Netze

von

**M. Lagally**

Vorgelegt am 2. Juli 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Im Anschluß an eine Abhandlung über „Geodätische Netze auf Rotationsflächen“ [1]) soll hier die Frage nach der Verbiegungsfähigkeit geodätischer Netze auf beliebigen Flächen untersucht werden: dabei soll die Eigenschaft jeder Linie des Netzes, geodätisch zu sein, bei der Verbiegung erhalten bleiben.

Die Voraussetzung, daß bei der Verbiegung des Netzes sämtliche Knotenpunkte, in denen sich zwei Netzlinien schneiden, erhalten bleiben und die Längen der einzelnen Maschen sich nicht ändern, während die Winkel, unter denen sich die einzelnen geodätischen Linien schneiden, veränderlich gedacht sind, verlangt, daß in dem auf die beiden Scharen von geodätischen Linien als Parameterkurven bezogenen Linienelement der Fläche, auf der das Netz liegt:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$E$ und $G$ bei der Verbiegung des Netzes unverändert bleiben, während $F$ andere Werte annehmen kann.

Wenn die Differentialgleichung der geodätischen Linien, bekanntlich von der Form

$$du\,d^2v - dv\,d^2u + A\,du^3 + B\,du^2dv + C\,du\,dv^2 + D\,dv^3 = 0$$

durch die Parameterkurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ erfüllt sein soll, müssen die Koeffizienten $A$ und $D$ verschwinden.

Das führt auf die beiden Gleichungen zwischen $E$, $F$ und $G$:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\,E\,\frac{\partial F}{\partial u} - F\,\frac{\partial E}{\partial u} &= E\,\frac{\partial E}{\partial v} \\ 2\,G\,\frac{\partial F}{\partial v} - F\,\frac{\partial G}{\partial v} &= G\,\frac{\partial G}{\partial u}, \end{aligned}\right.$$

[1]) Diese Berichte, Jahrgang 1909.

die den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung bilden. Zunächst lassen sich, nach Multiplikation mit $E^{-\frac{3}{2}}$, bzw. $G^{-\frac{3}{2}}$ die Gleichungen in folgende Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial u}(F E^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial}{\partial v} E^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(F G^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial}{\partial u} G^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus ergeben sich für $F$ zwei verschiedene Ausdrücke:

$$(2) \qquad \begin{cases} F = E^{\frac{1}{2}}\left[\int \dfrac{\partial E^{\frac{1}{2}}}{\partial v}\, du + \Psi(v)\right] \\[2ex] F = G^{\frac{1}{2}}\left[\int \dfrac{\partial G^{\frac{1}{2}}}{\partial u}\, \partial v + \Phi(u)\right], \end{cases}$$

deren Gleichsetzung eine Bedingung zwischen $E$ und $G$ gibt und in denen $\Phi(u)$ und $\Psi(v)$ zunächst willkürliche Funktionen sind.

Da bei einer Verbiegung des Netzes $E$ und $G$ erhalten bleiben, $F$ aber, wenn man von einer Deformation der Fläche unter Konstanterhaltung des Linienelementes absieht, in einen andern Wert $F_1$ übergeht, kann diese Veränderung von $F$ nur darin ihren analytischen Ausdruck finden, daß an Stelle von $\Phi(u)$ und $\Psi(v)$ nach der Verbiegung zwei neue Funktionen $\Phi_1(u)$ und $\Psi_1(v)$ getreten sind. Folglich ergeben sich zwei Gleichungen

$$F_1 = E^{\frac{1}{2}}\left[\int \frac{\partial E^{\frac{1}{2}}}{\partial v}\, du + \Psi_1(v)\right]$$

$$F_1 = G^{\frac{1}{2}}\left[\int \frac{\partial G^{\frac{1}{2}}}{\partial u}\, \partial v + \Phi_1(u)\right].$$

Subtrahiert man diese beiden Ausdrücke für $F_1$ von den entsprechenden für $F$, so folgt

$$F - F_1 = E^{\frac{1}{2}}[\Psi(v) - \Psi_1(v)]$$

$$F - F_1 = G^{\frac{1}{2}}[\Phi(u) - \Phi_1(u)].$$

Also besteht zwischen $E$ und $G$ eine Beziehung von der Form

$$E^{\frac{1}{2}}[\Psi(v) - \Psi_1(v)] = G^{\frac{1}{2}}[\Phi(u) - \Phi_1(u)].$$

Da man aber durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen $\bar{u} = f(u)$ das *Linienelement der* Parameterkurven $u =$ const um einen beliebigen, von $u$ allein abhängigen Faktor ändern kann, und ähnliches für die Kurven $v =$ const bezüglich $v$ gilt, geht die vorige Bedingung bei geeigneter Wahl der unabhängigen Veränderlichen in die einfache Gestalt

$$(3) \qquad E = G$$

über. Es ergibt sich also der Satz:

Soll ein geodätisches Netz überhaupt eine Verbiegung zulassen, bei der es geodätisch bleibt und bei der nicht die Fläche, auf der es liegt, unter Konstanterhaltung des Linienelementes mitverbogen wird, so müssen — bei geeigneter Wahl der Parameter — seine sämtlichen Maschen Rhomben sein.

Die bloße Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (2) für $F$ hätte die Bedingung dafür ergeben, daß ein beliebiges Netz mit den Linienelementen $\sqrt{E}\,du$ und $\sqrt{G}\,dv$ der Netzkurven in ein geodätisches Netz verbogen werden kann. Man findet, wenn die willkürlichen Funktionen $\psi(v)$ und $\varphi(u)$ zu den Integralen genommen werden, aus (2) die Bedingungsgleichung

$$(2\,\mathrm{a}) \qquad E^{\frac{1}{2}} \int \frac{\partial E^{\frac{1}{2}}}{\partial v}\, du = G^{\frac{1}{2}} \int \frac{\partial G^{\frac{1}{2}}}{\partial u}\, dv,$$

aus der sich durch je zweimalige Differentiation nach $u$ und $v$ und Elimination leicht eine wenig übersichtliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten läßt.

Es gibt also im allgemeinen keine liniengleiche Deformation, welche ein beliebig gegebenes Netz in ein geodätisches Netz überführt. Nur wenn die Gleichung (2a) erfüllt ist, gibt es ein und nur ein geodätisches Netz, das aus dem gegebenen durch Verbiegung hervorgeht; ist auch noch die Gleichung (3) erfüllt und das Netz ein Rhombennetz, so kann es nach dem vorigen Satz weiter so verbogen werden, daß es geodätisch bleibt.

Es entsteht nun die Frage nach den Flächen, auf welchen ein geodätisches Rhombennetz existiert. Diese Frage ist von Herrn Professor A. Voss[1]) untersucht und in folgender Weise beantwortet worden: Jede Fläche, welche durch zwei Scharen geodätischer Linien rhombisch geteilt wird, ist eine Liouvillesche Fläche; umgekehrt kann man auf jeder Liouvilleschen Fläche $\infty^1$ Kurvenscharen der genannten Art angeben. Auch die Deformationsmöglichkeit dieser doppelten Scharen von geodätischen Linien ist von ihm erkannt und aus der Differentialgleichung für den Koordinatenwinkel abgeleitet worden.

Im folgenden gebe ich einen anderen Beweis, der noch einige weitere Schlüsse zuläßt. Setzt man nach (3)

$$E^{\frac{1}{2}} = G^{\frac{1}{2}} = P(u, v),$$

so erhält man nach (2) für $F$ die beiden Ausdrücke:

$$F = P \cdot \left[\int \frac{\partial P}{\partial v}\, du + \Psi(v)\right] = P \cdot \left[\int \frac{\partial P}{\partial u}\, dv + \Phi(u)\right].$$

Daraus folgt durch Differentiation nach $u$ und $v$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 P}{d u^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist

$$P = P_1(u+v) + P_2(u-v),$$

wo $P_1$ und $P_2$ Funktionen von $(u+v)$ bzw. $(u-v)$ allein sind.

[1]) A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitosimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, Bd. 36, Jahrg. 1906, pag. 247 u. f. insbesondere 268—272.

Es sind nun noch die in $F$ eingehenden Funktionen $\Psi(v)$ und $\Phi(u)$ zu bestimmen. Man erhält:

$$\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}+\frac{\partial P_2}{\partial v}\right)du+\Psi(v)=\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial u}+\frac{\partial P_2}{\partial u}\right)dv+\Phi(u),$$

da

$$\frac{\partial P_1}{\partial u}=\frac{\partial P_2}{\partial u},\quad \frac{\partial P_1}{\partial v}=-\frac{\partial P_2}{\partial v}$$

ist, ergibt sich folgende Umformung:

$$\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial u}-\frac{\partial P_2}{\partial u}\right)du+\Psi(v)=\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial P_2}{\partial v}\right)dv+\Phi(u).$$

Schlägt man die jeweils nur von einer Veränderlichen, $v$ oder $u$ abhängigen Werte der Integrale an der unteren Grenze zu den additiven Funktionen, so folgt

$$P_1-P_2+\Psi(v)=P_1-P_2+\Phi(u),$$

also

$$\Psi(v)=\Phi(u)=c=\text{const};$$

so ist damit das Linienelement der Flächen, auf denen ein verbiegbares geodätisches Netz existiert, bestimmt:

$$(4)\quad \begin{cases} F=(P_1(u+v)+P_2(u-v))\,(P_1(u+v)-P_2(u-v)+c \\ E=G=(P_1(u+v)+P_2(u-v))^2. \end{cases}$$

Jedem beliebigen anderen Wert von $c$ entspricht das Linienelement einer Fläche, auf welche das geodätische Netz aufgelegt werden kann, so daß also die Frage nach den Verbiegungen eines solchen Netzes gleichzeitig mit seiner Auffindung gelöst ist. Die Anzahl der Biegungsnetze beträgt $\infty^1$.

Bevor diese Flächen, die durch das Linienelement (4) definiert sind, weiter untersucht werden sollen, sei eine andere Möglichkeit, die bisherigen Ergebnisse rein analytisch abzuleiten, kurz angedeutet. Da die beiden Differentialgleichungen (1) ein integrables System bilden sollen, müssen die beiden zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial u}$$

einander gleich sein. Bildet man diese beiden Ausdrücke aus den beiden Gleichungen (1) und setzt sie einander gleich, so erhält man nach einer einfachen Umformung mittels der Gleichungen (1) selbst folgende Integrabilitätsbedingung:

$$2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \lg E}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \lg G}{\partial v}=2\,F\left(\frac{\partial^2 \lg G}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 \lg E}{\partial u\,\partial v}\right).$$

Da diese Gleichung ohne Änderung von $E$ und $G$ für verschiedene Werte von $F$ erfüllt sein soll, müssen ihre beiden Seiten für sich verschwinden. Die rechte ergibt

$$\frac{\partial^2 \lg \dfrac{E}{G}}{\partial u\,\partial v}=0$$

und bei geeigneter Wahl der unabhängigen Veränderlichen:

$$E=G;$$

hierauf folgt durch Nullsetzen der linken Seite der oben erhaltene Wert

$$E=G=(P_1(u+v)+P_2(u-v))^2.$$

Um nun die Natur der Flächen, auf denen ein verbiegbares geodätisches Netz möglich ist, zu erkennen, soll das bisher auf die Netzkurven als Parameterlinien bezogene Linienelement der Fläche

$$d s^2=E\,d u^2+2\,F\,d u\,d v+G\,d v^2,$$

wo $E$, $F$, $G$ die durch (4) bestimmten Werte haben, auf die Diagonalkurven als Parameterlinien transformiert werden. Diese bilden, da sämtliche Maschen des Netzes Rhomben sind, ein Orthogonalsystem und genügen den Gleichungen

$$u+v=\alpha,\quad u-v=\beta.$$

Also ist

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad du = \frac{d\alpha + d\beta}{2}, \quad dv = \frac{d\alpha - d\beta}{2};$$

$$ds^2 = E\,\frac{d\alpha^2 + 2\,d\alpha\,d\beta + d\beta^2}{4} + 2\,F\,\frac{d\alpha^2 - d\beta^2}{4} + G\,\frac{d\alpha^2 - 2\,d\alpha\,d\beta + d\beta^2}{4}$$

oder unter Berücksichtigung von $E = G$:

$$ds^2 = \frac{E + F}{2}\,d\alpha^2 + \frac{E - F}{2}\,d\beta^2.$$

Durch Einsetzen der Werte (4) ergibt sich nach kurzer Umformung:

$$(5) \qquad ds^2 = (P_1(\alpha) + P_2(\beta))\left[\left(P_1(\alpha) + \frac{c}{2}\right)d\alpha^2 + \left(P_2(\beta) - \frac{c}{2}\right)d\beta^2\right].$$

Dieses Linienelement gehört dem Liouvilleschen Typus an und kann durch Einführung neuer Parameter

$$\lambda = \int \sqrt{P_1(\alpha) + \frac{c}{2}}\,d\alpha, \quad \mu = \int \sqrt{P_2(\beta) - \frac{c}{2}}\,d\beta$$

auf die bekannte isometrische Form

$$(6) \qquad ds^2 = (F_1(\lambda) + F_2(\mu))\,(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

gebracht werden, wobei $F_1(\lambda)$ und $F_2(\mu)$ Funktionen von $\lambda$ bzw. $\mu$ allein sind.

Durch Einführung von zwei neuen Größen

$$\varphi_1(u + v) = P_1(u + v) + \frac{c}{2}, \quad \varphi_2(u - v) = P_2(u - v) - \frac{c}{2}$$

werden die beiden Formen (4) und (5) des Linienelementes etwas einfacher:

$$(4\,\mathrm{a}) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= (\varphi_1(u + v) + \varphi_2(u - v))^2\,(du^2 + dv^2) \\ &\quad + 2\,(\varphi_1(u + v)^2 - \varphi_2(u - v)^2)\,du\,dv, \end{aligned}$$

$$(5\,\mathrm{a}) \qquad ds^2 = (\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta))\,(\varphi_1(\alpha)\,d\alpha^2 + \varphi_2(\beta)\,d\beta^2).$$

Durch Änderung von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ um zwei gleiche, aber dem Vorzeichen nach verschiedene additive Konstante erhält man sämtliche Biegungsnetze.

Bezeichnet man nun mit $\omega$ den Winkel der Parameterkurven $u$ und $v$, so ist

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Daraus folgt

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{EG} + F}{\sqrt{EG}} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

$$\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{EG} - F}{\sqrt{EG}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

und

$$ds^2 = \frac{\varphi_1^2(\alpha)}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\,d\alpha^2 + \frac{\varphi_2^2(\beta)}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,d\beta^2.$$

Durch Änderung der unabhängigen Veränderlichen:

$$a = \int\varphi_1(\alpha)\,d\alpha, \quad b = \int\varphi_2(\beta)\,d\beta$$

kann man dem Linienelement die folgende Form geben

$$ds^2 = \frac{da^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} + \frac{db^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

welche für Systeme geodätischer Ellipsen und Hyperbeln charakteristisch ist.

Aus (5) und (6) folgt der Satz: Wenn ein geodätisches Netz verbiegbar ist, liegt es auf einer Liouvilleschen Fläche; seine Diagonalkurven bilden dasjenige Orthogonalsystem der Fläche, welches aus den ausgezeichneten geodätischen Ellipsen und Hyperbeln besteht, und diejenigen geodätischen Linien, deren Bogenlängen für sämtliche Ellipsen und Hyperbeln des Orthogonalsystems konstante Summen oder Differenzen haben, sind gerade die Kurven des Netzes.

Es ist nun noch die Frage zu lösen, ob jedes Netz, welches den Bedingungen des obigen Satzes genügt, in der Tat verbiegbar ist. Hiezu muß untersucht werden, ob es möglich ist, ein gegebenes Liouvillesches Linienelement

$$ds^2 = (F_1(\lambda) + F_2(\mu))(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

auf die Form (5a)

$$ds^2 = (\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta))(\varphi_1(\alpha)\,d\alpha^2 + \varphi_2(\beta)\,d\beta^2)$$

zu transformieren. Die Möglichkeit dieser Umwandlung hängt von dem gleichzeitigen Bestehen folgender vier Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \varphi_1(\alpha) + \varkappa \qquad & d\lambda^2 &= \varphi_1(\alpha)\,d\alpha^2 \\ F_2(\mu) &= \varphi_2(\beta) - \varkappa \qquad & d\mu^2 &= \varphi_2(\beta)\,d\beta^2. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $\varkappa$ eine Konstante. Die Transformation hängt nur von der Auswertung der durch die Gleichungen

$$d\lambda^2 = (F_1(\lambda) - \varkappa)\,d\alpha^2, \qquad d\mu^2 = (F_2(\mu) + \varkappa)\,d\beta^2$$

gegebenen Integrale ab, und ist wegen der Konstanten $\varkappa$ auf $\infty$ viele Weise möglich.

Führt man wieder den Winkel $\frac{\omega}{2}$ ein, welchen eine geodätische Linie mit einem geodätischen Kegelschnitt bildet, so ist

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{F_1(\lambda) - \varkappa}{F_1 + F_2}$$

$$\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{F_2(\mu) + \varkappa}{F_1 + F_2},$$

also

(7) $$\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2} = \frac{F_2(\mu) + \varkappa}{F_1(\lambda) - \varkappa}.$$

Diese Gleichung gestattet, zu jeder Konstanten $\varkappa$ einen Winkel $\omega$ zu finden. Es gibt also auf jeder Liouvilleschen Fläche $\infty^1$ geodätische Netze, die verbiegbar sind und die alle das nämliche System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln zu Diagonalkurven haben.

Setzt man in (7) $\frac{\omega}{2} = 0$ oder $\frac{\omega}{2} = 90^0$, so muß $F_2(\mu) + \varkappa = 0$ oder $F_1(\lambda) - \varkappa = 0$ sein; d. h. sämtliche Kurven des geodätischen Netzes berühren einzelne geodätische Ellipsen und Hyperbeln, deren Parameter durch die Wurzeln obiger Gleichungen gegeben sind, und welche die Enveloppe des Netzes bilden. Diese Enveloppe ist für jedes auf der Fläche liegende verbiegbare geodätische Netz eine andere; umgekehrt kann jede geodätische Ellipse oder Hyperbel als Teil der Enveloppe eines solchen Netzes aufgefaßt werden. — Da die einzelnen Zweige der Enveloppe eines Netzes sich senkrecht schneiden, muß eine geodätische Linie, welche eine geodätische Ellipse und eine geodätische Hyperbel in unmittelbarer Nähe des Schnittpunktes berührt, an dieser Stelle die geodätische Krümmung $\infty$ haben, was der Definition der geodätischen Linien zu widersprechen scheint. Setzt man jedoch $F_2(\mu) = -\varkappa$, $F_1(\lambda) = \varkappa$ in das Linienelement (6) der Fläche ein, so findet man $ds^2 = 0$; die einzelnen Teile der Enveloppe schneiden sich also in solchen Punkten der Fläche, in denen diese von einer Minimalebene berührt wird. Dort fällt die Flächennormale und mithin auf die Schmiegungsebene der geodätischen Linien mit der Tangentialebene der Fläche zusammen. Da sich in einem imaginären Flächenpunkt nicht zwei reelle Flächenkurven schneiden können, kann von den beiden Teilen der Enveloppe, einer geodätischen Ellipse und Hyperbel, höchstens der eine reell sein. Daß auch die ganze Enveloppe imaginär sein kann, lehrt das Beispiel der geradlinigen Erzeugenden eines Hyperboloids.

Setzt man in (7) $F_1(\lambda) = \infty$ oder $F_2(\mu) = \infty$, so wird ebenfalls $\frac{\omega}{2}$ zu Null oder $90^0$. In allen Punkten der geodätischen Ellipsen und Hyperbeln also, welche den Wurzelwerten $\lambda$ und $\mu$ der obigen Gleichungen entsprechen und die für alle verbiegbaren geodätischen Netze einer Fläche die gleichen sind, werden die Kurven der ihnen orthogonalen Schar von den geodätischen Linien berührt. Die so bestimmten geodätischen Ellipsen und Hyperbeln sind dann Kurven von Spitzen oder Selbstberührungspunkten der geodätischen Linien sämtlicher Netze. In allen Punkten dieser Kurven ist nach (6) $ds^2 = \infty$, was außer in etwaigen besonderen Punkten der Fläche in ihrer unendlich fernen Kurve der Fall ist.

Bei den Rotationsflächen als speziellem Fall der Liouvilleschen Flächen ist eine der Funktionen $F_1(\lambda)$ oder $F_2(\mu)$ eine Konstante. Die Enveloppe eines geodätischen Netzes besteht also nur aus einem oder mehreren Parallelkreisen von gleichem Radius, und kann reell oder imaginär sein. Während zu jedem Parallelkreis als Enveloppe ein anderes geodätisches Netz gehört, ist die Spitzenkurve sämtlicher Netze nach dem Clairautschen Satz der $\infty$ ferne Parallelkreis.

In der Ebene sind die einzigen Kurvensysteme mit Liouvilleschem Linienelement die Systeme konfokaler Ellipsen und Hyperbeln mit einigen Spezialfällen (konfokale Parabeln, konzentrische Kreise und Geradenbüschel). Zu jedem konfokalen System gehören $\infty^1$ von Geraden gebildete Rhombennetze, deren sämtliche Gerade eine reelle Ellipse oder Hyperbel des konfokalen Systems berühren. Den Übergangsfall bildet das bekannte Rhombennetz, dessen beide Geradenscharen die durch die beiden Brennpunkte gehenden Strahlenbüschel bilden.[1])

Ein ebenes geodätisches Rhombennetz ist in der Ebene selbst starr,[2]) kam aber bekanntlich in das Netz der geradlinigen Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids verbogen werden. Die Diagonalkurven dieses Netzes, die Krümmungslinien der Fläche zweiter Ordnung bilden also ein System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln, was auch aus dem Linienelement ersichtlich ist. Es gibt also auf jeder Fläche zweiter Ordnung $\infty$ viele deformierbare geodätische Netze; jedes von ihnen hat zwei symmetrisch gelegene, reelle oder imaginäre

---

[1]) Vgl. S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd., 1897, pag. 55, 56.

[2]) Ausgenommen ein von zwei Scharen paralleler Geraden gebildetes Netz.

Krümmungslinien der anderen Schar zur Enveloppe; die unendlich ferne Spitzenkurve ist je nach der Art der Fläche reell oder imaginär. — Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß das von den geradlinigen Erzeugenden gebildete Netz das einzige geodätische Netz einer Fläche zweiter Ordnung ist, welches noch auf andere Flächen zweiter Ordnung als geodätisches Netz aufgelegt werden kann.

Die Frage nach solchen Flächen, auf denen es mehr als $\infty^1$ verbiegbare geodätische Netze gibt, ist gleichbedeutend mit der Frage nach solchen Liouvilleschen Flächen, auf denen es mehr als ein System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln gibt. Mit dieser haben sich u. a. S. Lie und G. Darboux beschäftigt, ohne sie jedoch vollständig zu lösen.[1]) Gibt es auf einer Fläche zwei Systeme geodätischer Ellipsen und Hyperbeln, so gibt es $\infty$ viele; mithin $\infty^2$ verbiegbare geodätische Netze. Von ihnen ist noch ein weiter Schritt bis zu den Flächen konstanter Krümmung und zur Ebene, die $8^4$ Systeme von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln und folglich $\infty^5$ verbiegbare geodätische Netze besitzen.

---

[1]) Darboux, leçons sur la théorie des surfaces, III, No. 588, 595, 596.