Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft II
Sitzungen Juni-Dezember

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die Lamé-Hermitesche Gleichung im Lichte der konformen Abbildung.

Von Werner v. Koppenfels in Würzburg.

Vorgelegt von Herrn C. Carathéodory in der Sitzung vom 5. November 1938.

Die Lösung der Laméschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-e_1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-e_2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-e_3}\right)\frac{d y}{d x} \tag{1}$$
$$-\frac{n(n+1)x+A}{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}y=0 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

die Hermite und Halphen für beliebige Werte des akzessorischen Parameters A zum Gegenstand tiefgreifender Untersuchungen machten, kann unter der Annahme reeller Verzweigungspunkte e_ν durch die konforme Abbildung einer Halbebene auf ein Kreisbogenviereck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ leicht gewonnen werden. Die Abbildungsfunktion ist nach H. A. Schwarz' und F. Kleins allgemeiner Theorie der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen der Gleichung (1):

$$\eta(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}. \tag{2}$$

Ihre unmittelbare, d. h. aus der Abbildungsaufgabe selbst und nicht aus der Differentialgleichung sich ergebende Konstruktion, die meines Wissens bisher nicht durchgeführt wurde, macht die Struktur der Hermiteschen Lösung und ihre Beziehung zu dem elliptischen Normalintegral III. Gattung besonders durchsichtig. Die eingehende Diskussion dieser und einer verwandten Kreisvierecks-Abbildung, die einer ausführlichen Publikation vorbehalten sei, darf für sich Interesse beanspruchen, weil hier die seltene Möglichkeit vorliegt, die Abhängigkeit der beiden wesentlichen Parameter der Differentialgleichung – Doppelverhältnis der Verzweigungspunkte und akzessorischer Parameter – von den beiden geometrischen Konstanten des Kreisvierecks im kleinen wie im großen zu verfolgen.

Sind A_ν ($\nu = 1, \cdots n$) reelle und voneinander verschiedene Parameter, so bildet die Funktion

$$t(x) = C \int_\infty^x \frac{dx}{\prod_{\nu=1}^{n} (x - A_\nu) \sqrt{4 P(x)}} \tag{3}$$

$$P(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

die Halbebene der x mit positivem imaginären Teil konform auf das Innere eines Geradenpolygons der t-Ebene ab, dessen vier im Endlichen gelegene Ecken als Bildpunkte der Verzweigungspunkte $x = e_1, e_2, e_3, \infty$ bez. die Innenwinkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ aufweisen. Den Umgebungen der logarithmischen Verzweigungspunkte A_ν dagegen entsprechen parallele Halbstreifen, deren Breite der π-fache Betrag des Residuums des Integranden an der betreffenden Stelle ist. Werden die n Parameter A_ν jetzt durch die n Forderungen

$$C^2 = 4 P(A_\nu) \prod_{\mu \neq \nu} (A_\nu - A_\mu)^2 \quad (\nu = 1 \cdots n) \tag{4}$$

festgelegt, so e r h a l t e n a l l e R e s i d u e n d e n B e t r a g 1 u n d a l l e P a r a l l e l s t r e i f e n d i e B r e i t e π. Dann liefert die Funktion

$$\eta = e^{t(x)} = e^{C \int_\infty^x \frac{dx}{\prod_{\nu=1}^{n} (x - A_\nu) \sqrt{4 P(x)}}} \tag{5}$$

die Abbildung der x-Halbebene auf das Innere eines Kreisbogenpolygons mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Dieses Kreisbogenpolygon ist eigentlich als ein $(n + 4)$-Eck aufzufassen und besitzt an den „Pseudo-Ecken"

$$\eta_\nu = e^{t(A_\nu)}, \tag{6}$$

die in den Nullpunkt oder in den unendlich fernen Punkt der η-Ebene fallen, je nachdem das betreffende Residuum $+1$ oder -1 ist, die Winkel π. Die Abbildungsfunktion (5) kann unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) auch in der Form

$$\eta = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \sqrt{4P(A_\nu)} \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{(x-A_\nu)\sqrt{4P(x)}}} \tag{5a}$$

geschrieben werden, die der Lösung Hermites entspricht. Wird nämlich $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ gesetzt, so verwandelt sich $\eta(x)$ durch die Substitution

$$u = \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4P(x)}} \tag{7}$$

in

$$\eta(u) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \wp'(a_\nu) \int\limits_{0}^{x} \frac{du}{\wp(u)-\wp(a_\nu)}} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sigma(u-a_\nu)}{\sigma(u+a_\nu)} e^{2u\zeta(a_\nu)} \tag{8}$$

mit

$$A_\nu = \wp(a_\nu) \qquad \nu = 1, 2, \cdots n. \tag{9}$$

Diese Funktion $\eta(u)$, die das Innere des Periodenrechtecks des elliptischen Integrals I. Gattung auf das Innere des Kreisbogenvierecks abbildet, ist offensichtlich der Quotient der Hermiteschen Lösungen

$$\left.\begin{array}{l} y_1(u) \\ y_2(u) \end{array}\right\} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sigma(u \mp a_\nu)}{\sigma(u)\,\sigma(a_\nu)} e^{\pm u\zeta(a_\nu)} \tag{10}$$

der transformierten Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} - [n(n+1)\wp(u) + A]\,y = 0. \tag{11}$$

Die Konstanten a_ν bestimmen sich nach der Hermite-Halphenschen Theorie[1] zunächst aus den Gleichungen

[1] Halphen, Traité des fonctions elliptiques, II p. 496.

$$(12)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\mu}{}' \dfrac{\wp'(a_\nu)+\wp'(a_\mu)}{\wp(a_\nu)-\wp(a_\mu)} = 0 \qquad \nu = 1 \cdots n \\ (2n-1)\sum\limits_{\nu=1}^{n} \wp(a_\nu) = A, \end{cases}$$

die sich vermöge der aus

$$(13)\qquad y_1 \frac{dy_2}{du} - y_2 \frac{dy_1}{du} = C$$

folgenden Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\wp'(a_\nu)}{\wp(u)-\wp(a_\nu)} = \frac{C}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (\wp(u)-\wp(a_\nu))}$$

in die wesentlich einfacheren Gleichungen

$$(4a)\qquad \wp'(a_\nu) = \frac{C}{\prod\limits_{\mu}{}' (\wp(a_\nu)-\wp(a_\mu))} \qquad \nu = 1 \cdots n$$

verwandeln. Diese sind, wie wir sahen, Ausdruck der Tatsache, daß die bei der Abbildung auf die t-Ebene angehängten Parallelstreifen die Breite π besitzen und auf diese Weise ein Kreisbogenviereck mit n Pseudo-Ecken entsteht.

In ähnlicher Weise läßt sich durch Konstruktion der Abbildungsfunktion für ein Kreisbogenviereck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, und $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ und mit n Pseudo-Ecken die Differentialgleichung

$$(14)\qquad \frac{d^2y}{du^2} - \frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_3}\frac{dy}{du} - [n(n+1)\wp(u)+A]\,y = 0$$

lösen. Dabei gibt die Verknüpfung der Parameter und ihre Deutung in der Bildebene zu neuen Fragestellungen Anlaß.