Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1947

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Algebraische Ableitung des Steinerschen Satzes über die Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln.[1]

Von Georg Rost in Würzburg.

Vorgelegt am 3. Oktober 1947.

I. Bei der folgenden Betrachtung sehen wir von denjenigen[2] KSB ab, deren KS sämtlich untereinander ähnlich (i. w. S.) sind. In jedem danach in Betracht kommenden KSB ist genau eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_g$ enthalten. Wählt man die Asymptoten der $\mathfrak{H}_g$ als X- und Y-Achse, so lautet die Gleichung des KSB:

$$Ax^2 + 2(B+\lambda)xy + Cy^2 + 2dx + 2ey + (F - \lambda b^2) = 0,$$

wobei $b^2 \geq 0$ angenommen werden kann und wobei $A + C \neq 0$ sein muß. O. B. d. A. kann daher $C = 1$ und $-1 < A \leq 1$, auch $F = f - Bb^2$ gesetzt und $B + \lambda$ durch λ ersetzt werden. Als Gleichung des allgemeinsten, in Betracht kommenden KSB erhält man so:

$$(1) \qquad Ax^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2dx + 2ey + (f - \lambda b^2) = 0, \quad -1 < A \leq 1.$$

Je nachdem $A = a^2 > 0$ bzw. $A = 0$ bzw. $A = -a^2 < 0$ ist, enthält der KSB zwei bzw. eine bzw. keine Parabel.

Der Tangens des Asymptotenwinkels $\varphi = \varphi(\lambda)$ des zum Parameterwert λ gehörigen KS ist dann

$$(2) \qquad tg\,\varphi = \pm 2\sqrt{\lambda^2 - A} : (1 + A) = t(\lambda), \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Somit sind die zu λ und $\lambda' \neq \lambda$ gehörigen KS ähnlich i. w. S. dann und nur dann, wenn

$$(3) \qquad \lambda + \lambda' = 0, \quad \lambda \neq \lambda'.$$

---

[1] Vgl. auch W. Süß, Reine Mathematik, Fiat Review, Wiesbaden 1948, Teil II, Seite 215. Die dort angezeigten Existenzsätze sollen erst in einer gesonderten Arbeit behandelt werden.

[2] Betr. diese Abkürzungen vgl. Haupt, diese Sitz.-Ber., math.-naturwiss. Kl., Jahrg. 1947, S. 81 ff., insbes. Nr. 1.1. und 1.2.

Es ist also jeder KS zu genau einem anderen ähnlich (i. w. S.), ausgenommen sind nur die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_g$ ($\lambda = \pm\infty$) sowie der zu $\lambda = 0$ gehörige, sogenannte extreme KS $\mathfrak{K}_e$, welche sich selbst entsprechen; es ist b (≥ 0) die Hauptachsenlänge von $\mathfrak{H}_g$ und $+\sqrt{|A|}$ das Achsenverhältnis von $\mathfrak{K}_e$. Somit kann ein beliebig vorgegebener (reeller) Winkel φ_0 mit $0 < \varphi_0 < \pi$ Asymptotenwinkel für höchstens zwei verschiedene Hyperbeln des KSB sein. Der $\mathfrak{K}_e$ ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $A > 0$, $A = 0$ oder $A < 0$, je nachdem also im KSB zwei, eine oder keine Parabel vorhanden ist. Man bemerke noch, daß in jedem Falle das einzige Extremum von $[t(\lambda)]^2$ (vgl. (2)) geliefert wird durch $\lambda = 0$; für $A < 0$ ist somit der Asymptotenwinkel δ von $\mathfrak{K}_e$ $\left(\text{mit } \delta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ absolutes Extremum für die Asymptotenwinkel der Hyperbeln des KSB, nämlich absolutes Minimum oder Maximum, je nachdem $\delta < \frac{\pi}{2}$ oder $\delta > \frac{\pi}{2}$. Für $A < 0$ ist daher $\mathfrak{K}_e$ mit der in Nr. 3.2. der Arbeit[2] von Herrn Haupt erklärten extremen Hyperbel $\mathfrak{H}_e$ identisch.

Aus den vorstehenden Feststellungen entnimmt man bereits den Steinerschen Satz sowie den ebenfalls von Steiner angegebenen

Zusatz. Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte je der beiden KS eines[2] St.H.- oder E.-Paares sind sämtlich parallel untereinander. Parallel zu ihnen sind ferner die Tangenten, welche im Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel sowie des extremen KS des KSB an den Mittelpunkts-KS des KSB gelegt werden; die Mittelpunkte der letztgenannten beiden KS sind also die Endpunkte eines Durchmessers des Mittelpunkts-KS des KSB.

Beweis. Für die Mittelpunkte $M_j(x_j, y_j)$, $j = 1, 2$ der beiden KS des den Werten $-\lambda$ und λ entsprechenden St.-Paares gilt:

$$Ax_j + (-1)^j \lambda y_j + d = 0, \quad (-1)^j \lambda x_j + y_j + e = 0.$$

Die Gleichung der Geraden $M_1 M_2$ ist daher

$$dx - ey + (d^2 - Ae^2)(A - \lambda^2)^{-1} = 0.$$

[2] Siehe S. 115.

Beachtet man, daß der Mittelpunkt-KS des KSB durch $Ax^2 - y^2 + dx - ey = 0$ geliefert wird, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung.

II. Nachdem in I der Steinersche Satz auf algebraischem Wege bewiesen ist, wenden wir uns zur algebraischen Behandlung seiner Verschärfung (vgl. § 2 und § 3 der Arbeit[2] von Herrn Haupt). Zu dem Zweck transformieren wir (vgl. I Zusatz, Beweis) den KS (1) auf Mittelpunkt vermöge

$$x = \bar{x} + x_0, \quad y = \bar{y} + y_0 \text{ wobei}$$
$$(A - \lambda^2)x_0 = -d + \lambda e, \quad (A - \lambda^2)y_0 = \lambda d - Ae$$

und erhalten

$$A\bar{x}^2 + 2\lambda\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + a_{33} = 0 \tag{4}$$

$$(A - \lambda^2)a_{33} \equiv b^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \equiv \tag{5}$$
$$\equiv b^2\lambda^3 - f\lambda^2 + (2de - Ab^2)\lambda - (d^2 + Ae^2 - Af)$$

oder auch:

$$f = b^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),\ 2de - Ab^2 = b^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1), \tag{6}$$
$$d^2 + Ae^2 - Af = b^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Dabei entsprechen also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ den ausgearteten KS des KSB. Daraus ergibt sich:

1) Die sämtlichen (nicht gleichseitigen) Hyperbeln des KSB werden geliefert:
Im Falle $A = a^2 > 0$ durch $-\infty < \lambda < -a$; $+a < \lambda < +\infty$ (wobei $a > 0$); im Falle $A = 0$ durch jedes endliche $\lambda \neq 0$; im Falle $A < 0$ durch jedes endliche λ.

2) Die nicht-ausgearteten Hyperbeln des KSB besitzen spitzen oder stumpfen Asymptotenwinkel, je nachdem $a_{33} > 0$ oder $a_{33} < 0$ ist.

Beweis: Das Paar der Asymptoten des KS gestaltet die Darstellung

$$(a_1\bar{x} + \bar{y})(a_2\bar{x} + \bar{y}) = 0 \text{ für } A \neq 0, \text{ wobei } a_1 a_2 \gtrless 0 \text{ für } A \gtrless 0$$
$$\text{und } -1 < a_1 a_2 \leq 1.$$
$$(2\lambda\bar{x} + \bar{y})\bar{y} = 0 \text{ für } A = 0.$$

[2] Siehe S. 115.

Daher verläuft die $\bar{Y}$-Achse in jedem Falle im Stumpfwinkelraum der Asymptoten (für $A > 0$ wegen $a_1 a_2 > 0$, für $A < 0$ wegen $|a_1 a_2| < 1$, für $A = 0$ unmittelbar ersichtlich). Weil aber $\bar{x} = 0$ mit dem KS (4) reelle Punkte gemeinsam hat oder nicht, je nachdem $a_{33} < 0$ oder $a_{33} > 0$, folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Aus den vorstehenden Feststellungen folgt, daß für jedes eine nicht-ausgeartete Hyperbel liefernde λ das Vorzeichen der Quadratwurzel rechter Hand in (2) eindeutig bestimmt ist, nämlich gleich $+$ oder $-$, je nachdem $a_{33} > 0$ oder $a_{33} < 0$. Daraus ergibt sich die Monotonie von φ in den verschiedenen Intervallen (vgl. auch § 2 und § 3, insbesondere Nr. 3.3. der Arbeit[2] von Herrn Haupt). Die Verschärfung des Steinerschen Satzes für Hyperbeln folgt jetzt ohne Mühe. Ebenso erhält man die, nur im Falle $A = a^2 > 0$ (mit $a > 0$) in Betracht kommende Verschärfung hinsichtlich der Ellipsen. Es entsprechen nämlich die Ellipsen des KSB den Werten $-a < \lambda < +a$, insbesondere die extreme Ellipse dem Wert $\lambda = 0$; und die (nicht-ausgearteten) Ellipsen sind reell oder imaginär, je nachdem $a_{33} < 0$ oder $a_{33} > 0$ ist.

---

[2] Siehe S. 115.