

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1944. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178

Kennzeichnung der durch Punkttransformationen erzeugten linearen Funktionaloperatoren.

Von Eberhard Hopf in München.

Vorgelegt von H. Tietze am 13. Oktober 1944.

Ω sei eine Menge (Raum) mit den Elementen (Punkten) x, y, \dots . Die Teilmengen von Ω seien mit A, B, \dots bezeichnet. $T = Tx$ sei eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Punktraumes Ω auf sich selbst. Unter $f(x), g(x), \varphi(x)$ seien in ganz Ω definierte Funktionen verstanden. Dem Folgenden sei die Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} der in Ω reellen und beschränkten Funktionen zugrundegelegt. Der Punkttransformation $x \rightarrow Tx$ kann man den Funktionaloperator $f \rightarrow Lf: f(x) \rightarrow f(Tx)$ zuordnen (davon macht man in der Ergodentheorie Gebrauch). Er hat folgende Eigenschaften:

- a) L bildet \mathfrak{M} genau auf sich ab und besitzt eine in \mathfrak{M} eindeutige Inverse L^{-1} .
- b) L ist linear: $L(f+g) = Lf + Lg$.
- c) L und L^{-1} sind nicht negativ: Mit $f \geq 0$ ist $Lf \geq 0$ und $L^{-1}f \geq 0$.¹⁾
- d) $L1 = 1$.

Im folgenden wird die umgekehrte Aussage bewiesen:

Zu jeder Funktionaloperation L mit diesen vier Eigenschaften gibt es eine Punkttransformation T der erwähnten Art, derart, daß

$$Lf(x) = f(Tx)$$

für jedes f aus \mathfrak{M} besteht.

Beweis. Aus b) folgt die Identität $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$ für rationale α, β beliebigen Vorzeichens.

¹⁾ Relationen wie $f = g, f \geq g, f > g$ sind hier stets als in ganz Ω gültig aufzufassen.

Aus a) und b) folgt dasselbe für die Inverse L^{-1} .

Aus a), b) und c) folgt: Mit $f \geq g$ ist stets $Lf \geq Lg$ und $L^{-1}f \geq L^{-1}g$.

Unter $\max(f, g)$ sei diejenige Funktion verstanden, welche in jedem Punkte x den Wert $\max(f(x), g(x))$ besitzt. Wir beweisen zunächst die Identität

$$L \max(f, g) = \max(Lf, Lg). \quad (1)$$

Aus $\max(f, g) \geq f$ und $\geq g$ und aus a) und b) folgt nämlich $L \max(f, g) \geq Lf$ und $\geq Lg$, also

$$L \max(f, g) \geq \max(Lf, Lg).$$

Nach a), b) und c) gilt dasselbe für die Inverse L^{-1} . Ersetzt man in dieser, mit L^{-1} geschriebenen Ungleichung f, g durch Lf, Lg respektive, so folgt

$$L^{-1} \max(Lf, Lg) \geq \max(f, g)$$

und damit schließlich (1). Ebenso beweist man

$$L \min(f, g) = \min(Lf, Lg). \quad (2)$$

Dafür, daß eine Funktion f nur die Werte Null und Eins annimmt, ist das Bestehen der Relation

$$\max(f, 1-f) = 1$$

notwendig und hinreichend. Wegen b) und d) ist nun $L(1-f) = L1 - Lf = 1 - Lf$. Ist f von jener Art, so gilt hiernach und nach (1) die Relation

$$\max(Lf, 1 - Lf) = L1 = 1,$$

m. a. W.: Nimmt f keine anderen Werte als Null oder Eins an, so gilt dasselbe von Lf . Ergänzung hierzu: Nimmt dabei f beide Werte Null und Eins wirklich an, so tut es auch Lf . Das letztere gilt wegen $L0 = L^{-1}0 = 0$ und $L1 = L^{-1}1 = 1$. Dieselben Aussagen gelten auch für die Inverse L^{-1} .

Wir bezeichnen mit φ_A die charakteristische Funktion der Punktmenge A ,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ in } A \\ 0, & x \text{ in } \Omega - A, \end{cases}$$

$\varphi_\Omega = 1$, $\varphi_\emptyset = 0$ (für die Nullmenge). Für die Vereinigung $A+B$ und den Durchschnitt $A \cdot B$ zweier Mengen gelten die Relationen

$$\varphi_{A+B} = \max(\varphi_A, \varphi_B), \quad \varphi_{A \cdot B} = \min(\varphi_A, \varphi_B). \quad (3)$$

Nach Obigem existiert zu jedem A ein eindeutig bestimmtes A' , derart, daß $L\varphi_A = \varphi_{A'}$ ist. Auch ist A bei beliebigem A' durch $L^{-1}\varphi_{A'} = \varphi_A$ eindeutig bestimmt. Mit $A \neq \emptyset$ ist $A' \neq \emptyset$ und umgekehrt. Damit ist eine umkehrbar eindeutige Mengentransformation $A' = TA$ definiert,

$$L\varphi_A = \varphi_{TA}, \quad L^{-1}\varphi_{A'} = \varphi_{T^{-1}A'}, \quad (4)$$

$T\emptyset = \emptyset$, $T\Omega = \Omega$. T hat die Eigenschaften

$$T(A+B) = TA+TB, \quad T(A \cdot B) = TA \cdot TB. \quad (5)$$

Sie folgen aus (1), (3) und (4); z. B. ist

$$\varphi_{T(A+B)} = L\varphi_{A+B} = \max(L\varphi_A, L\varphi_B) = \max(\varphi_{TA}, \varphi_{TB}) = \varphi_{TA+TB}.$$

Aus alledem folgt: Besteht A aus einem einzigen Punkt x , so enthält auch TA nur einen Punkt Tx ; die Mengenabbildung T wird durch eine Punktabbildung Tx erzeugt.

Wir beweisen, daß für jedes f

$$Lf(x) = f(Tx^{-1}) \quad (6)$$

ist. Wir beweisen es zunächst für jedes g , welches nur endlich viele, und zwar rationale Werte annimmt. Ein solches g hat die Form

$$g(x) = \alpha\varphi_A(x) + \beta\varphi_B(x) + \dots$$

mit endlich vielen Summanden und paarweise fremden Mengen A, B, \dots ; α, β, \dots sind die Werte von g . Wegen der Linearität von L und wegen (4) ist

$$\begin{aligned}
 Lg(x) &= \alpha L\varphi_A(x) + \beta L\varphi_B(x) + \dots \\
 &= \alpha \varphi_{TA}(x) + \beta \varphi_{TB}(x) + \dots = \alpha \varphi_A(Tx^{-1}) + \beta \varphi_B(Tx^{-1}) \\
 &\quad + \dots = g(Tx^{-1}).
 \end{aligned}$$

Zu beliebigem beschränktem $f(x)$ und zu beliebigem natürlichem n gibt es ein $g(x)$ der obigen Art mit

$$0 \leq f(x) - g(x) \leq \frac{1}{n} \quad (7)$$

in ganz Ω . Dann ist auch

$$0 \leq f(Tx^{-1}) - g(Tx^{-1}) \leq \frac{1}{n}. \quad (8)$$

Aus (7) folgt

$$0 \leq Lf(x) - Lg(x) \leq L\frac{1}{n} = \frac{1}{n} L1 = \frac{1}{n}. \quad (9)$$

Da (6) für g richtig ist, folgt aus (8) und (9)

$$|Lf(x) - f(Tx^{-1})| \leq \frac{1}{n}.$$

Da n beliebig ist, folgt (6) allgemein.