Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Bemerkungen zum Ergodensatz von G. Birkhoff.

Von **C. Carathéodory** in München.

Vorgelegt am 13. Oktober 1944.

1. Einleitung. In einer vorhergehenden Note hat Herr E. Hopf für den Beweis des Birkhoffschen Ergodensatzes eine außerordentlich einfache Methode mitgeteilt[1], deren Hauptgedanke von H. R. Pitt herrührt[2].

Diese Methode ist nicht nur deshalb bemerkenswert, weil sie die sehr verwickelten, wenn auch an sich elementaren, Überlegungen der früheren Beweise vermeidet, sondern vor allem, weil sie erlaubt, die Voraussetzungen unter welchen die Ergodensätze gelten, in bisher nicht benutzter Weise zu verallgemeinern.

Um die Ergodensätze auszusprechen, geht man von einer Abbildung des betrachteten Raumes auf sich selbst aus, die bisher immer als eineindeutig angenommen worden ist. Einer beliebigen Punktmenge A dieses Raumes entspricht dann nicht nur die Punktmenge τA, auf welche A abgebildet wird, sondern A selbst ist das Bild einer eindeutig bestimmten Punktmenge $\tau^{-1} A$. Nun beruhen die früheren Beweise der Ergodensätze auf einer von Birkhoff erfundenen, sehr kunstvollen Zerlegung von gewissen Mengen, und es scheint, daß die Eigenschaften dieser Zerlegung nicht ohne gleichzeitige Benutzung des Operators τ und seiner Inversen τ^{-1} aufgestellt werden können. Wenigstens konnte ich, bei einigen flüchtigen Versuchen, die ich in dieser Absicht gemacht habe, keinen Weg finden, auf welchem man mit der einen dieser Transformationen allein auskommt.

Dagegen genügt es, um den Kunstgriff von Pitt anwenden zu können, für τA gewisse elementare Eigenschaften zu fordern, welche die Existenz von $\tau^{-1} A$ nicht nach sich ziehen. Dadurch wird der Birkhoffsche Ergodensatz für gewisse Klassen von

---

[1] E. Hopf, Über eine Ungleichung der Ergodentheorie. Dieser Band S. 171.

[2] H. R. Pitt, Some generalizations of the ergodic Theorem. Proc. Cambr. Philos. Soc. Vol. **38** (1943) pp. 325–342.

Fragen gesichert, für welche er früher nicht ausgesprochen werden konnte.

Ein sehr elementares Beispiel einer maßtreuen Abbildung τA der Teilmengen des abgeschlossenen linearen Intervalls

$$I: 0 \leqq x \leqq 1 \tag{1.1}$$

auf sich selbst, für welches $\tau^{-1} A$ nicht immer existiert, ist folgendes. Wir betrachten eine auf I definierte stetige und stetig differentiierbare Funktion $f(x)$, für welche

$$f(0) = 0, \quad 0 < f'(x) < 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1) \tag{1.2}$$

ist, und setzen

$$g(x) = f(1) + x - f(x), \tag{1.3}$$

Dann ordnen wir jedem Punkt x des halbgeschlossenen Intervalls $0 \leqq x < 1$ das Punktepaar

$$x_1' = f(x), \quad x_2' = g(x) \tag{1.4}$$

zu und dem Punkte $x = 1$ den einzigen Punkt $x' = 1$.

Bei dieser Definition werden zwei verschiedene Punkte von I immer auf Punktmengen ohne gemeinsame Punkte abgebildet, und das ganze Intervall I wird von diesen Bildmengen ausgefüllt, wenn x dasselbe Intervall durchläuft.

Ferner wird jede Teilmenge A von I auf eine Punktmenge $A' = \tau A$ abgebildet, welche das nämliche äußere Lebesguesche Maß hat wie A, so daß man schreiben kann

$$m^* A' = m^* A.$$

Aber nicht jede Teilmenge von I kann als Bild $A' = \tau A$ einer Punktmenge A angesehen werden. Z. B. ist eine im Intervalle $0 < x < f(1)$ liegende Punktmenge keine solche Bildmenge.

Schon auf die einfachsten Fälle dieser Transformation angewandt, liefert der Ergodensatz erwähnenswerte Resultate. Setzt man z. B. in (1.4) $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = \frac{1+x}{2}$, so wird jede über das Intervall I summierbare periodische Funktion $p(x)$ mit der Periode 1 in die Funktion

$$\tau p(x) = p(2x)$$

transformiert. Aus dem Ergodensatze folgt dann, daß die Folge der Funktionen

$$\sigma_n p(x) = \frac{p(x) + p(2x) + p(2^2 x) + \ldots + p(2^{n-1} x)}{n}$$

überall mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge gegen eine Funktion $\bar{p}(x)$ konvergiert, und die Nullmenge kann man sogar so wählen, daß auf allen übrigen Punkten

$$\bar{p}(x) \equiv \int_0^1 p(t)\,dt$$

sei.

Im folgenden wird die Methode von Hopf auf Funktionen angewandt, die auf Somenringen definiert sind, ebenso wie ich es vor einigen Jahren für den Birkhoffschen Beweis getan habe[3]. Um auf meine damalige Schrift verweisen zu können, in welcher alle benötigten Begriffe erklärt sind, habe ich in der vormaligen Note nicht nur die Terminologie, sondern auch die Bezeichnungen der Hamburger Arbeit beibehalten[4].

Es ist – sogar für gewisse Anwendungen – von Interesse, daß man die Ergodensätze in abstrakter Weise formuliere und beweise. Z. B. liegt es in der Natur der Sache, wenn man in einem Euklidischen Raum mit gewöhnlichem Lebesgueschen Maße, bei der Behandlung der Ergodentheorie, Punktmengen, die von einer gegebenen sich nur durch Nullmengen unterscheiden, als ein einziges mathematisches Objekt ansehe. Diese Restklassen modulo einer Nullmenge können als Somen behandelt werden, und für diesen Somenring sind die meßbaren Somen und die meßbaren Ortsfunktionen von besonders einfacher Natur. Letzteres hängt damit zusammen, daß jede nach Lebesgue meßbare Punktmenge als Vereinigung einer Nullmenge mit abzählbar vielen perfekten Punktmengen dargestellt werden kann.

---

[3] C. Carathéodory, Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie. Abh. a. d. Mathem. Seminar d. Hansischen Universität. Bd. 14 (1941) S. 351–389.

[4] Eine ausführliche Darstellung der Maßtheorie und des Integrals auf Somenringen befindet sich im 2. Band meiner reellen Funktionen, die bei Teubner erscheinen. Bei einem Fliegerangriff ist aber der fertig korrigierte Stehsatz vernichtet und die Herausgabe des Buches verzögert worden.

2. Der Operator τf und die Bedeutung seiner Eigenschaften. Auf einem vollkommenen Ring $\mathfrak{A}$ von Somen X, der ein größtes Element M enthält, wird eine Menge $\mathfrak{F}$ von Ortsfunktionen f betrachtet. Diese soll alle Ortsfunktionen enthalten, deren untere Somenskalen $S(y)$ aus lauter Somen bestehen, die in einem vollkommenen Teilring $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$ enthalten sind, wobei $\mathfrak{M}$ auch das Soma M enthalten soll. Die Menge $\mathfrak{F}$ wird ein Körper von Ortsfunktionen mit dem Fundamentalring $\mathfrak{M}$ genannt.

Der Körper $\mathfrak{F}$ enthält außer den konstanten Ortsfunktionen a auch sämtliche zweiwertige Ortsfunktionen $e(A)$, die auf dem Soma $A \subseteqq M$ gleich 1 und auf dem Soma $(M - A)$ gleich Null sind, wobei die Somen A den Ring $\mathfrak{M}$ beschreiben. Die beschränkten Funktionen von $\mathfrak{F}$ sind erstens die endlichwertigen Ortsfunktionen der Gestalt

$$f = a_1 e(A_1) + a_2 e(A_2) + \ldots + a_m e(A_m) \tag{2.1}$$

und zweitens die Ortsfunktionen, die man aus diesen durch gleichmäßig konvergente Folgen erzeugt. Die nicht beschränkten Funktionen des Körpers $\mathfrak{F}$ konstruiert man schließlich, indem man das Soma M in eine Summe von abzählbar vielen paarweise fremden Somen

$$M = M' + M'' + M_1 + M_2 + \ldots \tag{2.2}$$

zerlegt, die alle dem Ringe $\mathfrak{M}$ angehören, und f gleich $-\infty$ auf M', gleich $+\infty$ auf M'' und auf jedem der übrigen M; gleich einer der soeben konstruierten beschränkten Ortsfunktionen aus $\mathfrak{F}$ setzt.

Sind dann $f_1, f_2, \ldots$ höchstens abzählbar viele Ortsfunktionen aus $\mathfrak{F}$ gegeben, so ist jede Ortsfunktion, die durch eine Operation wie

$$\max(f_1, f_2),\ \text{obere Grenze}\ (f_1, f_2, \ldots),\ p \overline{\lim_{n=\infty}}(f_1, f_2, \ldots)\ \text{u. s. f.}$$

definiert wird, auch im Körper $\mathfrak{F}$ enthalten, ebenso auch jede Funktion, die man durch Einsetzen von $f_1, f_2, \ldots, f_m$ in eine stetige Funktion $\chi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ von reellen Veränderlichen erhält.

3. Jeder Ortsfunktion f aus $\mathfrak{F}$ soll nun eindeutig eine Ortsfunktion τf, welche ebenfalls in $\mathfrak{F}$ enthalten ist, zugeordnet werden, wobei der Operator τ folgende Eigenschaften besitzt:

a) die konstanten Ortsfunktionen werden in sich selbst transformiert

$$\tau a \equiv a \tag{3.1}$$

b) der Operator τ ist linear; man muß also immer haben

$$\tau(a f_1 + b f_2) = a.\tau f_1 + b.\tau f_2. \tag{3.2}$$

Hierbei bedeuten a, b irgendwelche (positive oder negative) Konstanten und f_1, f_2 Ortsfunktionen aus $\mathfrak{F}$.

c) Für irgend zwei Ortsfunktionen f_1, f_2 aus $\mathfrak{F}$ soll die Relation gelten

$$\tau(\max(f_1, f_2)) = \max(\tau f_1, \tau f_2). \tag{3.3}$$

Aus (3.1) bis (3.3) folgen dann für die iterierten Operatoren

$$\tau^2 f = \tau(\tau f), \quad \tau^3 f = \tau(\tau^2 f), \ldots, \tau^h f = \tau(\tau^{h-1} f), \ldots$$

unmittelbar die Gleichungen

$$\tau^h a \equiv a \tag{3.4}$$

$$\tau^h(a f_1 + b f_2) = a\,\tau^h f_1 + b\,\tau^h f_2 \tag{3.5}$$

$$\tau^h(\max(f_1, f_2, \ldots, f_m)) = \max(\tau^h f_1, \tau^h f_2, \ldots, \tau^h f_m) \tag{3.6}$$

4. Durch die Forderung (3.3) wird die Klasse der Operatoren τf weitgehend eingeschränkt. Setzen wir erstens in (3.3)

$$f_1 = f, \quad f_2 = 0,$$

so erhalten wir, weil $\tau 0 = 0$ ist,

$$\tau(\max(f, 0)) = \max(\tau f, 0) \geqq 0. \tag{4.1}$$

Ist also $f \geqq 0$ und somit $\max(f, 0) = f$, so ergibt sich daraus der

Satz **1.** Der Operator τf hat positiven Charakter, d. h.

$$\text{aus } f \geqq 0 \text{ folgt } \tau f \geqq 0. \tag{4.2}$$

Zweitens setzen wir in (3.3)

$$f_1 = f, \quad f_2 = -f, \quad \tau f_1 = \tau f, \quad \tau f_2 = -\tau f$$

und beachten die Relationen

$$|f| = \max(f, -f), \quad |\tau f| = \max(\tau f, -\tau f).$$

Daraus entnehmen wir den

Satz **2.** Für jede Ortsfunktion f aus $\mathfrak{F}$ ist

$$\tau\,|f| = |\tau f|. \tag{4.3}$$

5. Sind f und g zwei Ortsfunktionen aus $\mathfrak{F}$ und ist $g \geqq f$ und somit $(g - f) \geqq 0$, so muß nach Satz 1

$$\tau(g - f) = \tau g - \tau f \geqq 0$$

sein. Es gilt daher der

Satz **3.** Aus $g \geqq f$ folgt immer $\tau g \geqq \tau f$ und allgemein $\tau^k g \geqq \tau^k f$.

Aus diesem letzten Satze folgt als Korollar der

Satz **4.** Sind α und β zwei reelle Zahlen, für welche $\alpha \leqq f \leqq \beta$ ist, so hat man auch $\alpha \leqq \tau f \leqq \beta$. Ebenso leicht beweist man hieraus den

Satz **5.** Eine gegen eine Ortsfunktion f gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ wird in eine Folge $\tau f_1, \tau f_2, \ldots$ transformiert, die gleichmäßig gegen τf konvergiert.

6. Die in den Sätzen 1 und 2 enthaltenen Relationen (4.2) und (4.3) scheinen viel spezieller zu sein als (3.3). In Wirklichkeit sind sie mit (3.3) äquivalent, wie ich unter Benutzung eines Gedankens von Herrn E. Hopf[5] zeigen will.

Es sei wieder $e(A)$ die zweiwertige Ortsfunktion, die auf dem Soma $A \subseteqq M$ gleich Eins und auf dem Soma $(M - A)$ gleich Null ist. Dann ist die Ortsfunktion

$$f = 2e(A) - 1 \qquad (A \in \mathfrak{M}) \tag{6.1}$$

gleich Eins auf A und gleich -1 auf $(M - A)$. Es ist also

$$|f| = 1$$

und nach (4.3)

$$|\tau f| = \tau\,|f| = 1. \tag{6.2}$$

[5] E. Hopf, Kennzeichnung der durch Punkttransformationen erzeugten linearen Funktionaloperatoren. Dieser Band S. 233.

Somit ist τf ebenfalls eine zweideutige Ortsfunktion, die auf einem Soma $A' \subseteqq M$ gleich 1 ist und auf dem Soma $(M - A')$ gleich -1 ist, wobei selbstverständlich A' auch mit einem der Somen O oder M zusammenfallen kann. Aus (6.1) folgt nun

$$\tau e(A) = \frac{\tau f + 1}{2}, \tag{6.3}$$

und $\tau e(A)$ ist eine Ortsfunktion, die auf A' gleich Eins und auf $(M - A')$ gleich Null ist.

Auf diese Weise wird jedem Soma A aus dem Ringe $\mathfrak{M}$, auf welchem die zweiwertigen Ortsfunktionen definiert sind, ein Soma A' zugeordnet, das auch zu $\mathfrak{M}$ gehört, und für welches wir zweckmäßigerweise die Bezeichnung

$$A' = \tau A \tag{6.4}$$

benutzen werden.

Die durch die Gleichung (6.4) definierte Abbildung der Somenmenge $\mathfrak{M}_1$ auf eine Teilmenge dieses Ringes (oder auch auf $\mathfrak{M}_1$ selbst) genügt, wie wir gleich sehen werden, den Bedingungen

$$\text{aus } B \circ C \text{ folgt } \tau B \circ \tau C, \tag{6.5}$$

$$\text{aus } A = \sum_j \dot{+} A_j \text{ folgt } \tau A = \sum_j \dot{+} \tau A_j, \tag{6.6}$$

die eine Homomorphie charakterisieren (vgl. die u.[3] zitierte Arbeit, S. 354).

Dazu bemerken wir, daß der Inhalt der Gleichungen (6.2) und (6.3) geschrieben werden kann

$$\tau e(A) = e(A') = e(\tau A). \tag{6.7}$$

Stellt man nun A als Summe von zwei zueinander fremden Somen B und C dar, so hat man

$$e(A) = e(B) + e(C) \qquad (A = B \dot{+} C,\ B \circ C), \tag{6.8}$$

und somit nach (3.2)

$$\tau e(A) = \tau e(B) + \tau e(C).$$

Dies kann aber nach (6.7) geschrieben werden

$$e(\tau A) = e(\tau B) + e(\tau C). \tag{6.9}$$

Nun ist $e(\tau A)$ eine Ortsfunktion, die auf τA gleich Eins und auf $(M - \tau A)$ gleich Null ist. Dagegen ist $e(\tau B) + e(\tau C)$ eine unter Umständen dreiwertige Ortsfunktion, die gleich 2 ist auf dem Soma $\tau B \cdot \tau C$, gleich 1 auf dem Soma $\tau B \dotplus \tau C$ und gleich Null auf dem Soma $M - (\tau B \dotplus \tau C)$. Die Gleichung (6.9) kann also dann und nur dann gelten, wenn

$$\tau B \circ \tau C, \qquad \tau A = \tau B + \tau C \tag{6.10}$$

ist. Hiermit ist die Forderung (6.5) verifiziert. Um auch (6.6) auf ähnliche Weise zu bestätigen, betrachten wir eine Zerlegung

$$A = A_1 + A_2 + \ldots$$

eines Somas A in abzählbar viele, paarweise fremde Somen A_j aus $\mathfrak{M}$ sowie die Funktion

$$f = \sum_n \frac{1}{n} e(A_n)$$

und wenden auf f und τf den Satz 5 an.

7. Es sei wieder $S(y)$ die untere Somenskala einer beliebigen Ortsfunktion f aus $\mathfrak{F}$ und mit $\tau^* f$ sei die Ortsfunktion, welche die Somenskala $\tau S(y)$ besitzt, bezeichnet.

Für die endlichwertigen Ortsfunktionen (2.1) ist der neue Operator $\tau^* f$ nicht verschieden vom früheren τf. Daraus folgt die Identität der beiden Operatoren für beliebig beschränkte Ortsfunktionen des Körpers $\mathfrak{F}$ mit Hilfe des Satzes 5, weil man jede solche Funktion als Grenze einer gleichmäßig konvergenten Reihe von Ortsfunktionen (2.1) darstellen kann. Dieselbe Gleichung

$$\tau^* f = \tau f$$

läßt sich schließlich auch für die allgemeinsten Ortsfunktionen des Körpers ableiten, indem man die Funktion f auf den verschiedenen Somen M', M'', M_j einer geeigneten Zerlegung (2.2) des Definitionsbereiches M betrachtet.

Nun können wir aber auch sofort die Gleichung (3.3) beweisen. Sind nämlich $S_1(y)$ und $S_2(y)$ Somenskalen der Ortsfunktionen f_1 bzw. f_2, so ist der Durchschnitt $S_1(y)\, S_2(y)$ eine Somenskala der

Funktion max (f_1, f_2). Die Gleichung (3.3) ist infolgedessen eine direkte Folge der Relation

$$\tau\left(S_1(y)S_2(y)\right) = \tau S_1(y) \cdot \tau S_2(y),$$

die für jede Homomorphie gilt.

Unsere Resultate faßt der folgende Satz zusammen:

Satz **6.** Für einen Operator τf sind die beiden Bedingungssysteme, die aus (3.1), (3.2), (3.3) einerseits, aus (3.1) (3.2), (4.2), (4.3) andererseits bestehen, einander gleichwertig.

Jedes dieser beiden Systeme von Bedingungen ist dann und nur dann erfüllt, wenn man den Übergang von f zu τf mittels einer Homomorphie des Somenringes $\mathfrak{M}$ auf sich selbst oder wenigstens auf eine seiner Teilmengen darstellen kann, bei welcher $\tau M = M$ ist.

8. Schon in der Einleitung haben wir gesehen, daß bei den wichtigsten Anwendungen unserer Theorie die Abbildung

$$A' = \tau A$$

als eine eineindeutige Abbildung des Ringes $\mathfrak{M}$ auf sich selbst angesehen wird. Dann wird die Homomorphie eine Isomorphie genannt. Im Falle der Isomorphie hat nun für jede Ortsfunktion f des Körpers $\mathfrak{F}$ die Gleichung

$$\tau g = f$$

eine Lösung

$$g = \tau^{-1} f.$$

Unter Annahme der gleichzeitigen Existenz der beiden Operatoren τf und $\tau^{-1} f$ kann man sehr leicht zeigen, daß die Relationen (3.1), (3.2) und (4.2) die Gleichung (4.3) nach sich ziehen (vgl. den § 21 der unter [3] zitierten Arbeit).

Nach dem Satz 6 wird somit jeder lineare Operator positiven Charakters, der einen inversen Operator besitzt, durch eine geeignete Isomorphie erzeugt. Dieses Resultat zeigt, daß die Bedingungen des § 21 meiner Hamburger Arbeit von 1941 nicht allgemeiner sind als die Voraussetzungen, unter welchen ich damals die Ergodensätze bewiesen hatte. Die Bemerkungen, die ich (unter fälschlicher Annahme des Gegenteils) am Schluß derselben Arbeit gemacht hatte, sind somit gegenstandslos.

9. Einführung der Maßfunktion $\varphi(X)$. Auf dem Somenring $\mathfrak{A}$ betrachten wir eine Maßfunktion $\varphi(X)$. Ferner nehmen wir an, daß der Ring $\mathfrak{M}$, der im § 2 eingeführt wurde, im Meßbarkeitring $\mathfrak{M}_\varphi$ von $\varphi(X)$ enthalten ist, d. h. daß jedes Soma A aus $\mathfrak{M}$ meßbar für $\varphi(X)$ ist. Dann sind alle Ortsfunktionen f aus $\mathfrak{F}$ meßbar für $\varphi(X)$ und es existiert das Integral

$$\int_X f\,d\varphi.$$

Wir werden nun Funktionen f betrachten, die summierbar über M sind, d. h. solche, für welche man hat

$$\int_M |f|\,d\varphi = \alpha < +\infty. \tag{9.1}$$

Endlich sollen durch die Homomorphie (6.4) die Somen $A \in \mathfrak{M}$ maßtreu abgebildet werden, so daß für jedes Soma A aus $\mathfrak{M}$

$$\varphi(\tau A) = \varphi(A) \tag{9.2}$$

ist. Aus der Theorie des Integrals folgt dann die Identität

$$\int_{\tau X} \tau f\,d\varphi = \int_X f\,d\varphi; \tag{9.3}$$

wegen $\tau M = M$ ist dann auch

$$\int_M f\,d\varphi = \int_M \tau f\,d\varphi = \ldots = \int_M \tau^k f\,d\varphi \tag{9.4}$$

für alle Ortsfunktionen $f \in \mathfrak{F}$.

10. Alle vorangehenden Überlegungen können – so wichtig sie an sich sind – übergangen werden, wenn man nur den Beweis des Birkhoffschen Ergodensatzes im Auge hat. Vom Operator τf, der in diesem Satze vorkommt, braucht man nämlich nur das Bestehen der Gleichungen (3.1), (3.2), (3.3) und (9.4) vorauszusetzen.

Ist dann f eine Ortsfunktion aus $\mathfrak{F}$, für welche (9.1) gilt, so ist auch $|f|$ in $\mathfrak{F}$ enthalten, und man schließt aus (9.4)

$$\int_M \tau^k |f|\,d\varphi = \int_M |f|\,d\varphi = \alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10.1}$$

Andererseits entnimmt man aus (4.3)

$$\tau^h |f| = |\tau^h f|; \tag{10.2}$$

also besteht die Folge der Ortsfunktionen

$$f,\ \tau f,\ \tau^2 f,\ \ldots,\ \tau^h f,\ \ldots \tag{10.3}$$

aus lauter über M summierbaren Funktionen, für welche

$$\int_M |\tau^h f|\, d\varphi = \int_M |f|\, d\varphi = \alpha \tag{10.4}$$

ist.

Nun ist die Folge (10.3) – sehr einfache Beispiele bezeugen es – nur in wenigen Ausnahmefällen selbst konvergent. Bildet man aber aus (10.3) die Folge der Mittelwerte

$$\sigma_1 f = f,\ \sigma_2 f = \frac{f + \tau f}{2}, \ldots, \sigma_h f = \frac{f + \tau f + \ldots + \tau^{k-1} f}{k}, \ldots, \tag{10.5}$$

so ist diese Folge überall auf M außer höchstens auf einem Nullsoma von $\varphi(X)$ konvergent, und dies ist die Behauptung, die unter dem Namen des Birkhoffschen Ergodensatzes bekannt ist[5].

Dieser Ergodensatz läßt sich, wie z. B. aus den §§ 30, 31 der unter[3] zitierten Arbeit zu ersehen ist, ohne Mühe aus einer Ungleichheit entnehmen, die wir jetzt ableiten wollen.

Der Beweis dieser Ungleichung enthält schon alle Schwierigkeiten, die ursprünglich in der Behandlung des Ergodensatzes konzentriert waren. Diese Ungleichheit, die zuerst von K. Yosida und Sh. Kakutani gefunden worden ist[6], hatte ich mit Hilfe des entscheidenden Kunstgriffs von Birkhoff in meiner unter[3] zitierten Arbeit (§§ 22–26) bewiesen, und dort die Birkhoffsche Ungleichheit genannt. Es zeigt sich aber, daß auch die viel einfachere Schlußweise von Pitt zur selben Ungleichheit führt; wir wollen deshalb Herrn Hopf folgen, und diese

---

[5] George D. Birkhoff, Proof of a recurrence Theorem for strongly transitive Systems Proc. Nat. Acad. of Science Vol. 17 (1931) pp. 650–655. Proof of the ergodic Theorem ibid. pp. 656–660.

[6] K. Yosida u. Sh. Kakutani, Birkhoffs ergodic Theorem and the maximal ergodic Theorem, Proc. Imper. Acad. Tokyo Vol. 15 (1939) pp. 165–168.

Ungleichheit einfach die Hauptungleichung der Ergodentheorie nennen.

11. Beweis eines Hilfssatzes. Wir betrachten eine unendliche Folge von Ortsfunktionen

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ \ldots, \tag{11.1}$$

die alle denselben Definitionsbereich M besitzen, und führen die Bezeichnungen ein

$$s_{pq} = h_{p+1} + h_{p+2} + \ldots + h_{p+q} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots; q = 1, 2, \ldots), \tag{11.2}$$

$$S_q = h_1 + h_2 + \ldots + h_q \qquad (q = 1, 2, \ldots). \tag{11.3}$$

Ferner sei n eine natürliche Zahl, die während der ganzen Untersuchung festgehalten wird; wir setzen

$$s_p^* = \max(s_{p1},\ s_{p2},\ \ldots,\ s_{pn}) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11.4}$$

$$S_q^* = \max(S_q,\ S_{q+1},\ \ldots,\ S_{q+n-1}) \qquad (q = 1, 2, \ldots) \tag{11.5}$$

und wollen zunächst beweisen, daß unter der Voraussetzung

$$s_p^* \geqq 0 \text{ für } p = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.6}$$

immer auch

$$S_q^* \geqq 0 \text{ für } q = 1, 2, \ldots \tag{11.7}$$

ist.

Nach (11.2) und (11.3) ist nämlich

$$S_q = s_{0q}$$

und man hat somit, gemäß (11.5) und (11.4)

$$S_1^* = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n) = \max(s_{01}, s_{02}, \ldots, s_{0n}) = s_0^* \geqq 0. \tag{11.8}$$

Es genügt also zu zeigen, daß unter der Voraussetzung (11.6) die Relation $S_{q+1}^* \geqq 0$ eine Folge von $S_q^* \geqq 0$ ist.

Falls aber $S_q^* \geqq 0$ ist, so lehrt die Definitionsgleichung (11.5), daß M mindestens auf eine Weise als Summe

$$M = M' + M'' \tag{11.9}$$

von zwei Somen dargestellt werden kann, so daß auf M' die Relation $S_q \geqq 0$ und auf M'' die Relation

$$\max(S_{q+1},\ S_{q+2},\ \ldots,\ S_{q+n-1}) \geqq 0 \tag{11.10}$$

gelte. Auf M'' ist folglich auch $S^*_{q+1} \geqq 0$, und es genügt diese Ungleichheit auf M' zu verifizieren.

Nun ist aber auf M' einerseits nach Voraussetzung

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_q \geqq 0, \tag{11.11}$$

andererseits aber

$$s^* \geqq 0.$$

Diese letzte Ungleichheit besagt, daß mindestens eine Zerlegung

$$M' = M'_1 + M'_2 + \ldots + M'_n$$

von M' existiert, derart, daß auf jedem M'_j die Ungleichheit

$$s_{qj} = h_{q+1} + h_{q+2} + \ldots + h_{q+j} \geqq 0 \tag{11.12}$$

besteht. Durch gliedweise Addition der Ungleichheiten (11.11) und (11.12) findet man aber

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_{q+j} = S_{q+j} = S_{(q+1)+(j-1)} \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Demgemäß ist $S^*_{q+1} \geqq 0$ auf jedem einzelnen der Somen M'_1, M'_2, ..., M'_n und folglich auch auf M'. Die Ungleichheiten (11.7) sind also für alle Werte von q richtig, ein Resultat, das auch folgendermaßen ausgesprochen werden kann: für jede natürliche Zahl q gibt es eine Zerlegung

$$M = M_0^{(q)} + M_1^{(q)} + \ldots + M_{n-1}^{(q)},$$

der Art, daß auf jedem einzelnen $M_j^{(q)}$, welches nicht leer ist, die Relation

$$0 \leqq h_1 + h_2 + \ldots + h_{q+j} \tag{11.13}$$

gilt. Für jeden der betreffenden Werte $j = 0, 1, \ldots, (n - 1)$ ist aber

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_{q+j} \leqq h_1 + h_2 + \ldots + h_q + |h_{q+1}| + \ldots + |h_{q+n-1}|, \tag{11.14}$$

eine Ungleichheit, deren rechte Seite von j unabhängig ist. Wir können somit den Satz behaupten:

Satz 7. Auf einem Soma M betrachten wir eine Folge

$$h_1, \; h_2, \; \ldots \tag{11.15}$$

von Ortsfunktionen, und führen die Abkürzungen ein

$$s_{pq} = h_{p+1} + h_{p+2} + \ldots + h_{p+q} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots; \; q = 1, 2, \ldots), \tag{11.16}$$

$$s_q^* = \max(s_{p1}, \; s_{p2}, \; \ldots, \; s_{pn}) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11.17}$$

wobei n eine fest gegebene natürliche Zahl bedeutet. Unter der Annahme

$$s_p^* \geqq 0 \quad \text{für } p = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.18}$$

folgt dann auf dem ganzen Definitionsbereich M und für jede natürliche Zahl q die Relation

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_q + |h_{q+1}| + |h_{q+2}| + \ldots + |h_{q+n-1}| \geqq 0. \tag{11.19}$$

12. Der Beweis des Satzes 7 ist fast trivial, wenn man ihn für gewöhnliche Punktfunktionen aufstellen will. In diesem speziellen Falle genügt es nämlich, diesen Satz in jedem einzelnen Punkte des Raumes zu verifizieren und die Funktionen h durch Zahlen zu ersetzen. Dann folgt aus (11.18) die Existenz einer Folge von natürlichen Zahlen q_j, für welche man gleichzeitig hat

$$\begin{gathered} 0 = q_0 < q_1 < q_2 < \ldots, \quad 1 \leqq q_{j+1} - q_j \leqq n, \\ h_1 + h_2 + \ldots + h_{q_j} \geqq 0. \end{gathered} \tag{12.1}$$

Die zu beweisende Relation (11.19) folgt dann aus der Tatsache, daß man jeder natürlichen Zahl q eine Zahl j zuordnen kann, für welche

$$q_j \leqq q < q_{j+1} \tag{12.2}$$

ist.

13. Die Hauptungleichung der Ergodentheorie. Wir wenden den Satz 7 auf Folgen von Ortsfunktionen an, von der Gestalt

$$h_1 = f, \; h_2 = \tau f, \; \ldots, \; h_h = \tau^{h-1} f, \; \ldots, \tag{13.1}$$

wobei $f \in \mathfrak{F}$ und der Operator τf den Bedingungen (3.1), (3.2), (3.3) und (9.4) genügen soll. Jetzt kann man an Stelle von (11.2) schreiben

$$
\begin{aligned}
s_{pq} &= \tau^p f + \tau^{p+1} f + \ldots + \tau^{p+q-1} f \\
&= \tau^p s_{0q}.
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

Setzt man diese Werte in (11.4) ein, so erhält man mit Berücksichtigung von (3.6)

$$
\begin{aligned}
s_p^* &= \max(\tau^p s_{01}, \tau^p s_{02}, \ldots, \tau^p s_{0n}) \\
&= \tau^p [\max(s_{01}, s_{02}, \ldots, s_{0n})] \\
&= \tau^p s_0^*.
\end{aligned} \tag{13.3}
$$

Nach dem Satz 1 sind also alle $s_p^* \geqq 0$, sobald $s_0^* \geqq 0$ ist. Diese Eigenschaft der Folgen (13.1), die hier an Stelle der komplizierten Birkhoffschen Konstruktion tritt, ist für die Aufstellung unserer Theorie entscheidend; wir sehen, daß sie mit der Forderung (3.3) in engstem Zusammenhange steht. Hier kann also der Satz 7 schon unter der Annahme $s_0^* \geqq 0$ angewandt werden; nach (11.19) und (13.1) haben wir dann

$$
f + \tau f + \ldots + \tau^{q-1} f + |\tau^q f| + |\tau^{q+1} f| + \ldots + |\tau^{q+n-2} f| \geqq 0. \tag{13.4}
$$

Indem wir die linke Seite von (13.4) über M integrieren und (9.4) sowie (10.4) beachten, erhalten wir

$$
q \int_M f \, d\varphi + (n - 1)\, \alpha \geqq 0. \tag{13.5}
$$

Die Relation (13.5) soll nun für ein festes n und für alle $q = 1, 2, \ldots$ gelten, was nur dann möglich ist, wenn

$$
\int_M f \, d\varphi \geqq 0 \tag{13.6}
$$

ist.

Die Bedingung $s_0^* \geqq 0$, aus welcher wir (13.6) gewonnen haben, wird schließlich durch eine andere äquivalente ersetzt. Dazu betrachten wir die Funktionen $\sigma_h f$, die durch die Gleichungen (10.5) definiert worden sind, und führen die Bezeichnung ein

$$
f_n^* = \max(\sigma_1 f, \sigma_2 f, \ldots, \sigma_n f). \tag{13.7}
$$

Dann ist selbstverständlich $f_n^* \geqq 0$, falls $s_0^* \geqq 0$ ist, und umgekehrt. Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz **8.** Es sei f eine über M summierbare Ortsfunktion aus $\mathfrak{F}$. Mit Hilfe der Funktionen der Folge

$$f,\ \tau f,\ \tau^2 f,\ \ldots,\ \tau^h f,\ \ldots$$

bilden wir die Funktionen

$$(13.8)\quad \sigma_1 f = f,\ \sigma_2 f = \frac{f+\tau f}{2},\ \ldots,\ \sigma_k f = \frac{f+\tau f+\ldots+\tau^{k-1} f}{k},\ \ldots$$

und setzen

$$(13.9)\qquad f_n^* = \max(\sigma_1 f,\ \sigma_2 f,\ \ldots,\ \sigma_n f) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ist dann für einen gewissen Wert von n

$$(13.10)\qquad f_n^* \geqq 0,$$

so hat man auch

$$(13.11)\qquad \int_M f\, d\varphi \geqq 0.$$

14. Der letzte Satz hat noch einen Schönheitsfehler. Nach (13.9) hat man nämlich $f_n^* \leqq f_{n+1}^*$ und die Bedingung (13.10) wird abgeschwächt, wenn man f_n^* durch f_{n+1}^* ersetzt. Es ist also zu vermuten, daß (13.11) noch gilt, wenn man (13.10) ersetzt durch

$$(14.1)\qquad \lim_{n=\infty} f_n^* \geqq 0.$$

Bezeichnet man nun mit $S_n^*(y)$ die untere Somenskala von f_n^*, so ist (14.1) dann und nur dann erfüllt, wenn

$$(14.2)\qquad \lim_{n=\infty} S_n^*(0) = O$$

ist.

Auf dem Soma $S_n^*(0)$ ist nach Voraussetzung $f_n^* \leqq 0$, und da $f = \sigma_1 f \leqq f_n^*$ ist, so ist auch dort $f \leqq 0$. Definiert man also, einen Kunstgriff des Herrn Pitt nachahmend, eine Ortsfunktion g durch die Gleichungen

$$(14.3)\qquad \begin{cases} g = 0 \text{ auf } S_n^*(0), \\ g = f \text{ auf } M - S_n^*(0), \end{cases}$$

so ist überall auf M

$$g \geqq f. \tag{14.4}$$

Daraus folgt weiter, wegen des Satzes 3

$$\tau^h g \geqq \tau^h f \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{14.5}$$

$$\sigma_k g \geqq \sigma_k f \tag{14.6}$$

und schließlich nach (13.9)

$$g_n^* \geqq f_n^*, \tag{14.7}$$

wenn man g_n^* durch die Gleichung

$$g_n^* = \max(\sigma_1 g,\ \sigma_2 g,\ \ldots,\ \sigma_n g) \tag{14.8}$$

definiert. Andererseits ist aber nach (14.8)

$$g_n^* \geqq \sigma_1 g = g$$

und daraus folgt mit Berücksichtigung von (14.7)

$$g_n^* \geqq \max(g,\ f_n^*) \tag{14.9}$$

Nun ist nach (14.3) $g = 0$ auf $S_n^*(0)$ und nach der Definition der Somenskalen ist $f_n^* \geqq 0$ auf $M - S_n^*(0)$. Also ist

$$g_n^* \geqq 0 \tag{14.10}$$

auf dem ganzen Soma M; außerdem ist die durch (14.3) definierte Ortsfunktion g ebenso wie f summierbar über M, so daß der Satz 8 auf die Funktion g angewandt werden kann. Danach ist

$$\int_M g\, d\varphi \geqq 0 \tag{14.11}$$

oder, wenn man für g seinen Wert (14.3) einsetzt,

$$\int_{M - S_n^*(0)} f\, d\varphi \geqq 0. \tag{14.12}$$

Die Beziehung (14.12) gilt für alle natürlichen Zahlen n. Wir nehmen nun an, daß die Relation (14.1) oder die ihr äquivalente Gleichung (14.2) bestehen soll. Dann folgt aus (14.12)

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ M-S_n^*(0)}} \int f\,d\varphi = \int_M f\,d\varphi \geqq 0. \tag{14.13}$$

Es gilt daher der

Satz **9.** Ist mit den Bezeichnungen des Satzes 8 die Ortsfunktion

$$f^* = \lim_{n=\infty} f_n^* \geqq 0, \tag{14.14}$$

so hat man auch

$$\int_M f\,d\varphi \geqq 0. \tag{14.15}$$

15. Für den Fall, daß die Maßfunktion $\varphi(X)$ auf dem Ring $\mathfrak{A}$ beschränkt bleibt, d. h. daß

$$\varphi(M) < +\infty \tag{15.1}$$

ist, kann man den Satz 9 durch einen allgemeineren Satz ersetzen.

Dazu bezeichnen wir mit

$$S^*(y) = \lim_{n=\infty} S_n^*(y) \tag{15.2}$$

die untere Somenskala der Ortsfunktion f^*, die durch (14.14) oder durch

$$f^* = \text{obere Grenze}\,(\sigma_1 f, \sigma_2 f, \ldots) \tag{15.3}$$

definiert ist. Ferner sei y eine beliebige reelle Zahl, die wir festhalten.

Hierauf definieren wir ähnlich, wie in (14.3) eine Ortsfunktion g durch die Gleichungen

$$\begin{cases} g = 0 \ \text{ auf } \ S^*(y), \\ g = f - y \ \text{ auf } \ M - S^*(y) \end{cases} \tag{15.4}$$

und bemerken, daß wegen (15.1) die Funktion g ebenso wie f über M summierbar ist.

Nun ist $f \leqq f^*$ auf M und $f^* \leqq y$ auf $S^*(y)$, also ist dort $f - y \leqq 0$. Es ist also

$$g \geqq f - y \tag{15.5}$$

überall auf M. Daraus schließt man ähnlich, wie im vorigen Paragraphen

$$\sigma_n g \geqq \sigma_n (f - y) = \sigma_n f - y. \tag{15.6}$$

Somit kann man schreiben

$$g^* \geqq f^* - y, \tag{15.7}$$

wenn man

$$g^* = \text{obere Grenze}\ (\sigma_1 g,\ \sigma_2 g,\ \ldots) \tag{15.8}$$

setzt. Aus (15.7) und $g^* \geqq \sigma_1 g = g$ folgt

$$g^* \geqq \max\,(g, f^* - y),$$

eine Relation, aus der man mit Hilfe von (15.4) schließt, daß

$$g^* \geqq 0$$

ist. Nach dem Satze 9 ist also

$$\int_M g\, d\varphi \geqq 0,$$

wofür man nach (15.4) setzen kann

$$\int_{M - S^*(y)} (f - y)\, d\varphi \geqq 0.$$

Diese Rechnung liefert den

Satz **10.** Wir behalten die Bezeichnungen der Sätze 8 und 9 bei, und machen die Annahme, daß

$$\varphi(M) < +\infty \tag{15.9}$$

ist. Bedeutet dann $S^*(y)$ die untere Somenskala von f^*, so gilt für jedes reelle y die Ungleichheit

$$\int_{M - S^*(y)} (f - y)\, d\varphi \geqq 0, \tag{15.10}$$

welche die Hauptungleichung der Ergodentheorie genannt wird.

Die Voraussetzungen des vorigen Satzes können noch ein wenig verallgemeinert werden. Wir haben nämlich die Beschränktheit der Maßfunktion $\varphi(X)$ nur dazu benutzt, um die Summierbarkeit der durch die Gleichungen (15.4) definierten Ortsfunktion g sicherzustellen. Nun ist aber g schon dann über M summierbar, wenn

$$\varphi(M - S^*(y)) < +\infty \tag{15.11}$$

ist. Man könnte also im Wortlaut des letzten Satzes die Bedingung (15.9) durch die Ungleichheit (15.11) ersetzen.