

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen  
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
zu München

---

Jahrgang 1943

---

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung





# Konforme Abbildung ausgezeichneter Kreisbogenvierecke. (Algebraische Lösungen der Lamé'schen Gleichung.)

Von Werner von Koppenfels in Brünn.

Mit 4 Abbildungen.

Vorgelegt von Herrn C. Carathéodory am 10. Dezember 1943.

Wenn in einem Kreisbogenviereck mit den Innenwinkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, m\pi$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) die unter dem Winkel  $m\pi$  zusammenstoßenden Seiten Bögen desselben Kreises sind, so gehören die drei Begrenzungskreise des Vierecks einem Steinerschen Netz an. Ist  $m \equiv 1 \pmod{2}$ , so zieht sich der Randbogen „glatt“ durch die vierte Ecke<sup>1</sup> hindurch, ist dagegen  $m \equiv 0 \pmod{2}$ , so läuft er in sich zurück, die vierte Ecke ist der Endpunkt eines Schlitzes. Die schlichten Grundbereiche sind das Innere eines Viertelkrei-

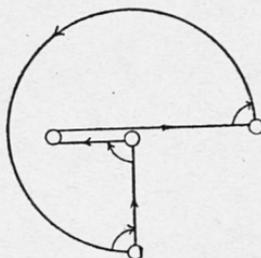


Abb. 1.

ses ( $m = 1$ ) und die Fläche eines Dreiviertelkreises, die in Verlängerung eines der beiden begrenzenden Radien eingeschlizt ist ( $m = 2$ ), oder durch lineare Transformationen hieraus entstehende Bereiche (Abb. 1). Aus ihnen gewinnt man nicht-schlichte Vierecke ( $m > 2$ ) dadurch, daß man im Sinne der Obertheoreme F. Kleins einzelne Seiten der Grundpolygone sich überschlagen läßt und dabei Halbebenen oder Kreisscheiben „polar

<sup>1</sup> Als „vierte Ecke“ werde im folgenden der Kürze halber die Ecke mit dem Winkel  $m\pi$  bezeichnet.

einhängt“. Schon die Diskussion der einfachsten Fälle zeigt aber, daß dieser Prozeß nicht alle höheren Polygone liefert, sondern daß auch ganz anders geartete Kreisbogenvierecke vorkommen (vgl. für  $m = 3$  das in Abb. 4 gezeichnete Viereck des 3. Typus).

Innerhalb der zweiparametrischen Scharen aller Kreisbogenvierecke mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, m\pi$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) nehmen die hier behandelten Vierecke, die für festes  $m$  nur von einem, die Lage der vierten Ecke bestimmenden reellen Parameter stetig abhängen, eine Sonderstellung ein, die auch funktionentheoretisch bedeutsam ist.

Die Funktionen, die eine Halbebene ( $x$ ) auf das Innere dieser ausgezeichneten Kreisbogenvierecke abbilden, sind die Quotienten algebraischer Lösungen der mit halbzahlgigen Werten des Parameters  $n$  gebildeten Lamé'schen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{\frac{1}{2}}{x-e_1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-e_2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-e_3} \right) \frac{dy}{dx} - \frac{n(n+1)x + A}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} y = 0 \quad \left( \begin{array}{l} n = m - \frac{1}{2} \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

Dabei ist der akzessorische Parameter  $A$  die Wurzel einer algebraischen Gleichung  $m^{\text{ten}}$  Grades, so daß die Abbildungsfunktion

$$(2) \quad \eta(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

in der Tat nur von einem wesentlichen Parameter, dem Doppelverhältnis der reellen Verzweigungspunkte  $e_1, e_2, e_3, \infty$  abhängt, der die Gestalt des Vierecks bestimmt. Liegt dieser ausgezeichnete Fall nicht vor, so ist der akzessorische Parameter  $A$  der zweiten geometrischen Konstanten des Vierecks  $\left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, m\pi \right)$  anzupassen.

Mit den algebraischen Lösungen der Lamé'schen Gleichung für halbzahlige Werte des Parameters  $n$  haben sich Brioschi<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Brioschi, *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine* (Ann. di Mat., serie II, t. IX, 1879) gewinnt algebraische Lösungen linearer Differentialgleichungen II. Ordnung vom Fuchs'schen Typus, indem

und Halphen<sup>3</sup> beschäftigt. Insbesondere gewann Halphen das Ergebnis: Genügt der akzessorische Parameter der Lamé'schen Differentialgleichung mit halbzahligem  $n$  einer gewissen algebraischen Gleichung des Grades  $n + \frac{1}{2}$ , so ist die allgemeine Lösung der Quotient eines Polynoms in  $\wp \frac{u}{2}$  ( $x = \wp u$ ), dividiert durch  $(\wp' \frac{u}{2})^n$ . Diese Tatsache liegt bei der Betrachtung der Kreisbogenvierecke auf der Hand und es ergeben sich darüber hinaus Einsichten in die Lage der Nullstellen des Polynoms.

**§ 1. Einfachste Form der Abbildungsfunktion.**

Die eingangs beschriebene Abbildungsaufgabe wird durch Zwischenschaltung einer  $\log \eta$ -Ebene gelöst. Sollen die Verzweigungspunkte  $\xi = 0, 1, \infty$  die Bilder der rechtwinkligen Ecken sein und zwar  $\xi = 1$  der Bildpunkt der in den Nullpunkt oder in den uneigentlichen Punkt der  $\eta$ -Ebene fallenden Ecke, so hat man den Ansatz

$$(3) \quad \log \eta = C \int \frac{(\xi - \beta)^{m-1}}{(\xi - 1) \prod_{\nu=1}^{m-1} (\xi - \alpha_\nu)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

zu machen und dafür zu sorgen, daß bei  $\xi = 1$  das Residuum gleich  $\pm \frac{1}{2}$  ist. Die zusätzlichen Verzweigungspunkte  $\xi = \alpha_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m - 1$ ) braucht man, um bei  $\xi = \infty$  das richtige Verhalten des Integrals zu erzwingen; damit sie keine weiteren Ecken liefern, müssen es reelle oder konjugiert komplexe einfache Pole mit den Residuen  $\pm 1$  sein. Aus dieser Forderung ergeben sich  $m$  Bedingungsgleichungen der Form

---

er polynomische Lösungen einer Differentialgleichung III. Ordnung aufsucht, der eine binäre Form  $F$  der Lösungen  $y_1, y_2$  genügt. Ist der Parameter  $n$  der Lamé'schen Differentialgleichung ganzzahlig, so ist  $F = y_1 y_2$ , ist  $n$  halbzahlig, so ist  $F = y_1^2 \cdot y_2^2 = (x - e_i) P^2(x)$  zu nehmen.

<sup>3</sup> Halphen, *Traité des fonctions elliptiques* (1888), t. II, p. 471-478, bestimmt mit invariantentheoretischen Methoden polynomische Lösungen der auf  $z = y \cdot (\wp' \frac{u}{2})^n$  transformierten Differentialgleichung.

$$(4) \quad C \frac{(1-\beta)^{m-1}}{\prod_{\mu=1}^{m-1} (1-\alpha_{\mu})} = \pm \frac{1}{2}, \quad C \frac{(\alpha_{\nu}-\beta)^{m-1}}{(\alpha_{\nu}-1) \prod_{\mu \neq \nu} (\alpha_{\nu}-\alpha_{\mu})} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\nu}}} = \pm 1$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, m-1)$$

zur Bestimmung von  $C$ ,  $\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$ . Die Normierung der Abbildungsfunktion geschieht durch Festlegung zweier Ecken des Kreisbogenvierecks:

$$(5) \quad \eta(1) = 0, \quad \eta(\infty) = 1.$$

Die erste Forderung bringt zum Ausdruck, daß für das Residuum bei  $\xi = 1$  der Wert  $+\frac{1}{2}$  gewählt ist, die zweite legt die untere Integrationsgrenze fest. Danach erhalten die Bestimmungsgleichungen für die Parameter  $\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$  als Funktionen von  $\beta$  die Form

$$(6) \quad \left( \frac{\alpha_{\nu}-\beta}{1-\beta} \right)^{2(m-1)} \prod_{\mu \neq \nu} \left( \frac{1-\alpha_{\mu}}{\alpha_{\nu}-\alpha_{\mu}} \right)^2 = 4\alpha_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m-1).$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen folgt aus (3)

$$\log \eta = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{(\xi-1) \sqrt{\xi}} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \sqrt{\alpha_{\nu}} \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{(\xi-\alpha_{\nu}) \sqrt{\xi}}$$

so daß sich schließlich

$$(7) \quad \eta = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{\xi+1}} \prod_{\nu=1}^{m-1} \frac{\sqrt{\xi}-\sqrt{\alpha_{\nu}}}{\sqrt{\xi}+\sqrt{\alpha_{\nu}}}}$$

ergibt. In dieser Funktionenschar ist für  $m = 1$  die Funktion

$$(8) \quad \eta^* = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{\xi+1}}}$$

enthalten, die eine  $\xi$ -Halbebene auf das Innere eines schlichten Viertelkreises abbildet. Für alle anderen Funktionen der Schar ist  $\eta^*$  ein uniformisierender Parameter, denn es gilt:

$$(9) \quad \xi = \left( \frac{1 + \eta^{*2}}{1 - \eta^{*2}} \right)^2, \quad \eta = \eta^* \prod_{\nu=1}^{m-1} \frac{\eta^{*2} - \alpha_\nu^{*2}}{1 - \alpha_\nu^{*2} \eta^{*2}} \quad \left( \alpha_\nu^* = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_\nu} - 1}{\sqrt{\alpha_\nu} + 1}} \right)$$

## § 2. Teilung der elliptischen Funktionen; Uniformisierung der Abbildungsfunktion durch $\wp \frac{u}{2}$ .

Die Abbildungsfunktion (8) des schlichten Viertelkreises ( $m = 1$ ) enthält die Lösung des Teilungsproblems der elliptischen Funktionen für den einfachsten Fall (Hälfte des Argumentes). Geht man nämlich durch die linearen Transformationen:

$$(10) \quad (\xi, 1, 0, \infty) = (x, e_2, e_3, e_1)$$

$$(11) \quad (\eta^*, 1, 0, \infty) = (t, e_1 + \rho_1, e_2 - \rho_2, e_2 + \rho_2) \\ \rho_i^2 = (e_i - e_h)(e_i - e_l)$$

von den Veränderlichen  $\xi, \eta^*$  zu den Veränderlichen  $x, t$  über und setzt

$$(12) \quad x = \wp(u; \omega_1, \omega_2)$$

so gibt die transformierte Gleichung mit Rücksicht auf

$$\frac{e_1 - e_2 + \rho_1 - \rho_2}{e_1 - e_2 + \rho_1 + \rho_2} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_3 - e_2}} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2} - \sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

in

$$(13) \quad \eta^* = \sqrt{\frac{\sqrt{e_1 - e_2} - \sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_3 - e_2}} \frac{t - e_2 + \rho_2}{t - e_2 - \rho_2}} \\ = \sqrt{\frac{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{x - e_3} - \sqrt{e_3 - e_2} \sqrt{x - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{x - e_3} + \sqrt{e_3 - e_2} \sqrt{x - e_1}}}$$

die Abbildung der  $x$ -Halbebene auf das rechtwinklige Kreisbogendreieck, das dem Viertel-Rechteck der Perioden entspricht. (Abb. 2). Es ist also

$$(14) \quad t = \wp\left(\frac{u}{2}; \omega_1, \omega_2\right)$$

zu setzen und man erhält aus (13)

$$(15) \quad \wp \frac{u}{2} = \wp u + \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} + \sqrt{(\wp u - e_3)(\wp u - e_1)} + \sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)}.$$

Beachtet man die eindeutige Erklärung der Quadratwurzeln durch

$$(16) \quad -\pi < \arccos(\wp u - e_i) < \pi,$$

so folgt insbesondere

$$(17) \quad \wp \frac{\omega_1}{2} = e_1 + \rho_1, \quad \wp \frac{\omega_2}{2} = e_2 - \rho_2, \quad \wp \frac{\omega_3}{2} = e_3 - i\rho_3$$

(vgl. Abb. 2). Bei einer Vermehrung des Argumentes  $u$  um eine volle Periode  $2\omega_i$  (Spiegelung an zwei parallelen Seiten des Rechtecks) bleibt  $x$  ungeändert und  $t = \wp \frac{u}{2}$  erfährt eine lineare Substitution, deren Koeffizienten man der Abb. 2 entnimmt.<sup>4</sup> In der  $x$ -Ebene entspricht dieser zweimaligen Spiegelung ein

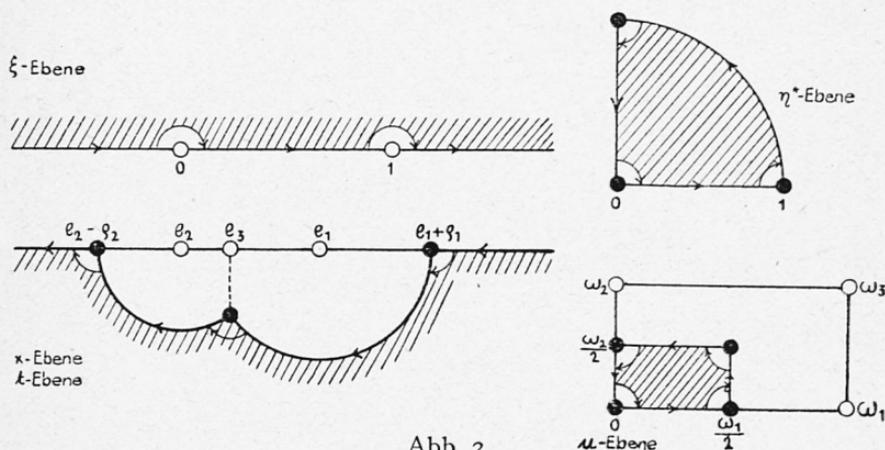


Abb. 2.

<sup>4</sup> z. B. entsprechen den beiden Spiegelungen des schraffierten Rechtecks, die den Übergang von  $\frac{u}{2}$  zu  $\frac{u}{2} + \omega_1$  bewirken, zwei Spiegelungen des Kreisbogendreiecks in der  $t$ -Ebene, für die  $(\wp(\frac{u}{2} + \omega_1), e_1 + \rho_1, e_1, \infty) = (\wp \frac{u}{2}, e_1 + \rho_1, \infty, e_1)$  gilt. Also wird:

$$\wp \left( \frac{u}{2} + \omega_1 \right) = T_1 \wp \frac{u}{2} = \frac{e_1 \wp \frac{u}{2} + e_1^2 + e_2 e_3}{\wp \frac{u}{2} - e_1}.$$

einfacher geschlossener Umlauf um zwei Verzweigungspunkte  $x = e_h$ ,  $x = e_l$  und da dieser Umlauf den Vorzeichenwechsel der beiden Quadratwurzeln  $\sqrt{x - e_h}$ ,  $\sqrt{x - e_l}$  nach sich zieht, so folgt aus (15)

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 \wp \frac{u}{2} = \wp \left( \frac{u}{2} + \omega_1 \right) \\ \quad = \wp u + \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} - \sqrt{(\wp u - e_3)(\wp u - e_1)} - \sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)} \\ T_2 \wp \frac{u}{2} = \wp \left( \frac{u}{2} + \omega_2 \right) \\ \quad = \wp u + \sqrt{(\wp u - e_3)(\wp u - e_1)} - \sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)} - \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} \\ T_3 \wp \frac{u}{2} = \wp \left( \frac{u}{2} + \omega_1 + \omega_2 \right) \\ \quad = \wp u + \sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)} - \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} - \sqrt{(\wp u - e_3)(\wp u - e_1)}. \end{array} \right.$$

In  $t = \wp \frac{u}{2}$ ,  $T_i \wp \frac{u}{2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) hat man die Wurzeln der Teilungsgleichung

$$(19) \quad x - \wp(t) \equiv x - \frac{t^4 + \frac{1}{2}g_2 t^2 + 2g_3 t + \frac{1}{16}g_2^2}{4t^3 - g_2 t - g_3} = 0 \quad (x = \wp u).$$

Die Abbildungsfunktion des Rechtecks der Halbperioden auf den schlichten Viertelkreis erhält danach die Gestalt:

$$(20) \quad \eta^* = \frac{\wp \frac{\omega_1}{2} \wp - \left( \frac{\omega_2}{2} + \omega_1 \right)}{\wp \frac{\omega_1}{2} - \wp \frac{\omega_2}{2}} \cdot \frac{\wp \frac{u}{2} - \wp \frac{\omega_2}{2}}{\wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{\omega_2}{2} + \omega_1 \right)}$$

Um die entsprechende, in  $\wp \frac{u}{2}$  rationale Darstellung der Abbildungsfunktion des Rechtecks auf das ausgezeichnete Kreisbogenviereck für beliebige ganzzahlige Werte von  $m$  zu erhalten, ist dieser letzte Ausdruck in (9) einzusetzen. Bedenkt man, daß die Nullstellen und Pole jedes einzelnen Faktors dieses Produktes durch Spiegelung des in die  $\eta^*$ -Ebene überpflanzten Verzweigungspunktes  $\alpha_v$  an der Achse des Imaginären sowie am Einheitskreis erhalten werden, und daß sich diese beiden Linien in

die Mittellinien des Periodenrechtecks der  $u$ -Ebene abbilden, so gewinnt man ohne Rechnung das Ergebnis:

(21)

$$\eta(u) = k \frac{\wp \frac{u}{2} - \wp \frac{\omega_2}{2}}{\wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{\omega_2}{2} + \omega_1 \right)} \prod_{v=1}^{m-1} \frac{\left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \frac{a_v}{2} \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_v}{2} + \omega_2 \right) \right]}{\left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_v}{2} + \omega_1 \right) \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_v}{2} + \omega_1 + \omega_2 \right) \right]}$$

Die Konstante  $k$  bestimmt sich aus der Forderung:

(22) 
$$\eta(\omega_1) = 1.$$

Die Verzweigungspunkte  $A_v = \wp a_v$  sind die Bilder der Zusatzpole  $\xi = \alpha_v$  und werden daher nach (10) durch die lineare Transformation

(23) 
$$(\alpha_v, 1, 0, \infty) = (\wp a_v, e_2, e_3, e_1)$$

aus diesen erhalten. Wird überdies durch die Festsetzung

(24) 
$$(\beta, 1, 0, \infty) = (\infty, e_2, e_3, e_1)$$

dafür gesorgt, daß das Bild der vierten Ecke des Kreisbogenvierecks der uneigentliche Punkt der  $x$ -Ebene wird, so verwandeln sich die Bestimmungsgleichungen (6) für die Parameter in die Gleichungen

(25) 
$$\prod_{\mu \neq v} \left( \frac{e_2 - \wp a_\mu}{\wp a_v - \wp a_\mu} \right)^2 = 4 \frac{(\wp a_v - e_1)(\wp a_v - e_3)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \quad (v = 1, 2, \dots, m-1)$$

### § 3. Die algebraischen Lösungen der Lamé'schen Differentialgleichung mit halbzahligem Parameter.

Die Abbildungsfunktion  $\eta(u)$  ist der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen der auf die unabhängige Veränderliche  $u$  transformierten Lamé'schen Differentialgleichung (1):

(26) 
$$\frac{d^2 y}{du^2} - \left[ \left( m^2 - \frac{1}{4} \right) \wp u + A \right] y = 0.$$

Diese Lösungen stellen sich, wie man unmittelbar sieht, in der Form

$$(27) \quad y_1(u) = \eta(u) \sqrt{\frac{du}{d\eta}}, \quad y_2(u) = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}$$

dar. Um diese Ausdrücke zu bilden, ist es am einfachsten, die Integraldarstellung (3) für  $\log \eta$  der Transformation (10), (12) zu unterwerfen unter Beachtung der Beziehungen (23), (24). Der Nenner des transformierten Integrals

$$(28) \quad \log \eta = C \int \frac{du}{\prod_{\nu=1}^{m-1} (\wp u - \wp a_\nu) \sqrt{\wp u - e_2}}$$

ist das Produkt der Lösungen (27). Mit Rücksicht auf die oben (§ 2) berechneten Nullstellen der Teilungsgleichung (19) wird

$$(29) \quad \wp u - \wp a_\nu = \wp \left( \frac{u}{2} \right) - \wp a_\nu =$$

$$= \frac{\left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \frac{a_\nu}{2} \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_\nu}{2} + \omega_2 \right) \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_\nu}{2} + \omega_1 \right) \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{u}{2} + \omega_1 + \omega_2 \right) \right]}{\wp'^2 \frac{u}{2}}$$

$$(29a) \quad \sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \frac{\omega_2}{2} \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{\omega_2}{2} + \omega_1 \right) \right]}{\wp' \frac{u}{2}}$$

In Verbindung mit (21) erhalten hiernach die Lösungen die Gestalt:

$$(30)$$

$$y_1(u) = \frac{\left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \frac{\omega_2}{2} \right] \prod_{\nu=1}^{m-1} \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \frac{a_\nu}{2} \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_\nu}{2} + \omega_2 \right) \right]}{\left( \wp' \frac{u}{2} \right)^{m-\frac{1}{2}}}$$

$$y_2(u) = \frac{\left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{\omega_2}{2} + \omega_1 \right) \right] \prod_{\nu=1}^{m-1} \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_\nu}{2} + \omega_1 \right) \right] \left[ \wp \frac{u}{2} - \wp \left( \frac{a_\nu}{2} + \omega_1 + \omega_2 \right) \right]}{\left( \wp' \frac{u}{2} \right)^{m-\frac{1}{2}}}$$

Die wirkliche Bildung der Differentialgleichung (26) ist bei diesem Vorgehen der letzte Schritt. Er zeigt die Abhängigkeit des akzessorischen Parameters  $A$  von den zusätzlichen Verzweigungspunkten  $a_v$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise setzt man etwa in der ersten Lösung

$$a_0 = \omega_2; \quad a_m = a_1 + 2\omega_2, \quad a_{m+1} = a_2 + 2\omega_2, \quad \dots \quad a_{2m-2} = a_{m-1} + 2\omega_2$$

und findet dann durch Bildung der logarithmischen Ableitung von

$$y_1(u) = \frac{\prod_{v=0}^{2m-2} \left( \wp \frac{u}{2} - \wp \frac{a_v}{2} \right)}{\left( \wp' \frac{u}{2} \right)^{m-\frac{1}{2}}}$$

und nochmalige Differentiation nach einigen Umformungen:

$$\frac{y_1''(u)}{y_1(u)} = \left( m^2 - \frac{1}{4} \right) \wp u + (m-1) \sum_{v=0}^{2m-2} \wp \frac{a_v}{2} + \sum_{v=0}^{2m-2} \frac{1}{\wp \frac{u}{2} - \wp \frac{a_v}{2}} \left[ -\frac{m-1}{2} \wp'' \frac{a_v}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq v} \frac{\wp'^2 \frac{a_v}{2}}{\wp \frac{a_v}{2} - \wp \frac{a_\mu}{2}} \right]$$

Die Bedingungsgleichungen (25) haben zur Folge, daß die Ausdrücke in den eckigen Klammern für alle  $v$  verschwinden. Der akzessorische Parameter  $A$  in (26) erhält nach Rückgang zur alten Bezeichnungsweise die Form

$$(31a) \quad A = (m-1) \left( \wp \frac{\omega_2}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} \left[ \wp \frac{a_v}{2} + \wp \left( \frac{a_v}{2} + \omega_2 \right) \right] \right).$$

Entsprechend ergibt sich mit der anderen Lösung (30):

$$(31b) \quad A = (m-1) \left( \wp \left( \frac{\omega_2}{2} + \omega_2 \right) + \sum_{v=1}^{m-1} \left[ \wp \left( \frac{a_v}{2} + \omega_1 \right) + \wp \left( \frac{a_v}{2} + \omega_1 + \omega_2 \right) \right] \right).$$

Durch Addition beider Ausdrücke folgt schließlich unter Berücksichtigung der Teilungsgleichung (19):

$$(31) \quad A = (m-1) \left[ 2 \sum_{\nu=1}^{m-1} \wp a_{\nu} + \wp \omega_2 \right]^5$$

Da die  $m - 1$  Bedingungsgleichungen (25), die durch Elimination der multiplikativen Konstanten  $C$  aus den Residuengleichungen (4) entstanden sind, alle zusätzlichen Parameter  $\wp a_1 \dots \wp a_{m-1}$  festlegen, so ist der akzessorische Parameter (31) mitbestimmt. Hierin liegt der wesentliche Unterschied gegenüber den Verhältnissen bei der Lamé'schen Differentialgleichung mit ganzzahligem Parameter  $n$ . Bei dieser gibt die Abbildungsfunktion des Kreisbogenvierecks  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi\right)$  zu  $n$  Residuengleichungen Anlaß, die die  $n + 1$  Unbekannten — die  $n$  Zusatzpole und die multiplikative Konstante  $C$  — noch nicht vollständig festlegen. Eine Bedingung bleibt frei verfügbar und das hat zur Folge, daß der akzessorische Parameter willkürlich vorgegeben werden kann. In dem hier behandelten Fall halbzahlgiger Werte des Parameters  $n$   $\left(n = m - \frac{1}{2}\right)$  tritt jedoch neben die  $m - 1$  Residuengleichungen für die zusätzlichen Verzweigungspunkte  $\wp a_1 \dots \wp a_{m-1}$  noch die Bedingung, daß das Residuum im Verzweigungspunkt  $e_2$ , dessen Bildpunkt eine rechtwinklige Ecke des Polygons ist, den Wert  $\frac{1}{2}$  hat. Durch diese  $m$  Gleichungen sind aber alle Konstanten  $C$ ,  $\wp a_1 \dots \wp a_{m-1}$  vollständig bestimmt und der akzessorische Parameter (31) ist nicht mehr frei verfügbar. Der innere Grund liegt darin, daß mit dem Ansatz (3) der Abbildungsfunktion nur diejenigen Kreisbogenvierecke  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, m\pi\right)$  erfaßt werden, die sich in ein Steiner'sches Kreisnetz einbetten lassen, und diese bilden — im Gegensatz zu den Vierecken  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi\right)$ , die alle diese Eigenschaft aufweisen — nur eine einparametrische Teil-schar. Sie sind eingangs dadurch charakterisiert worden, daß die

<sup>5</sup> Vgl. hierzu die entsprechende Formel  $A = (2n - 1) \sum_{\nu=1}^n \wp a_{\nu}$  bei der Lamé'schen Differentialgleichung mit ganzzahligem  $n$ . Im Text ist  $m = n + \frac{1}{2}$ .

in der vierten Ecke zusammenstoßenden Seiten Bögen desselben Kreises sind.

#### § 4. Die einfachsten Fälle.

Im folgenden werden für  $m = 2$  und für  $m = 3$  die Kreisbogenvierecke angegeben, die den verschiedenen Werten des akzessorischen Parameters entsprechen. Dabei sind jeweils zwei verschiedene Anordnungen der Verzweigungspunkte  $e_i$  zu unterscheiden. Bei der Anordnung  $e_2 < e_3 < e_1$  folgen die beiden gleichartigen Verzweigungspunkte  $e_1, e_3$  und die beiden ausgezeichneten Verzweigungspunkte  $e_2, \infty$  paarweise aufeinander, die vierte Ecke ( $m\pi$ ) liegt auf einer radialen Begrenzungslinie. Bei der Anordnung  $e_3 < e_2 < e_1$  dagegen trennen sich die gleichartigen und die ausgezeichneten Ecken paarweise, die vierte Ecke liegt auf dem Kreisbogen.

$$m = 2$$

Der einzigen Bedingungsgleichung

$$(25)_2 \quad 1 = 4 \frac{(A_1 - e_1)(A_1 - e_3)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \quad (A_1 = \wp a_1)$$

entnimmt man die beiden Werte

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{3}{4} g_2 - e_2} \right) \quad A_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{3}{4} g_2 + e_2} \right).$$

Sie geben zu entgegengesetzt gleichen Werten des akzessorischen Parameters

$$(31)_2 \quad A = 2A_1 + e_2$$

Anlaß, die der Gleichung

$$(32)_2 \quad A^2 - \frac{3}{4} g_2 = 0$$

genügen. Es gibt also für  $m = 2$  zwei verschiedene algebraisch integrierbare Differentialgleichungen (1) mit den akzessorischen Parametern

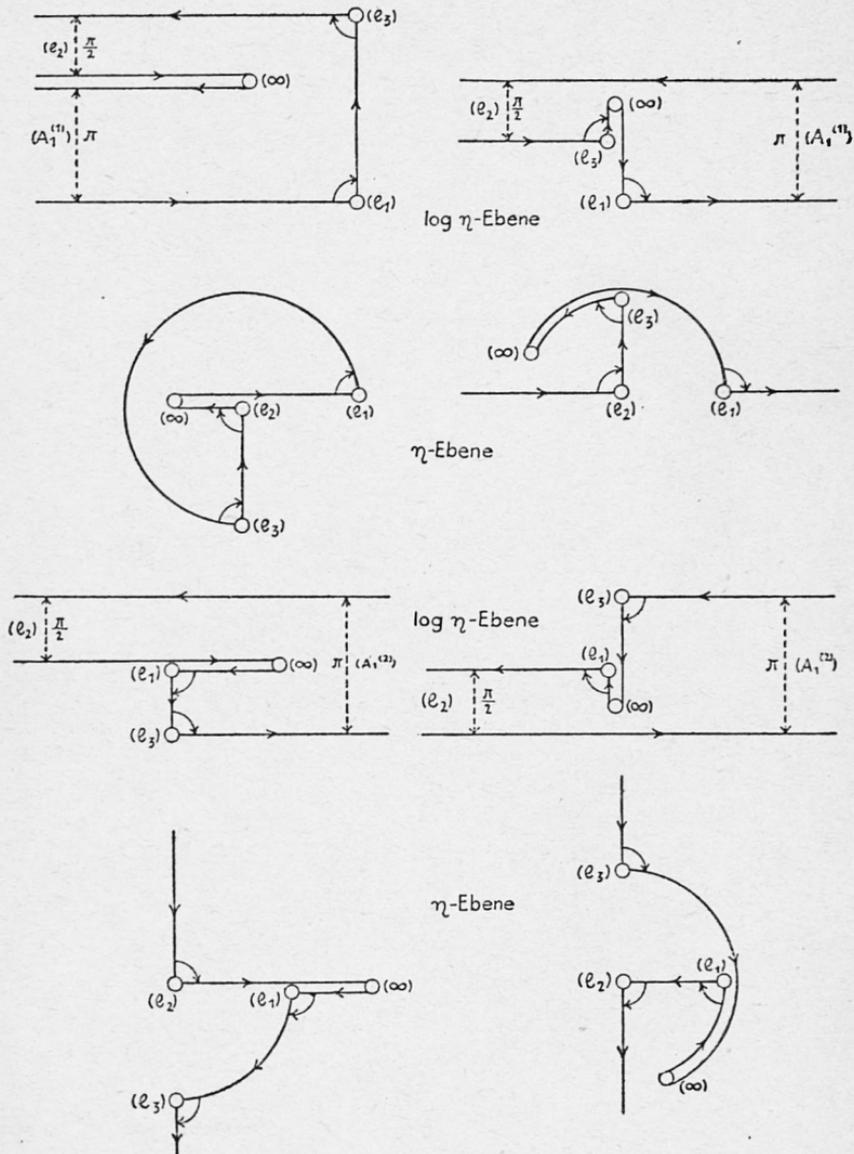


Abb. 3.

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3g_2} \quad A^{(2)} = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{3g_2}$$

Über die Lage des zusätzlichen Verzweigungspunktes  $A_1^{(i)}$  ( $i=1,2$ ) unterrichtet das folgende Schema:

	$e_2 < e_3 < e_1$	$e_3 < e_2 < e_1$
$A^{(1)}$	$e_1 < A_1^{(1)}$	$e_2 < A_1^{(1)} < e_1$
$A^{(2)}$	$e_2 < A_1^{(2)} < e_3$	$e_3 < A_1^{(2)} < e_2$

Die Abbildungen sind entsprechend angeordnet. (Abb. 3.)

$m = 3$

Aus den beiden Bedingungsgleichungen

$$(25)_3 \quad \begin{aligned} \left(\frac{e_2 - A_2}{A_1 - A_2}\right)^2 &= 4 \frac{(A_1 - e_1)(A_1 - e_3)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}, \\ \left(\frac{e_2 - A_1}{A_2 - A_1}\right)^2 &= 4 \frac{(A_2 - e_1)(A_2 - e_3)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \end{aligned} \quad (A_i = \wp a_i)$$

gewinnt man eine Gleichung 6. Grades für  $A_1$  und  $A_2$ , deren Wurzeln sich zu drei Lösungspaaren  $(A_1^{(i)}, A_2^{(i)})$   $i=1, 2, 3$  des Systems  $(25)_3$  zusammenfügen. Die zugehörigen akzessorischen Parameter

$$(31)_3 \quad A^{(i)} = 4(A_1^{(i)} + A_2^{(i)}) + 2e_2 \quad (i=1, 2, 3)$$

genügen der Gleichung

$$(32)_3 \quad \boxed{A^3 - 7g_2 A + 20g_3 = 0}^6$$

Man kann diese Gleichung unmittelbar aus dem System  $(25)_3$  erhalten, wenn man die in  $A_1, A_2$  symmetrischen Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 - e_2 &= -\frac{\sqrt{(A_1 - e_1)(A_1 - e_3)}}{\sqrt{(A_2 - e_1)(A_2 - e_3)}}, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} &= \sqrt{(A_1 - e_1)(A_1 - e_3)} + \sqrt{(A_2 - e_1)(A_2 - e_3)} \end{aligned}$$

\* Die Bedingungsgleichungen, denen der akzessorische Parameter in den Fällen der algebraischen Integrierbarkeit genügt, hat schon E. Haentzschel

bildet<sup>7</sup> und das Produkt  $A_1 A_2$  eliminiert. Die so erhaltene Gleichung für die Summe  $A_1 + A_2$  ist allerdings vom fünften Grade, da sie alle Möglichkeiten der Vorzeichenverteilung auf die Quadratwurzeln umfaßt. Nach Abspaltung eines quadratischen Faktors ergibt sich für  $A_1 + A_2$  eine kubische Gleichung, die mit  $(32)_3$  gleichbedeutend ist.

Den drei verschiedenen reellen Werten des akzessorischen Parameters entsprechen die in dem folgenden Schema zusammengestellten Verteilungen der Paare zusätzlicher Verzweigungspunkte  $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$$e_2 < e_3 < e_1$$

$$e_3 < e_2 < e_1$$

$A^{(1)}$	$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ konj. komplex	$e_2 < A_2^{(1)} < A_1^{(1)} < e_1$
$A^{(2)}$	$e_2 < A_2^{(2)} < A_1^{(2)} < e_3$	$e_3 < A_2^{(2)} < A_1^{(2)} < e_2$
$A^{(3)}$	$e_2 < A_2^{(3)} < e_3 < e_1 < A_1^{(3)}$	$e_3 < A_2^{(3)} < e_2 < A_1^{(3)} < e_1$

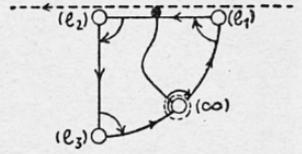
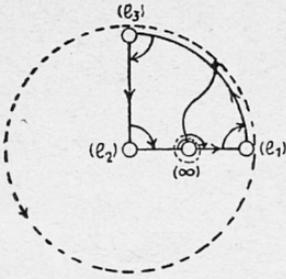
Der Vergleich der Tabellen für  $m = 2$  und  $m = 3$  zeigt, daß die zweite die sinngemäße Erweiterung der ersten darstellt. Die beiden Verzweigungspunkte sind unabhängig voneinander den gleichen Bedingungen unterworfen wie der eine Verzweigungspunkt in der ersten Tabelle ( $m = 2$ ), d. h. die beiden Verzweigungspunkte sind auf alle möglichen Arten auf die zwei Intervalle  $\langle e_2, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle$  verteilt. Dies ergibt bei jeder Anordnung der  $e_i$  drei verschiedene Möglichkeiten.<sup>8</sup> Daß das Intervall  $\langle e_3, e_1 \rangle$  unbesetzt bleiben muß, lassen die Bedingungsgleichungen  $(25)_3$  unmittelbar erkennen. In der Tat wird das Intervall  $\langle e_3, e_1 \rangle$  in einen Bogen des Einheitskreises abgebildet und kann deshalb keinen Zusatzpol tragen.

angegeben (Diss. 1883, Berlin, sowie „Studien über die Reduktion der Potentialgleichung“, Berlin 1893, S. 50, 55). Er wies als erster darauf hin, daß Brioschis Integrale (l. c.<sup>1</sup>) an diese Bedingungsgleichungen geknüpft sind.

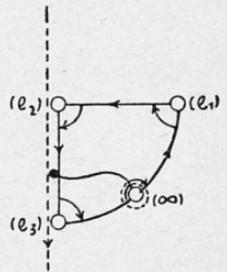
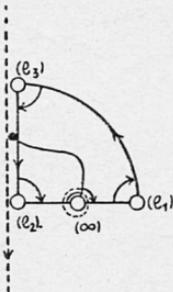
<sup>7</sup> In diesen Gleichungen sind die Vorzeichen der Quadratwurzeln nicht unabhängig voneinander: hat der Quotient der Wurzeln das negative (bzw. positive) Zeichen, so muß in der anderen Gleichung die Summe (bzw. Differenz) der Wurzeln stehen.

<sup>8</sup> Bei dieser Einteilung wird der uneigentliche Punkt nicht als Verzweigungspunkt angesehen, so daß  $e_1, e_2, e_3$  bei jeder Anordnung drei nicht übereinandergreifende Intervalle bestimmen.

A (1)



A (2)



A (3)

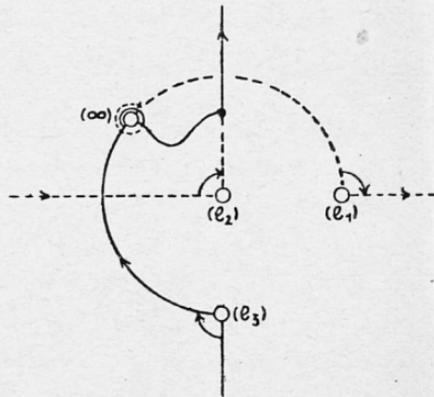
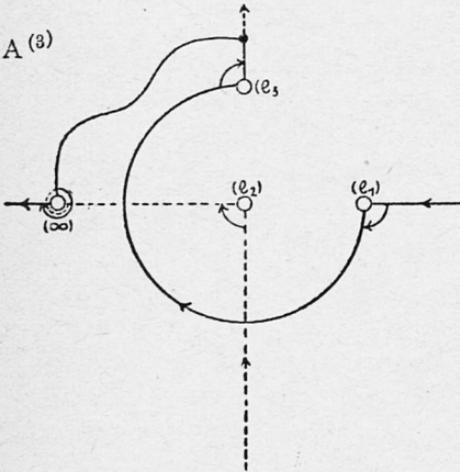


Abb. 4.

Erstaunlich scheint zunächst, daß statt des zu erwartenden Falles  $e_1 < A_2^{(1)} < A_1^{(1)}$  komplexe Zusatzpole auftreten. Das hat seinen Grund darin, daß ein Paar aufeinanderfolgender, durch keinen Verzweigungspunkt  $e_i$  getrennter Zusatzpole die „Überschlagung“ einer Seite und das Einhängen einer Halbebene bewirkt. Auf dieser sich überschlagenden Seite kann aber offenbar niemals der Windungspunkt liegen, der das Bild des uneigentlichen Punktes  $x = \infty$  ist und den Winkel  $3\pi$  aufweist. Führt man von dem in der unteren Halbebene liegenden komplexen Zusatzpol einen Schnitt nach einem Randpunkt des Intervalls  $\langle e_3, e_1 \rangle$  und bildet diese eingeschlitzte Halbebene auf die  $\eta$ -Ebene ab, so zeigt sich nach Löschung des Schlitzes in der  $\eta$ -Ebene, daß das Bildgebiet der unteren Halbebene ein Sektor mit eingehängter Kreisscheibe ist.

Die Kreisbogenvierecke, die zu dem akzessorischen Parameter  $A^{(3)}$  gehören, können nicht durch den Prozeß der Überschlagung einer Seite (Anhängung einer Halbebene oder einer Kreisfläche) aus dem schlichten Grundgebiet, dem rechtwinkligen Sektor gewonnen werden. Sie stellen einen neuen Typus dar, der sich auch bei den heuristischen Betrachtungen F. Kleins anlässlich der Oszillationstheoreme nicht findet (Abb. 4).

Es liegt auf der Hand, wie die Diskussion für  $m > 3$  fortzusetzen ist. Allgemein kann man aussagen, daß im Fall eines Kreisbogenvierecks mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, m\pi$  der akzessorische Parameter einer Gleichung  $m^{\text{ten}}$  Grades genügt. Den  $m$  verschiedenen Differentialgleichungen, die sich mit den möglichen Werten des akzessorischen Parameters ergeben, entsprechen ebenso viele Polygontypen in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß es genau  $m$  verschiedene Möglichkeiten gibt,  $m - 1$  Zusatzpole auf zwei Intervalle zu verteilen. Diese Bemerkung ist cum grano salis zu verstehen, insofern als das Intervall, das den uneigentlichen Punkt enthält, nie mehr als einen Zusatzpol tragen darf. Da aber an die Stelle jedes Paares, das auf dieses Intervall fallen müßte, konjugiert komplexe Pole treten, so ändert sich an der Abzählung der Möglichkeiten nichts.