

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1943

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Symmetrische Inzidenztafeln finiter Geometrien.

Von Anton Hager in München.

Mit 9 Abbildungen.

Vorgelegt von Herrn R. Baldus am 5. März 1943.

I. Ebene Geometrien.

Die folgenden Ausführungen befassen sich mit der Herleitung spezieller, nämlich symmetrischer Inzidenztafeln gewisser finiter Geometrien.

Die aus der Literatur bekannten Verfahren zur Aufstellung von Inzidenztafeln liefern diese zunächst in unsymmetrischer Form. Zu ihrer Symmetrisierung wird eine nicht auf analytische Überlegungen aufgebaute Methode vorgeführt, die auch in den Fällen angewendet werden kann, in denen die übliche Darstellung durch Koordinaten, die einem endlichen Körper angehören, versagt. Da formal in sich duale Axiome, wie gezeigt wird, noch nicht die Gültigkeit des Dualitätsprinzips in der einzelnen der dadurch bestimmten Geometrien sichern,¹ kann dieses angegebene Symmetrisierungsprinzip auch dazu dienen, zu entscheiden, ob eine Geometrie in sich dual ist oder nicht; denn nur in sich duale Geometrien können durch symmetrische Inzidenztafeln dargestellt werden.

Besonderes Interesse beansprucht unter den verschiedenen möglichen symmetrischen Inzidenztafeln die sog. Streifen-darstellung. Die unmittelbare Gewinnung einer solchen auf analytischem Wege wird an einem räumlichen Beispiel durch sinngemäße Erweiterung einer bereits für ebene Geometrien vorliegenden Methode gezeigt. Daneben wird zu ihrer Herleitung für ebene wie für räumliche Geometrien mit Hilfe der fixpunkt-freien Kollineationen der projektiven finiten Geometrien ein wiederum nicht analytisches Verfahren entwickelt, das Eigen-

¹ Ein einfaches Beispiel bringt R. Baldus, diese Sitzungsberichte 1943, S. 1*/2*.

schaften dieser Geometrien in Erscheinung treten läßt, denen in der gewöhnlichen projektiven Geometrie nichts Entsprechendes an die Seite gestellt werden kann. Für ebene Geometrien wird schließlich eine weitere Methode vorgeführt, die sich auf einen in anderer (zahlentheoretischer) Form bereits bekannten Satz gründet und mit Vorteil als rasche Kontrollmethode Verwendung finden kann.

1. Allgemeines. Den Begriff der ebenen finiten projektiven Geometrie kann man bekanntlich folgendermaßen erklären: Gegeben seien zwei endliche Mengen, deren jede mindestens zwei Elemente enthält, und eine Beziehung, in der je ein Element der einen Menge zu einem Element der anderen Menge stehen kann, und die folgende Eigenschaft besitzt:

Werden irgend zwei verschiedene Elemente einer beliebigen der beiden Mengen herausgegriffen, so gibt es stets genau ein Element der anderen Menge, das mit jenen beiden in der vorausgesetzten Beziehung steht.

Ein derartig gekoppeltes Paar endlicher Mengen heißt eine ebene finite projektive Geometrie; die Elemente der einen Menge nennen wir Punkte, die der anderen Geraden, einen Punkt und eine Gerade, die in der genannten Beziehung zueinander stehen, inzident.

Vertauscht man die Bezeichnungen Punkt und Gerade, so erhält man eine neue Geometrie, die zu der ersten dual heißt. Eine übersichtliche Darstellung einer ebenen finiten projektiven Geometrie läßt sich gewinnen, wenn man den Punkten die Zeilen, den Geraden die Spalten eines rechteckigen Schemas umkehrbar eindeutig zuordnet und an der Kreuzungsstelle einer Zeile und einer Spalte dann und nur dann eine Inzidenzmarke \times anbringt, wenn der der Zeile entsprechende Punkt und die der Spalte entsprechende Gerade inzident sind (Inzidenztafel). Der durch die μ -te Zeile dargestellte Punkt werde kurz mit μ , die durch die ν -te Spalte dargestellte Gerade mit (ν) bezeichnet.

Nach der obigen Definition geben die Abbildungen 1 und 2 einfache Beispiele ebener finiter projektiver Geometrien, wenn man die Worte Punkt, Gerade und inzident im gewöhnlichen Sinne versteht; das kann man leicht nachprüfen. Im Falle der

Abbildung 1 könnte man statt drei auf (1) liegender Punkte beliebig viele, jedoch mindestens zwei, und unabhängig von der Gesamtzahl der Punkte statt zwei durch 1 gehender Geraden beliebig viele, jedoch wieder mindestens zwei annehmen. Im Falle der Abbildung 2 könnte man beliebig viele, jedoch mindestens drei Punkte 2, 3, 4, auf (1) annehmen, die dann ebenso viele Geraden durch 1 bestimmen würden. Alle durch Abbildung 2

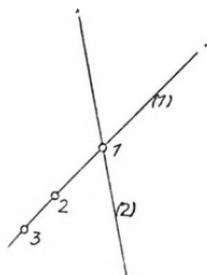


Abb. 1

	(1)	(2)
1	×	×
2	×	0
3	×	0

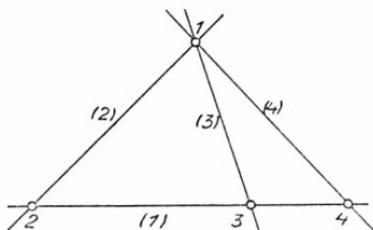


Abb. 2

	(1)	(2)	(3)	(4)
1	×	×	×	×
2	×	×	0	0
3	×	0	×	×
4	×	0	0	×

dargestellten Beispiele sind in sich dual, d. h. es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte auf die Geraden, bei der die Inzidenzbeziehung erhalten bleibt. Aus diesem Grunde läßt sich die Inzidenztafel einer in sich dualen Geometrie symmetrisch schreiben, d. h. derart, daß die Inzidenzzeichen symmetrisch zur einen oder anderen Diagonale verteilt sind; vgl. Abbildung 2. Die Beispiele der Abbildung 1 sind dann und nur dann in sich dual, wenn die Gesamtzahl der Punkte der Geraden gleich ist, sonst nicht.² Alle bis jetzt besprochenen Beispiele zeigen Geometrien, in denen nicht alle Punkte mit gleich vielen Geraden inzident sind; wir nennen sie deshalb inhomogen. Es läßt sich beweisen, daß die angeführten Beispiele sämtliche inhomogenen ebenen finiten projektiven Geometrien er-

² Die durch Abbildung 1 gegebenen Geometrien könnte man dadurch ausschließen, daß man in die Definition als weitere Eigenschaft aufnimmt:

Jedes Element der einen Menge soll mit wenigstens zwei Elementen der anderen in der angenommenen Beziehung stehen.

Dies ist absichtlich nicht so gemacht worden, weil es instruktiv ist, zu sehen, daß finite projektive Geometrien existieren, die nicht in sich dual sind, trotzdem die Definition selbst formal in sich dual ist. Aus der gegebenen Definition folgt eben nur, daß es zu jeder solchen Geometrie eine duale gibt, oder, daß die Gesamtheit aller dieser Geometrien in sich dual ist.

schöpfen;³ nimmt man z. B. in Abbildung 2 nur zwei Punkte, 2 und 3, auf (1), so hat man eine homogene Geometrie (Abb. 3). Eine homogene finite projektive Geometrie wird kurz ein Veblen-System genannt.⁴

Für ebene Veblen-Systeme gilt darüber hinaus der Satz:

Ist $n+1$ die Anzahl der Geraden, die mit einem beliebigen Punkt inzidieren, so ist auch jede Gerade mit $n+1$ Punkten inzident, und es gibt ebensoviel Punkte wie Geraden, nämlich

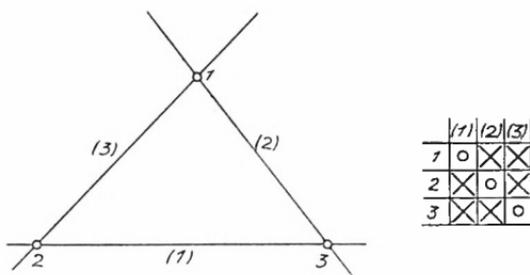


Abb. 3

n^2+n+1 .⁵ Für ein ebenes Veblen-System mit n^2+n+1 Punkten soll im folgenden die abkürzende Bezeichnung $S_2(n)$ verwendet werden.⁶ Der Index gibt dabei die „Dimension“ an.

2. Koordinaten. Veblen und Bussey behaupten, daß alle Veblen-Systeme $S_2(n)$ in sich dual sind,⁷ und zwar erklären sie die Gültigkeit des Dualitätsprinzips in diesen Geometrien als

³ Vgl. etwa Walter Heuser, „Über die Möglichkeit finiter Geometrien und die Geltung der projektiven Lagebeziehungen in ihnen“, Dissertation Heidelberg 1934, S. 7.

⁴ Zur Definition des Veblen-Systems vgl. auch Oswald Veblen and W. H. Bussey, „Finite Projective Geometry“, Transactions of Am. Math. Soc., vol. 7, 1906, p. 241/242; Gino Fano, „Osservazioni su alcune ‚geometrie finite‘ Nota I“, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, 1937, p. 55/56; Max Steck, „Ein Minimalmodell einer endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie und die Unabhängigkeit der beiden schwachen Stetigkeitsaxiome von den Inzidenzaxiomen“ (Habilitationsschrift), Math. Zeitschr. 1939, S. 609, Anm. 1; Heuser (Anm. 3).

⁵ Steck und Heuser nehmen für die Zahl der mit einem Punkt inzidenten Geraden n ; die Gesamtzahl der Elemente ist daher bei ihnen $n^2 - n + 1$.

⁶ Steck verwendet dafür $S(n^2 - n + 1/2/n)$, Heuser $S(n, 2, n^2 - n + 1)$.

⁷ Veblen-Bussey (Anm. 4) p. 241 ff.

Folge der die Geometrien definierenden Axiome,⁸ ohne jedoch einen Beweis hierfür zu geben.

Sicher sind alle jene Veblen-Systeme in sich dual, für die eine Koordinatendarstellung nach Veblen-Bussey möglich ist. Bei dieser analytischen Darstellung werden den Punkten als homogene Koordinaten Tripel aus nicht sämtlich verschwindenden Größen eines endlichen Körpers (Galois-Feld der Ordnung n) zugeordnet.⁹ Da die Ordnung eines Galois-Feldes eine Primzahlpotenz sein muß, lassen sich nur solche Veblen-Systeme analytisch erfassen, für die $n = p^m$ (p beliebige Primzahl und m beliebige natürliche Zahl) ist. Das Galois-Feld $\text{GF}[p^m]$ läßt, da $(0, 0, 0)$ ausgeschlossen ist, die Bildung von genau $n^2 + n + 1$ voneinander (mod. p) verschiedenen Wertetripeln zu, von denen keine zwei sich bloß durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Jede Inzidenztafel, in der die Reihenfolge der Koordinatentripel der Punkte mit der Reihenfolge der Koordinatentripel der Geraden übereinstimmt, ist wegen der Dualität von Punkt- und Linienkoordinaten ganz von selbst schon symmetrisch.¹⁰ Abbildung 5 zeigt eine symmetrische Inzidenztafel von $S_2(7)$. Das Galois-Feld, dem die Koordinatenwerte entnommen werden müssen, besteht aus den Größen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Die Reihenfolge der daraus gebildeten 57 mod. 7 voneinander verschiedenen Koordinatentripel ist dabei die folgende:

001;	120,	123,	126,	122,	125,	121,	124;
	130,	132,	134,	136,	131,	133,	135;
	140,	144,	141,	145,	142,	146,	143;
	010,	012,	014	016	011,	013,	015;
	100,	103,	106,	102,	105,	101,	104;
	110,	115,	113,	111,	116,	114,	112;
	160,	161,	162,	163,	164,	165,	166;
	150,	156,	155,	154,	153,	152,	151.

Nachdem Fano¹¹ unabhängig von jeder Koordinatendarstellung gezeigt hat, daß für jedes Veblen-System $S_2(n)$ die Be-

⁸ Ebenda, p. 242.

⁹ Ebenda, p. 244/247.

¹⁰ Die Inzidenzbeziehung in Koordinaten ist die aus der gewöhnlichen projektiven Geometrie bekannte.

¹¹ Fano (Anm. 4) p. 57/58.

ziehung $n = p^m$ gelten muß, könnte es scheinen, daß jedes überhaupt existierende Veblen-System auch nach Veblen-Bussey analytisch dargestellt werden könnte. Da aber das Bestehen des Desarguesschen Satzes Voraussetzung für die Einführbarkeit von Koordinaten¹² und die Gültigkeit des Pappus-Pascalschen Satzes wegen der Kommutativität der Multiplikation in einem endlichen Körper Voraussetzung für die Verwendbarkeit der Größen eines endlichen Körpers als Koordinaten¹³ ist, werden bei der angegebenen analytischen Darstellung nur solche Veblen-Systeme erfaßt, in denen diese beiden Sätze Gültigkeit besitzen.¹⁴ Die synthetische Definition, die die nichtdesarguesschen und nicht-pappus-pascalschen finiten Geometrien mit umfaßt, läßt nicht ohne weiteres erkennen, ob diese Veblen-Systeme ebenfalls in sich dual sind.

Die systematische Aufstellung von Inzidenztafeln für Veblen-Systeme auf Grund der synthetischen Definition geht auf Fano (1892) zurück, der für $n = p$ (Primzahl) die Verteilung der $n^2 + n + 1$ Punkte auf die $n^2 + n + 1$ Geraden des Systems explizit angibt.¹⁵ Im wesentlichen dieselbe Verteilung bringt Heuser (1934).¹⁶ Seine allgemeine Methode zum Aufstellen von Inzidenztafeln für beliebiges n erprobt er¹⁷ an dem bereits früher von Veblen¹⁸ ohne Hinweis auf die Art der Gewinnung angegebenen Systems $S_2(4)$; er weist mit ihr ferner erneut die Nichtexistenz von $S_2(6)$ nach. Eine Methode zur Herstellung der Inzidenz-

¹² Karl Theodor Vahlen, *Abstrakte Geometrie*, Leipzig 1905, S. 128, Satz 136.

¹³ Ebenda, S. 107, Satz 110, und Veblen-Bussey (Anm. 4), p. 247.

¹⁴ Vgl. auch J. H. Maclagan-Wedderburn, *Non-desarguesian and non-pascalian Geometries*, T. A. M. S., vol. 8, 1907, p. 379. Hier werden hyperkomplexe Zahlen verwendet, die keinen Körper bilden. — In jeder projektiven Geometrie folgt bekanntlich aus dem Pascalschen Satz der Desarguessche, in einer finiten projektiven Geometrie aber auch aus dem Desarguesschen Satz der Pascalsche; dies beruht darauf, daß es keine endlichen nicht-kommutativen Körper gibt.

¹⁵ Gino Fano, „Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva“, *Giornale di Matematiche*, vol. 30, 1892, p. 121/122.

¹⁶ Heuser (Anm. 3), S. 8–10.

¹⁷ Ebenda, S. 14 ff.

¹⁸ Oswald Veblen, „A System of Axioms for Geometry“, T. A. M. S., vol. 5, 1904, p. 350.

tafeln für $n = p^m$ ist schließlich wiederum von Fano (1937) angegeben worden.¹⁹ Alle nach einer dieser Methoden aufgestellten Inzidenztafeln sind aber zunächst nicht symmetrisch.

3. Symmetrisierung von Inzidenztafeln. Es liegt daher nahe, die Klärung der Frage nach der Gültigkeit des Dualitätsprinzips in nicht-desarguesschen und nicht-pappus-pascalschen Geometrien mit einer rein geometrischen Überlegung zu versuchen, und zwar führt die Bedeutung der Symmetrie der Inzidenztafel dazu, eine beliebige, umkehrbar eindeutige, reziproke Zuordnung der Punkte und Geraden des Systems zu betrachten, die nach dem Verfahren der Polarität der projektiven Geometrie hergestellt ist, wobei dem Punkte v die Gerade (v') entspreche; verlegt man dann die v' -te Spalte an die Stelle der v -ten, vertauscht demgemäß die Bezeichnung (v') mit (v) , so wird allgemein die Gerade (v) inzident mit den Punkten v_1, v_2, \dots, v_{n+1} sein, wenn $(v_1), (v_2), \dots, (v_{n+1})$ die mit dem Punkt v inzidenten Geraden sind. Gelingt es also, eine derartige Polarität in einem durch seine Inzidenztafel gegebenen Veblen-System $S_2(n)$ zu finden, so liefert dies ein einfaches Mittel zur Symmetrisierung der Tafel, oder was dasselbe ist, zur Entscheidung der Frage, ob das betrachtete System in sich dual ist oder nicht.

Von einem Polarsystem im gewöhnlichen Sinn darf bekanntlich ein Polardreieck und ein weiteres Elementenpaar willkürlich vorgeschrieben werden, mit der Einschränkung jedoch, daß der vierte Punkt auf keiner der Dreiecksseiten liegt und infolgedessen die ihm zugeordnete Gerade nicht durch eine Dreiecksecke geht. Entsprechend ordnen wir versuchsweise jedem von irgend drei nicht kollinearen Punkten des Veblen-Systems diejenige der drei durch sie bestimmten Geraden zu, die mit ihm nicht inzident ist, so daß beispielsweise dem Punkt a_1 die Verbindungsgerade der Punkte a_2 und a_3 , d. h. die mit den beiden Punkten a_2 und a_3 inzidente Gerade (a'_1) entspricht. Dem vierten Punkt a_4 , der $(a'_1), (a'_2)$ und (a'_3) nicht angehören darf, wird eine Gerade (a'_4) zugeordnet, der wiederum keiner der Punkte a_1, a_2 und a_3 an-

¹⁹ Gino Fano, „Osservazioni su alcune „geometrie finite“ Nota II“, Rend. della R. Acc. d. L., vol. XXVI, 1937, p. 129-134. Er behandelt dabei als einfachste Fälle $n = 2^m$ und $n = 9$.

gehört. Die gegenseitige Zuordnung der übrigen Punkte und Geraden ergibt sich, so wird man wenigstens erwarten, schrittweise zwangsläufig aus der Bedingung, daß zwei inzidenten Elementen stets wieder zwei inzidente entsprechen. Sei a_5 etwa inzident mit den Geraden (a'_1) und (a'_4) , so ist die ihm zuzuordnende Gerade (a'_5) diejenige, die mit den (a'_1) und (a'_4) entsprechenden Punkten a_1 und a_4 inzident ist.

Um zu zeigen, wie sich die Durchführung der Polarisierung der Inzidenztafel im einzelnen gestaltet, soll sie für das schon betrachtete Beispiel $S_2(7)^{20}$ unter Zugrundelegung der in Abb. 4 gegebenen Inzidenztafel²¹ vorgenommen werden.

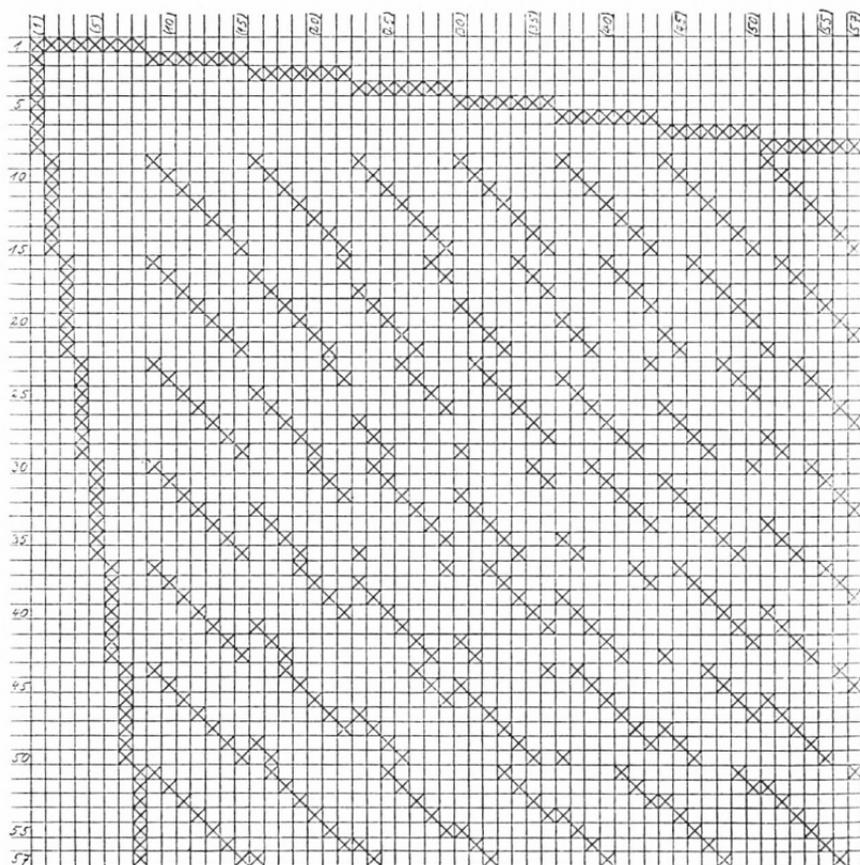


Abb. 4

²⁰ S. 29.

²¹ Aus Heuser (Anm. 3), S. 11/12.

Beispiel.

Das Polardreieck werde gebildet durch die Punkte $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 9$. Die zuzuordnenden Geraden sind dann für den Punkt 1 die Verbindungsgerade der Punkte 2 und 9, die Gerade (9); für 2 die Gerade $1 \times 9 = (2)$ und für 9 die Gerade $1 \times 2 = (1)$. Punkt a_4 sei 17 und Gerade (a'_4) die Gerade (17).

Dann entspricht dem Punkt $51 = (9) \times (17)$ (Schnittpunkt der Geraden (9) und (17)) die Gerade (3) = 1×17 (Verbindungsgerade der den Geraden (9) und (17) entsprechenden Punkte 1 und 17); dem Punkt $3 = (1) \times (17)$ die Gerade (16) = 9×17 ; in gleicher Weise folgt der Reihe nach:

10 = (2) × (17)	2 × 17 = (10)	31 = (5) × (10)	23 × 10 = (31)
16 = (9) × (3)	1 × 51 = (8)	32 = (5) × (11)	23 × 13 = (48)
57 = (8) × (16)	3 × 16 = (22)	33 = (5) × (12)	23 × 14 = (21)
56 = (8) × (22)	16 × 57 = (40)	35 = (5) × (14)	23 × 12 = (26)
42 = (17) × (40)	17 × 56 = (47)	36 = (5) × (15)	23 × 15 = (43)
44 = (9) × (47)	1 × 42 = (6)	24 = (4) × (10)	30 × 10 = (24)
39 = (6) × (47)	42 × 44 = (27)	25 = (4) × (11)	30 × 13 = (20)
13 = (2) × (27)	2 × 39 = (11)	26 = (4) × (12)	30 × 14 = (35)
11 = (2) × (11)	2 × 13 = (13)	27 = (4) × (13)	30 × 11 = (39)
34 = (13) × (17)	11 × 17 = (53)	28 = (4) × (14)	30 × 12 = (54)
4 = (1) × (27)	9 × 39 = (37)	29 = (4) × (15)	30 × 15 = (50)
6 = (1) × (37)	9 × 4 = (23)	37 = (6) × (9)	44 × 1 = (7)
7 = (1) × (47)	9 × 42 = (30)	38 = (6) × (10)	44 × 10 = (38)
8 = (1) × (53)	9 × 34 = (51)	40 = (6) × (12)	44 × 14 = (56)
12 = (2) × (40)	2 × 56 = (14)	41 = (6) × (13)	44 × 11 = (18)
14 = (2) × (14)	2 × 12 = (12)	43 = (6) × (15)	44 × 15 = (36)
15 = (2) × (22)	2 × 57 = (15)	45 = (7) × (10)	37 × 10 = (45)
18 = (3) × (11)	51 × 13 = (41)	46 = (7) × (11)	37 × 13 = (55)
19 = (3) × (12)	51 × 14 = (49)	47 = (7) × (12)	37 × 14 = (42)
20 = (3) × (13)	51 × 11 = (25)	48 = (7) × (13)	37 × 11 = (32)
21 = (3) × (14)	51 × 12 = (33)	49 = (7) × (14)	37 × 12 = (19)
22 = (3) × (15)	51 × 15 = (57)	50 = (7) × (15)	37 × 15 = (29)
5 = (1) × (33)	9 × 21 = (44)	52 = (8) × (10)	16 × 10 = (52)
23 = (9) × (53)	1 × 34 = (5)	53 = (8) × (11)	16 × 13 = (34)
30 = (5) × (9)	23 × 1 = (4)	54 = (8) × (12)	16 × 14 = (28)
	55 = (8) × (13)	16 × 11 = (46).	

Da den Punkten $1\ 2\ 3\ \dots\ 57$ also die Geraden (9) (2) (16) (37) (44) (23) (30) (51) (1) (10) (13) (14) (11) (12) (15) (8) (17) (41) (49) (25) (33) (57) (5) (24) (20) (35) (39) (54) (50) (4) (31) (48) (21) (53) (26) (43) (7) (38) (27) (56) (18) (47) (36) (6) (45) (55) (42) (32) (19) (29) (3) (52) (34) (28) (46) (40) (22) entsprechen, steht in der symmetrischen Inzidenztafel die bisherige Gerade (9) an erster, die bisherige Gerade (2) an zweiter, die bisherige Gerade (16) an dritter Stelle \dots (Abb. 5).

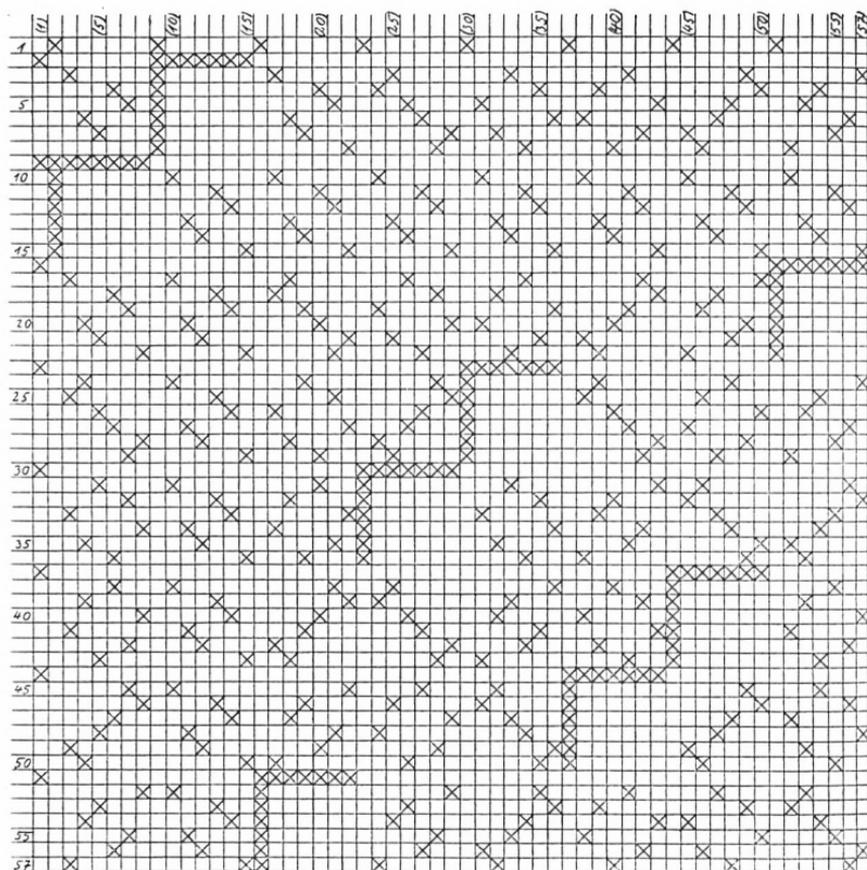


Abb.

4. Die Streifendarstellung von $S_2(n)$. Für geometrische Untersuchungen günstiger als die allgemeine symmetrische Tafel, deren Aufstellung im vorigen behandelt wurde, ist die spezielle (zur Nebendiagonale symmetrische) Form der Streifendar-

stellung, bei der die Inzidenzzeichen die Tafel in Geraden parallel zur Hauptdiagonale durchziehen und die Tafel dadurch in Streifen aufteilen.²² Die Angabe der Inzidenzzeichen einer einzigen Spalte legt damit bereits die ganze Inzidenztafel fest. Bezeichnet man die Differenz der Zeilennummern, in denen in irgendeiner Spalte der Inzidenztafel Inzidenzzeichen eingetragen sind, als Breite D_v der Streifen, so ist die Inzidenztafel auch durch die Angabe des Zyklus $(D_1 D_2 \dots D_{n+1})$, der die Aufeinanderfolge der einzelnen Streifenbreiten angibt, gekennzeichnet. Für die Aufstellung der Inzidenztafel ist es offenbar gleichgültig, welche Zahl D_v dabei als erste herausgegriffen wird, da die Reihenfolge der übrigen durch den Zyklus festgelegt ist. Wegen seiner die Inzidenztafel charakterisierenden Bedeutung soll $(D_1 D_2 \dots D_{n+1})$ im folgenden als ein charakteristischer Zyklus von $S_2(n)$ bezeichnet werden. Als Symbol der Inzidenztafel soll er im folgenden zur Bezeichnung des Systems $S_2(n)$ in der Form treten:

$$\underline{S_2(n) \equiv (D_1 D_2 \dots D_{n+1})}.$$

Für Systeme, für die die schon mehrfach betrachtete Koordinatendarstellung möglich ist, läßt sich die Streifendarstellung, wie Ott²³ und Singer²⁴ gezeigt haben, unmittelbar gewinnen. Hier soll ein anderer Weg zur Aufstellung der Streifendarstellung eines Veblen-Systems gebracht werden, der wegen der Unabhängigkeit von jeder Koordinatendarstellung auch bei solchen Systemen besprochen werden kann, in denen die Sätze von Pascal und Desargues nicht gelten.²⁵ Zu diesem Zwecke be-

²² Inzidenztafeln in Streifendarstellung sind für $n = 2$ und $n = 4$ erstmalig von Veblen (Anm. 18) p. 350, für $n = 3$ von Veblen-Bussey (Anm. 4), p. 243, angegeben worden.

²³ E. Ott, „Finite Projective Geometries PG (k, p) “, The Amer. Math. Monthly, vol. XLIV, 1937, p. 86–92.

²⁴ James Singer, „A Theorem in finite Projective Geometry and some Application to Number Theory“, T. A. M. S., vol 43, 1938, p. 377–385.

²⁵ Er würde sich auch aus einer Deutung des geometrischen Gehalts der Ott-Singerschen Arbeiten herleiten lassen. Diese waren jedoch dem Verfasser bei der Auffindung noch nicht bekannt; erst nachträglich hat ihn Herr Bachmann freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht. — Ob es für jede derartige Geometrie Streifendarstellungen gibt, weiß man noch nicht.

trachten wir das durch irgendeine Inzidenztafel festgelegte Gebilde von Punkten und Geraden; jedem Punkt und jeder Geraden kommt auf Grund der Inzidenztafel eine ganz bestimmte Ziffer (bzw. ein Koordinatentripel) zu. Vertauscht man diese Bezifferung, so wird die Inzidenztafel, die dasselbe geometrische Gebilde wie früher wiedergibt, nunmehr eine im allgemeinen andere Form haben, die im Gegensatz zur Ausgangsinzidenztafel J_1 mit J_2 bezeichnet sei. S_{12} sei eine Substitution, die, auf die Zeilen angewendet, J_1 in J_2 überführt. Ist J_1 symmetrisch, so ist es gleichgültig, ob S_{12} auf die Zeilen oder auf die Spalten angewendet wird. Ist J_1 unsymmetrisch, so hat die Substitution, die auf die Spalten anzuwenden wäre, um dasselbe J_2 zu erhalten, eine andere Form wie diejenige, die auf die Zeilen anzuwenden ist. Betrachtet man nun irgendeine Kollineation in $S_2(n)$ und bezeichnet mit K_1 diejenige Substitution, die die Kollineation bei Zugrundelegung der Inzidenztafel J_1 darstellt, so erhält man daraus offenbar den Ausdruck K_2 derselben Kollineation für die Darstellung J_2 durch Anwendung von S_{12} auf K_1 , d. h. $K_2 = S_{12}^{-1} K_1 S_{12}$.

Bei der Streifendarstellung ist unter den Kollineationen stets die zyklische Substitution $K_2 = (1\ 2\ 3\ \dots\ n^2+n+1)$ enthalten. Diese Substitution stellt, was in der Literatur erstmalig von Steck²⁶ hervorgehoben wurde, geometrisch gesehen eine fixpunktfreie Kollineation dar.²⁷ Zur Bestimmung einer Substitution S_{12} genügt es daher, für die Darstellung J_1 von $S_2(n)$ eine fixpunktfreie Kollineation K_1 ausfindig zu machen, die durch einen (n^2+n+1) -gliedrigen Zyklus ausgedrückt werden kann. Die Bestimmung einer solchen Kollineation kann gegebenenfalls analytisch erfolgen.²⁸ Daneben ist aber auch noch

²⁶ Max Steck, „Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien I“, Journal für r. u. a. Math., Bd. 179, 1938, S. 42.

²⁷ Obwohl Veblen die Streifendarstellungen in einzelnen Systemen verwendet (vgl. Anm. 22), scheint ihm diese Tatsache entgangen zu sein. Vgl. O. Veblen and J. W. Young, Projective Geometry, Boston u. a., 1910, p. 108, exercise 2; unter den dort angegebenen Kollineationstypen fehlt der fixpunktfreie, daher sind seine Abzählungen zum Teil falsch.

²⁸ In diesem Falle deckt sich die Methode im wesentlichen mit der von Ott angegebenen.

der im allgemeinen etwas mühsamere, aber manchmal einzige, Weg zur Auffindung fixpunktfreier Kollineationen mit Hilfe des endlichen Möbiusschen Netzes²⁹ möglich.

Beispiel.

Die praktische Durchführung dieser Methode sei wieder an dem Beispiel S_2 (7) gezeigt, und zwar soll dabei von der unsymmetrischen Tafel (Abb. 4) ausgegangen werden.

Wie man nachträglich bestätigt findet, liefert die folgende Zuordnung eine fixpunktfreie Kollineation der Ordnung $n^2+n+1 = 57$: Dem Ausgangsviereck, gebildet aus den Punkten $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 9$ und $a_4 = 17$, wird als Bildviereck das aus den Punkten $a'_1 = 26$, $a'_2 = 27$, $a'_3 = 32$ und $a'_4 = 40$ gebildete zugeordnet. Diese so festgelegte Kollineation (K_1) ist dann dargestellt durch den 57gliedrigen Zyklus:

$$K_1 = (1 \ 26 \ 51 \ 7 \ 28 \ 18 \ 19 \ 33 \ 15 \ 20 \ 12 \ 8 \ 25 \ 3 \ 24 \ 50 \ 41 \ 16 \ 54 \\ 21 \ 47 \ 45 \ 30 \ 37 \ 49 \ 56 \ 9 \ 32 \ 35 \ 4 \ 29 \ 34 \ 46 \ 11 \ 44 \ 22 \ 2 \ 27 \ 42 \\ 36 \ 55 \ 31 \ 17 \ 40 \ 39 \ 52 \ 53 \ 43 \ 13 \ 57 \ 48 \ 6 \ 23 \ 10 \ 14 \ 38 \ 5).$$

Daraus bestimmt sich S_{12} zu

$$S_{12} = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1} & 26 & 51 & \mathbf{7} & 28 & 18 & 19 & 33 & 15 & 20 & 12 & \mathbf{8} & 25 & \mathbf{3} & 24 & 50 & 41 & 16 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \\ 54 & 21 & 47 & 45 & 30 & 37 & 49 & 56 & 9 & 32 & 35 & \mathbf{4} & 29 & 34 & 46 & 11 & 44 & 22 & \mathbf{2} \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 \\ 27 & 42 & 36 & 55 & 31 & 17 & 40 & 39 & 52 & 53 & 43 & 13 & 57 & 48 & \mathbf{6} & 23 & 10 & 14 & 38 & \mathbf{5} \\ 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 \end{array} \right).$$

In dieser Substitution sind die Punkte der ersten Geraden der Inzidenztafel Abb. 4 durch Fettdruck hervorgehoben. Aus den ihnen entsprechenden Punkten 1, 4, 12, 14, 30, 37, 52 und 57 folgt dann $D_1 = 3$, $D_2 = 8$, $D_3 = 2$, $D_4 = 16$, $D_5 = 7$, $D_6 = 15$, $D_7 = 5$ und $D_8 = 1$.

²⁹ M. Steck (Anm. 26) S. 40. In der dort gegebenen Definition und auch im weiteren Zusammenhang mit ihr wird die (Herrn Steck damals schon bekannte) Möglichkeit einer Mehrdeutigkeit der Konstruktion (vgl. im folgenden S. 46 f.) nicht erwähnt.

Abbildung 6 gibt die Streifenendarstellung von $S_2(7)$:

$$S_2(7) \equiv (1 \ 3 \ 8 \ 2 \ 16 \ 7 \ 15 \ 5).$$

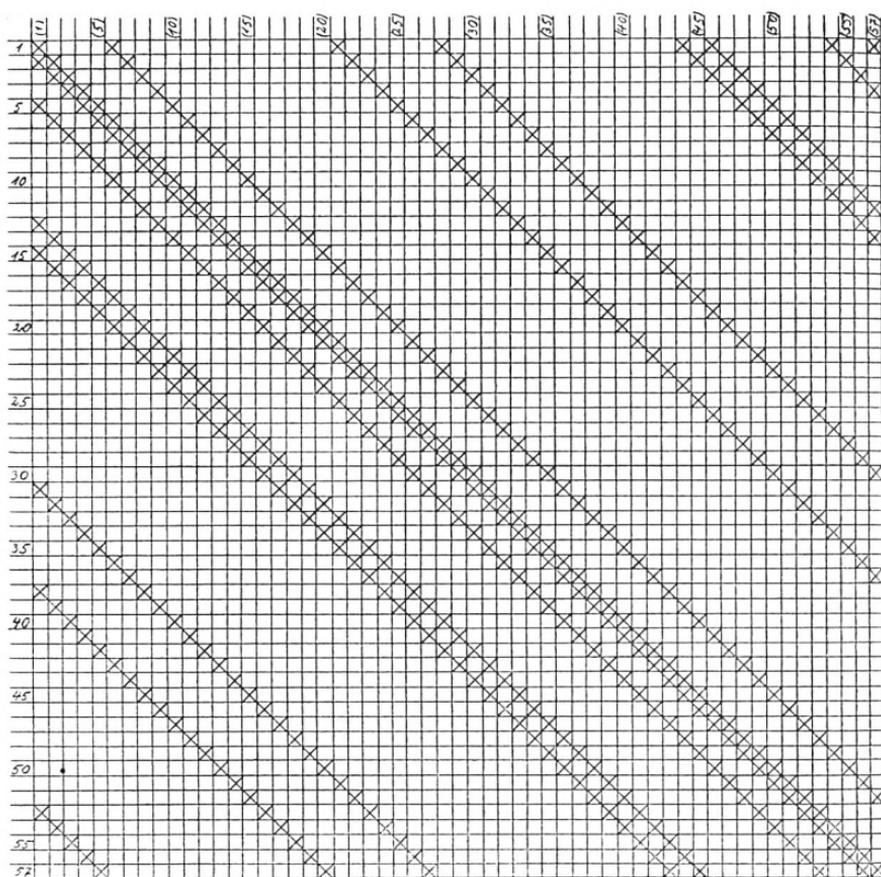


Abb. 6

Äquivalente Streifenendarstellungen ergeben sich, wenn man an die Stelle von K_1 die Substitution K_1^λ treten läßt ($\lambda = 2 \dots n^2 + n$, λ und $n^2 + n + 1$ relativ prim).³⁰

In unserem Beispiel $S_2(7)$ gibt es insgesamt 6 untereinander äquivalente Streifenendarstellungen. Es sind dies außer der oben gegebenen noch die folgenden 5 Darstellungen:

³⁰ Diese Bedingung sorgt dafür, daß K^λ ein $(n^2 + n + 1)$ -gliedriger Zyklus ist.

$$\begin{aligned}
S_2(7) &\equiv (1\ 2\ 10\ 19\ 4\ 7\ 9\ 5) \equiv (1\ 3\ 5\ 11\ 2\ 12\ 17\ 6) \\
&\equiv (1\ 4\ 2\ 10\ 18\ 3\ 11\ 8) \equiv (1\ 4\ 22\ 7\ 3\ 6\ 2\ 12) \\
&\equiv (1\ 6\ 12\ 4\ 21\ 3\ 2\ 8).^{31}
\end{aligned}$$

Eine weitere Methode.

Unter einer Teilzyklussumme sei die Summe von irgend λ ($1 \leq \lambda \leq n$) aufeinanderfolgenden Zahlen des charakteristischen Zyklus ($D_1 D_2 \dots D_{n+1}$) verstanden. Es gilt der Satz:³²

Unter den Teilzyklussummen eines charakteristischen Zyklus kommt jede der Zahlen $1, 2, \dots, n^2+n$ genau einmal vor, und die Summe aller D_ν ist n^2+n+1 .

Aus diesem Satz läßt sich ebenfalls ein Verfahren zur Herleitung der Streifendarstellung gewinnen. Greift man n auf einanderfolgende Zahlen des charakteristischen Zyklus heraus, so sind dadurch $\frac{n(n+1)}{2}$ Teilzyklussummen festgelegt. Für diese

wollen wir die Bezeichnung $D_\nu = d_{\nu+1, \nu}$ und $D_\nu + D_{\nu+1} + \dots + D_{\nu+\mu} = d_{\nu+\mu+1, \nu}$ wählen. Dann geht der Satz über die Teilzyklussummen über in den folgenden:

Jedes System von $\frac{n(n+1)}{2}$ positiven ganzen Zahlen $d_{\lambda\mu} < n^2 + n + 1$ ($n+1 \geq \lambda > \mu > \nu \geq 1$), die durch die Beziehung

$$(I) \quad d_{\lambda\mu} + d_{\mu\nu} = d_{\lambda\nu}$$

miteinander verknüpft sind, sowie den Bedingungen

$$(II) \quad d_{\lambda\mu} \neq d_{\rho\sigma}, \text{ wobei } \lambda > \mu, \rho > \sigma, \lambda \neq \rho \text{ und}$$

$$(III) \quad d_{\lambda\mu} + d_{\rho\sigma} \neq n^2 + n + 1, \text{ wobei } \lambda > \mu, \rho > \sigma, \lambda \neq \rho \text{ ist,}$$

³¹ Entsprechend gilt

$$\begin{aligned}
S_2(2) &\equiv (1\ 2\ 4) \text{ (einzige Darstellung);} \\
S_2(3) &\equiv (1\ 3\ 2\ 7) \equiv (1\ 2\ 6\ 4) \text{ (2 äquivalente Darstellungen);} \\
S_2(4) &\equiv (1\ 3\ 10\ 2\ 5) \text{ (einzige Darstellung);} \\
S_2(5) &\equiv (1\ 2\ 5\ 4\ 6\ 13) \equiv (1\ 2\ 7\ 4\ 12\ 5) \equiv (1\ 3\ 2\ 7\ 8\ 10) \\
&\equiv (1\ 3\ 6\ 2\ 5\ 14) \equiv (1\ 7\ 3\ 2\ 4\ 14) \text{ (5 äquivalente Darstellungen);} \\
S_2(8) &\equiv (1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 5\ 18\ 9\ 10) \equiv (1\ 4\ 7\ 6\ 3\ 28\ 2\ 8\ 14) \\
&\equiv (1\ 6\ 4\ 24\ 13\ 3\ 2\ 12\ 8) \equiv (1\ 11\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 22\ 16);
\end{aligned}$$

ob damit alle äquivalenten Darstellungen von $S_2(8)$ erschöpft sind, müßte erst untersucht werden.

³² Dieser Satz findet sich in anderem Gewande auch in den Arbeiten von Ott und Singer (Anm. 23/24).

genügen, liefert vermöge $D_\nu = d_{\nu+1, \nu}$ einen charakteristischen Zyklus $(D_1 D_2 \dots D_{n+1})$ einer Streifenendarstellung von $S_2(n)$.

Die Beziehung (I) entspricht dabei der Definition der Teilzyklussummen; Bedingung (II) und (III) der Forderung, daß alle Teilzyklussummen voneinander verschieden sind.

Für kleine Werte von n ist ein auf die $d_{\lambda, \mu}$ gegründetes Verfahren durchaus zur Aufstellung der Streifenendarstellung geeignet; für größere kann es als (leicht übersehbare) Kontrollmethode der auf andere Weise gewonnenen Streifenendarstellung dienen.

Kontrolle des Beispiels.

Die Kontrolle von $S_2(7)$ zeigt das nachstehende Schema.

		————— λ —————						
		2	3	4	5	6	7	8
	7	—	—	—	—	—	—	15
	6	—	—	—	—	—	7	22
	5	—	—	—	—	16	23	38
	4	—	—	—	2	18	25	40
	3	—	—	8	10	26	33	48
	2	—	3	11	13	29	36	51
	1	1	4	12	14	30	37	52

Ergebnis: Die $d_{\lambda, \mu}$ genügen den Forderungen (I), (II) und (III).

II. Räumliche Geometrien.

Die für die ebenen Veblen-Systeme gewonnenen Ergebnisse lassen sich unschwer auch auf räumliche Systeme übertragen. Zu den Punkten und Geraden treten in diesem Falle als weitere Elemente noch die Ebenen hinzu, und zwar bestimmen drei nicht derselben Geraden angehörende Punkte genau eine Ebene und drei nicht durch dieselbe Gerade gehende Ebenen genau einen Punkt. Insofern tritt sogar eine Vereinfachung ein, als im Raume die Sätze von Desargues und Pascal stets erfüllt sind,³³ also für alle Veblen-Systeme die früher betrachtete Koordinatendarstellung möglich ist, wobei zu den drei homogenen Koordinaten (in der Ebene) noch eine vierte hinzukommt. Damit sind auch alle

³³ Veblen-Bussey (Anm. 4) p. 246 f.; vgl. das in Anm. 14 Gesagte.

Veblen-Systeme des Raumes in sich dual und durch eine symmetrische Inzidenztafel, die die Inzidenzen von Punkten und Ebenen angibt, darstellbar. Als Beispiel soll die Inzidenztafel einer speziellen Geometrie aufgestellt werden, die in anderem Zusammenhang schon früher von Herrn Baldus angegeben worden ist.³⁴

Unmittelbare Aufstellung der symmetrischen Inzidenztafel.

Es handelt sich dabei um das System $S_3(4)$, also eine dreidimensionale finite Geometrie mit 85 Punkten und ebensoviel Ebenen.³⁵ Die homogenen Koordinaten müssen aus Größen des Galois-Feldes $GF[2^2]$ bestehen. Dieses Galois-Feld enthält die drei modulo 2 voneinander verschiedenen Werte 0, 1 und ϵ ; ferner gilt in ihm die Beziehung $\epsilon^2 = 1 + \epsilon$. Die Reihenfolge der Koordinatenquadrupel, die in den Zeilen als Punkt- und in den Spalten als Ebenenkoordinaten Verwendung finden sollen, ist für die Abbildung 7 folgendermaßen gewählt worden:

0001;	0010,	0011,	001 ϵ ,	001 ϵ^2 ;	0100,	0101,	010 ϵ ,	010 ϵ^2 ;
	0110,	0111,	011 ϵ ,	011 ϵ^2 ;	01 ϵ 0,	01 ϵ 1,	01 $\epsilon\epsilon$,	01 $\epsilon\epsilon^2$;
	01 ϵ^2 0,	01 ϵ^2 1,	01 $\epsilon^2\epsilon$,	01 $\epsilon^2\epsilon^2$;	1000,	1001,	100 ϵ ,	100 ϵ^2 ;
	1010,	1011,	101 ϵ ,	101 ϵ^2 ;	10 ϵ 0,	10 ϵ 1,	10 $\epsilon\epsilon$,	10 $\epsilon\epsilon^2$;
	10 ϵ^2 0,	10 ϵ^2 1,	10 $\epsilon^2\epsilon$,	10 $\epsilon^2\epsilon^2$;	1100,	1101,	110 ϵ ,	110 ϵ^2 ;
	1110,	1111,	111 ϵ ,	111 ϵ^2 ;	11 ϵ 0,	11 ϵ 1,	11 $\epsilon\epsilon$,	11 $\epsilon\epsilon^2$;
	11 ϵ^2 0,	11 ϵ^2 1,	11 $\epsilon^2\epsilon$,	11 $\epsilon^2\epsilon^2$;	1 ϵ 00,	1 ϵ 01,	1 ϵ 0 ϵ ,	1 ϵ 0 ϵ^2 ;
	1 ϵ 10,	1 ϵ 11,	1 ϵ 1 ϵ ,	1 ϵ 1 ϵ^2 ;	1 $\epsilon\epsilon$ 0,	1 $\epsilon\epsilon$ 1,	1 $\epsilon\epsilon\epsilon$,	1 $\epsilon\epsilon\epsilon^2$;
	1 $\epsilon\epsilon^2$ 0,	1 $\epsilon\epsilon^2$ 1,	1 $\epsilon\epsilon^2\epsilon$,	1 $\epsilon\epsilon^2\epsilon^2$;	1 ϵ^2 00,	1 ϵ^2 01,	1 ϵ^2 0 ϵ ,	1 ϵ^2 0 ϵ^2 ;
	1 ϵ^2 10,	1 ϵ^2 11,	1 ϵ^2 1 ϵ ,	1 ϵ^2 1 ϵ^2 ;	1 $\epsilon^2\epsilon$ 0,	1 $\epsilon^2\epsilon$ 1,	1 $\epsilon^2\epsilon\epsilon$,	1 $\epsilon^2\epsilon\epsilon^2$;
	1 $\epsilon^2\epsilon^2$ 0,	1 $\epsilon^2\epsilon^2$ 1,	1 $\epsilon^2\epsilon^2\epsilon$,	1 $\epsilon^2\epsilon^2\epsilon^2$.				

In Übereinstimmung mit der von Herrn Baldus angegebenen Inzidenztafel seien im folgenden den Zeilen die Ebenen und den

³⁴ Richard Baldus, Zur Axiomatik der Geometrie IV, Über die Tragweite des Axioms von Pasch, diese Berichte, 1934, S. 145-161.

³⁵ Die Gesamtzahl beträgt hier $\frac{n^4-1}{n-1}$; vgl. auch Fano (Anm. 15), p. 123, sowie Veblen-Bussey (Anm. 4), p. 241/242.

Spalten die Punkte zugeordnet,³⁶ was wegen der Symmetrie der Tafel in ihr keinerlei Veränderung bedingt. Wendet man nun auf die Spalten (Punkte) unter Beibehaltung der Reihenfolge der Zeilen (Ebenen) die Substitution

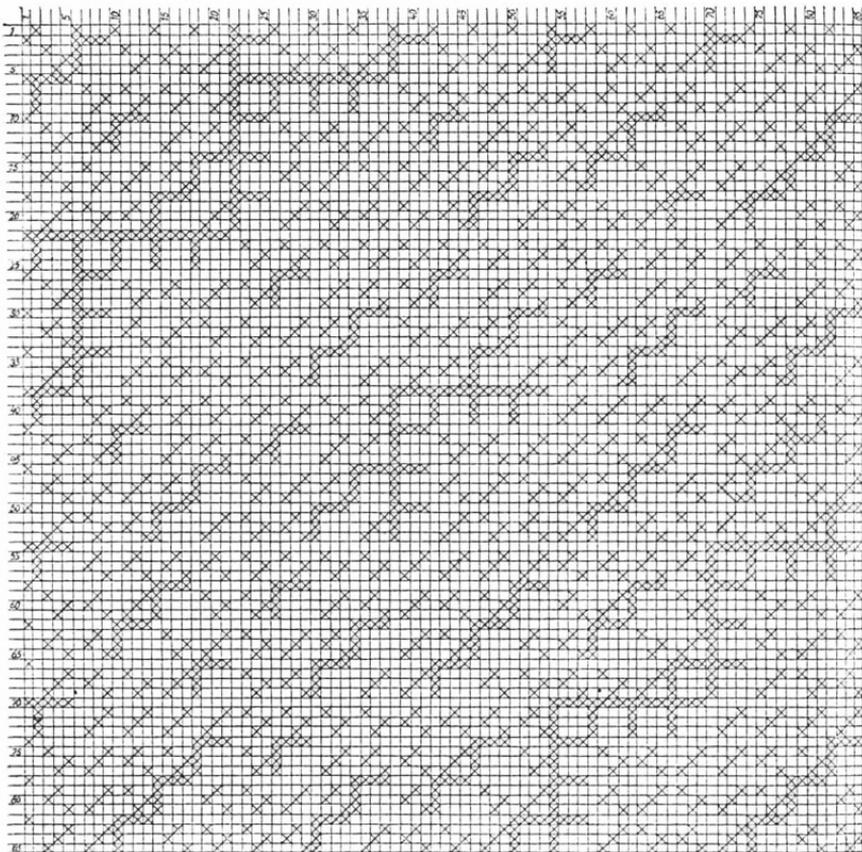


Abb. 7

$$\begin{aligned}
 S = & (1 \ 22) (2 \ 6) (3 \ 38) (4 \ 46 \ 21 \ 54 \ 5 \ 42 \ 13 \ 66 \ 20 \ 70) (7 \ 26) \\
 & (8 \ 34) (9 \ 30) (11 \ 50 \ 17 \ 78 \ 18) (12 \ 82 \ 14) (15 \ 62) (16 \ 58) \\
 & (19 \ 74) (24 \ 25) (27 \ 39) (28 \ 49 \ 80 \ 57 \ 36 \ 45 \ 68 \ 84 \ 69 \ 60 \ 77 \\
 & 64 \ 53 \ 56 \ 29 \ 44 \ 85 \ 52 \ 73) (31 \ 43 \ 51 \ 75 \ 59 \ 55) (32 \ 41) (33 \ 48 \\
 & 61 \ 72) (35 \ 47 \ 63 \ 79 \ 71) (37 \ 40) (76 \ 81)
 \end{aligned}$$

³⁶ Aus diesem Grunde sind in den Abb. 7 und 8 die Klammern bei den Ziffern weggelassen worden.

an, so entsteht daraus die durch Abbildung 8 wiedergegebene Inzidenztafel, die der von Herrn Baldus angegebenen nahekommt.³⁷

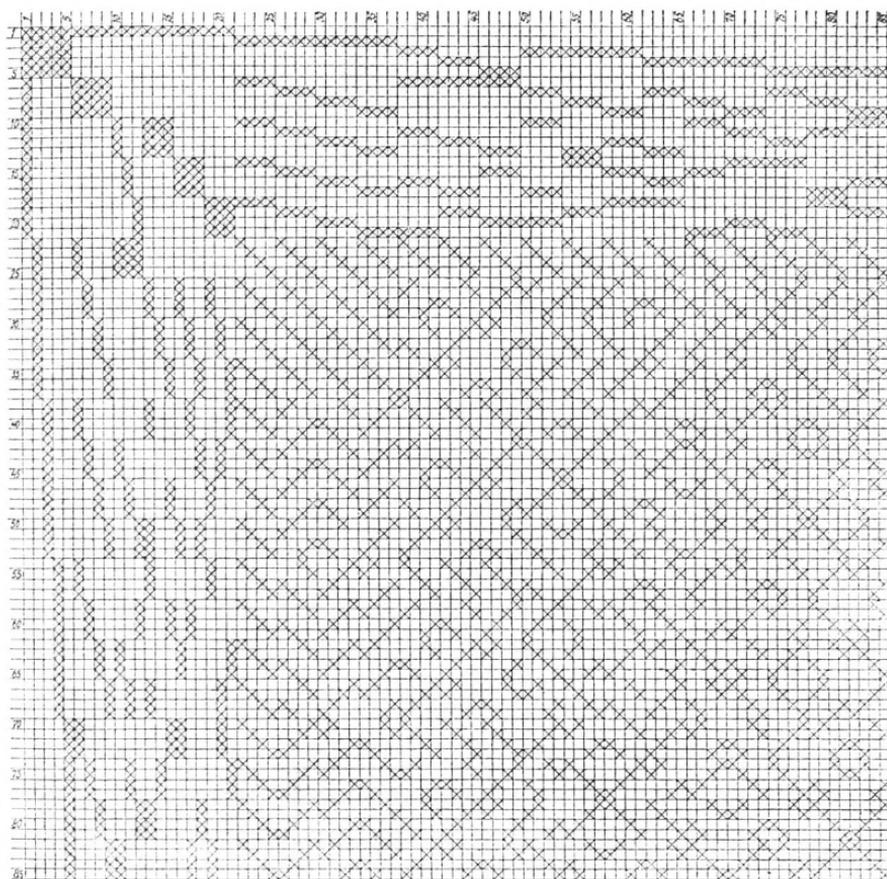


Abb. 8

Streifendarstellung.

a) Analytisches Verfahren.

Sodann sei die Streifendarstellung des Systems $S_3(4)$ aufgestellt, wie sie sich im Anschluß an die Arbeit von Ott gewinnen

³⁷ Eine vollständige Übereinstimmung kann nicht erreicht werden, weil die dort (S. 157) angegebene Tafel Unstimmigkeiten enthalten muß, da z. B. nach ihr entgegen der Definition durch die Punkte 7, 22 und 51 überhaupt keine Ebene geht.

läßt: Die zyklische Aufeinanderfolge R_1 der 85 Zeilen (als Vertreter der durch ihre Koordinatenquadrupel gegebenen Punkte) der Inzidenztafel ist festgelegt durch eine Kollineation.

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \rho x'_2 &= x_1 \\ \rho x'_3 &= x_2 \\ \rho x'_4 &= x_3 \end{aligned}$$

und die Aufeinanderfolge der 85 Spalten (Ebenen) durch die Kollineation

$$\tau \cdot u'_j = \sum_k A_{j,k} u_k,$$

wo die $A_{i,k}$ die Minoren der $a_{i,k}$ in der von den $a_{i,k}$ gebildeten Determinante sind. Die $a_{i,k}$ sind dabei derart im GF $[2^2]$ zu bestimmen, daß die charakteristische (Säkular-) Gleichung der Transformation (1)

$$\rho^4 - a_{11} \rho^3 - a_{12} \rho^2 - a_{13} \rho - a_{14} = 0$$

im Galois-Feld GF $[2^2]$ irreduzibel ist und erst im Galois-Feld GF $[2^6]$ Lösungen besitzt. Im System S_3 (4) genügen beispielsweise $a_{11} = 1$, $a_{12} = \varepsilon^2$, $a_{13} = 0$ und $a_{14} = \varepsilon$ diesen Bedingungen.

Die Transformationsformeln lauten dann

$$(1a) \quad \begin{aligned} \rho x'_1 &= x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_4 \\ \rho x'_2 &= x_1 \\ \rho x'_3 &= x_2 \\ \rho x'_4 &= x_3 \end{aligned}$$

und, da im Galois-Feld GF $[2^2]$ $+1 = -1$, $+\varepsilon = -\varepsilon$ usw. ist,

$$(1b) \quad \begin{aligned} \tau u'_1 &= u_4 \\ \tau u'_2 &= \varepsilon u_1 + u_4 \\ \tau u'_3 &= \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_4 \\ \tau u'_4 &= \varepsilon u_3. \end{aligned}$$

Die in Abbildung 9 wiedergegebene Inzidenztafel entsteht, wenn man der ersten Zeile den Punkt $(1\varepsilon^2 00)$ und der ersten Spalte die Ebene (0001) zuordnet, auf folgende Weise:

Man berechnet mit Hilfe der Transformationsformeln (1a) die Koordinaten des dem Punkt $(1\varepsilon^2 00)$ entsprechenden Punk-

tes ($1\epsilon 10$), dann durch nochmalige Anwendung derselben Formeln den diesem Punkt entsprechenden Punkt ($01\epsilon 1$) usw., bis alle 85 Punkte erfaßt sind. Diese so gewonnene Reihenfolge der Punkte ist der oben genannte Zyklus R_1 , d. h. die Punkte sind in dieser Reihenfolge den Zeilen der Inzidenztafel zuzuordnen. Da die erste Spalte der Ebene (0001), d. h. der Ebene $x_4 = 0$ entsprechen soll, sind in ihr in all den Zeilen Inzidenzzeichen anzubringen, denen Punkte entsprechen, deren 4. Koordinate den Wert 0 hat. Damit ist aber die ganze Inzidenztafel bestimmt und der charakteristische Zyklus der durch Abb. 9 gegebenen Streifendarstellung für $S_3(4)$ läßt sich folgendermaßen ablesen

$$S_3(4) \equiv (1\ 4\ 6\ 1\ 2\ 6\ 1\ 3\ 2\ 1\ 1\ 17\ 4\ 8\ 2\ 3\ 5\ 3\ 9\ 2\ 4).^{38}$$

Eine Kontrollmethode, entsprechend der auf Seite 40 für die ebenen Streifendarstellungen gegebenen, ist noch nicht bekannt, da man über das Gesetz der Zykelzahlen noch nichts weiß.

b) Nicht-analytisches Verfahren.

Zum Schluß soll noch kurz auf die Gewinnung der Streifendarstellung mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Netzes eingegangen werden, weil dabei Eigenschaften der finiten Geometrien aufgedeckt werden, die in der gewöhnlichen Geometrie kein Analogon haben.

Wir wählen zu diesem Zwecke die Zuordnung der fünf Punkte $a'_1 = 22$, $a'_2 = 1$, $a'_3 = 30$, $a'_4 = 38$ und $a'_5 = 11$ zu den Punkten $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 22$ und $a_5 = 43$, wo die Ziffern die Zeilennummern der Inzidenztafel Abb. 7 seien. Von den Ausgangs- wie den Bildpunkten liegen keine vier in einer Ebene. Dann ergibt die endliche Möbiussche Netzkonstruktion schrittweise durch Schneiden je dreier Ebenen, die keine gemeinsame Gerade enthalten, einen weiteren Punkt und durch Verbinden von je drei Punkten, die ebenfalls auf keiner Geraden liegen, eine weitere Ebene. Sind einschließlich der Ausgangs-

³⁸ Entsprechend findet man

$$S_3(2) \equiv (1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 5) \text{ (einzige Darstellung)}$$

$$S_3(3) \equiv (1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 5\ 1\ 3\ 2\ 5\ 2\ 8\ 6)$$

$$\equiv (1\ 2\ 2\ 4\ 6\ 7\ 3\ 1\ 1\ 7\ 1\ 3\ 2)$$

(zwei äquivalente Darstellungen).

elemente 15 Punkte bzw. Ebenen erfaßt, so liefert die Möbiussche Netzkonstruktion keine weiteren Elemente mehr. Erst durch Hinzunahme eines noch nicht erfaßten Punktes bzw. einer noch nicht erfaßten Ebene sind noch weitere, und zwar alle übrigen Punkte und Ebenen schrittweise erreichbar. Der Grund

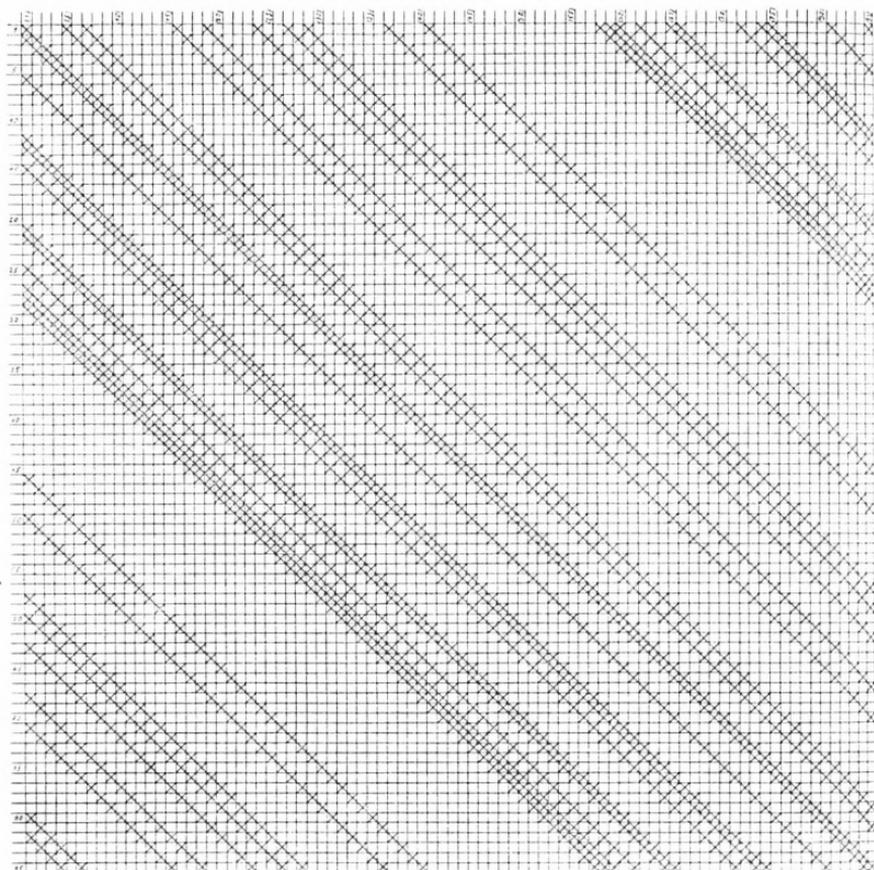


Abb. 9

hierfür läßt sich am raschesten aus der analytischen Darstellung ersehen. Das Galois-Feld $\text{GF}[2^2]$, dem die Koordinatenwerte angehören, enthält das Galois-Feld $\text{GF}[2]$ als Unterkörper. Dieses Galois-Feld $\text{GF}[2]$ ist aber Rationalitätsbereich für alle Koordinatenwerte einer Geometrie $S_3(2)$ mit 15 Punkten und ebensoviel Ebenen. Da es keinen Zwischenkörper zwischen $\text{GF}[2]$ und $\text{GF}[2^2]$ gibt, enthalten die Koordinatenwerte eines

beliebigen weiteren Punktes bereits die primitive Größe des GF $[2^2]$, durch deren Adjunktion GF $[2^2]$ aus GF $[2]$ entsteht. Als neuer Punkt des ersten Möbiusschen Netzes sei der Punkt 14 gewählt, der auf der Schnittlinie der Ebenen (1) und (22) liegt. Auf der dieser Schnittlinie zugeordneten Geraden (Schnittlinie der Ebenen (50) und (6)) stehen die zwei Punkte 33 und 31 als Bildpunkte zur Verfügung.³⁹ Die Zuordnung des Punktes 33 liefert dabei die fixpunktfreie, die des Punktes 31 eine einfixpunktige Abbildung.⁴⁰

Die Gefahr der Gabelung bei der Konstruktion des endlichen Möbiusschen Netzes infolge seiner vorzeitigen Schließung läßt sich dadurch vermeiden, daß man die Kollineation durch zwei aufeinanderfolgende geeignete Polaritäten ersetzt.

³⁹ Neben den Transformationsgleichungen (1a) stellt auch die Substitution

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho x'_1 &= x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 + \varepsilon x_4^2 \\ \rho x'_2 &= x_1^2 \\ \rho x'_3 &= x_2^2 \\ \rho x'_4 &= x_3^2 \end{aligned}$$

eine Kollineation dar, die allerdings nicht fixpunktfrei, sondern einfixpunktig ist. Bezüglich der Gleichungen (2) vgl. O. Veblen, *Collineations in a finite projective geometry*, T. A. M. S., vol. 8, 1906, p. 368.

⁴⁰ Hier liefert die Zuordnung jeder der beiden zur Verfügung stehenden Punkte eine Kollineation; dies braucht aber nicht immer der Fall zu sein. So stehen z. B. in $S_2(8)$ oder $S_3(8)$ für einen neu herausgegriffenen, d. h. außerhalb des in sich abgeschlossenen Systems $S_2(2)$, bzw. $S_3(2)$ aber auf einer ihm bereits angehörenden Gerade liegenden Punkt sechs Punkte als Bildpunkte zur Verfügung, von denen nur drei für eine Kollineation brauchbar sind, während die Zuordnung eines der übrigen drei zu Widersprüchen führt. Eine Arbeit des Verfassers zur Klärung der mit dem endlichen Möbiusschen Netz zusammenhängenden Fragen auch von der geometrischen Seite her befindet sich erst in Vorbereitung.