Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft III

Oktober- bis Dezembersitzung

München 1917

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit lauter geradlinigen Charakteristiken.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 1. Dezember 1917.

Die folgenden Ausführungen erledigen die Bestimmung aller partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit lauter geradlinigen Charakteristiken, eine Aufgabe, die trotz des einfachen Ergebnisses, zu dem ihre Lösung führt, bisher noch nicht vollständig behandelt worden ist[1]).

Für den R_3 freilich kennt man die Antwort schon lange: Die ∞^3 Geraden eines Komplexes müssen, um den Inbegriff aller Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu bilden, die Tangenten einer Fläche oder die Treffgeraden einer Kurve sein. Zu dieser notwendigen Bedingung kommt als selbstverständliche Nebenforderung hinzu, daß die Fläche nicht etwa eine abwickelbare Fläche bzw. die Kurve keine Gerade sein darf. ∞^2 Gerade aber, die nicht alle einer und derselben Ebene angehören, sind immer die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, wobei dann jede Gerade Träger von ∞^1 charakteristischen Streifen ist.

---

[1]) Herr Prof. F. Engel in Gießen hat mich in liebenswürdiger Weise auf die Unvollständigkeit des in diesen Berichten 1914, S. 344 ausgesprochenen Ergebnisses aufmerksam gemacht. Es mußten ganz neue Kriterien aufgestellt werden, um die Frage, deren vollständige Behandlung zunächst unmöglich erschien, zu einem befriedigenden Abschluß zu bringen. — Die Frage ist für den R_3 zuerst von P. Dubois-Reymond aufgeworfen, von Lie beantwortet worden. (Vgl. Math. Enc. III D 7, S. 460.)

Um die Frage in voller Allgemeinheit in Angriff zu nehmen, sind einige Vorbereitungen nötig, die an mehr oder weniger bekannte Dinge erinnern sollen.

Die Gesamtheit der ∞^{n-1} Elemente $E_n(z, x_1, \ldots x_n, p_1 \ldots p_n)$, welche die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0 \ldots \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

einem Punkt $P(x_1, \ldots x_n, z)$ des R_{n+1} zuordnet, können als Umhüllungsgebilde einen Mongeschen Kegel von ∞^{n-1}, ∞^{n-2}, $\ldots \infty^1$ Linienelementen oder schließlich eine „nullgliedrige Schar“, d. h. ein einziges oder lauter diskrete Linienelemente besitzen. Der letztgenannte Fall ist übrigens trivial, man kommt dabei auf lineare Differentialgleichungen. In den übrigen Fällen ist jedes der genannten Linienelemente $(x_1', \ldots x_n', z')$ im Punkte P Träger von einem, von ∞^1, $\infty^2 \ldots \infty^{n-2}$ Elementen E_n der Differentialgleichung. Da diese nun immer ∞^{2n-1} charakteristische Streifen besitzt, deren jeder eine Charakteristik oder charakteristische Kurve als Träger hat, so ist im ersten (dem „allgemeinen“) Fall jeder Punkt Ausgangspunkt von ∞^{n-1} Charakteristiken. In den anderen Fällen könnte man vermuten, daß jede Charakteristik Träger von ∞^1, $\infty^2 \ldots$ usw. Streifen wird.

Beispielsweise liegt folgender Schluß nahe: Liegt im R_4 eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung vor, so gehen gewiß von jedem Punkt ∞^2 charakteristische Streifen aus. Wenn dann die Differentialgleichung jedem Punkt einen Mongeschen Kegel von nur ∞^1 Linienelementen zuweist, so ist jedes dieser Linienelemente gewiß Träger von ∞^1 Elementen $E(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)$ der Differentialgleichung. Aus diesen richtigen Prämissen wird der übereilte Schluß nahe gelegt, daß dann jedes dieser Linienelemente nur *eine* charakteristische Kurve aussendet, die aber Träger von ∞^1 charakteristischen Streifen wird. Dieser Fall tritt indessen durchaus nicht immer ein, ist vielmehr eine *Ausnahme*.

Es dürfte zweckmäßig sein, sich diese Einsicht in die Charakteristikenlehre durch Beispiele zu verschaffen, die auch in anderer Hinsicht förderlich sind.

Im übrigen mag es gestattet sein, dem Gebot der Stunde folgend, einige Abkürzungen für beständig gebrauchte Wörter einzuführen:

Ch., ch. K. = Charakteristik oder charakteristische Kurve,
ch. Str. = charakteristischer Streifen,
g. = geradlinig,
L. = Linienelement,
M. K. = Mongesche Kegel,
p. Dg. 1. O. = partielle Differentialgleichung erster Ordnung,
T. = Träger,
z. B.: Punkt als T. von L. oder E_n (Elementen $z\, x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$), Gerade als T. von ch. Str.

Wir behandeln jetzt, wie angekündigt, zunächst *zwei Beispiele* von p. Dg. 1. O. im R_4 und wollen damit einem *dreifachen* Zweck dienen. Das erste Beispiel ist eine p. Dg. 1. O. im R_4 mit M. K., die nur ∞^1 L. enthalten, obwohl die Dg. ∞^5 und nicht nur ∞^4 Ch. besitzt. Es weist also auf die oben besprochenen Verhältnisse hin. Ferner dienen beide Beispiele dazu, das bei unseren Untersuchungen unvermeidliche *Multiplikatorenverfahren* in konkreten Fällen durchzuführen. Das zweite Beispiel wird sich als eine Dg. mit nur ∞^4 ch. Str. erweisen und in seinem Bau einen Fingerzeig dafür geben, wo die Dg. mit lauter g. ch. K. zu suchen sind.

Die *erste* Dg. im $R_4\,(x, x_1, x_2, z)$ sei vermittelt gegeben durch die vier Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} v^2 + u_1^2 + u_2^2 = 1, \\ u_2 = u_1 x - x_1, \\ v = p + p_1 u_1 + p_2 u_2, \\ v\,(p_1 + p_2 x) + u_1 + u_2 x = 0. \end{cases}$$

Hier könnte man aus den drei letzten Gleichungen u_1, u_2 und v durch x, x_1, p, p_1 und p_2 ausdrücken und erhielte durch Einsetzen in die erste Gleichung dann die p. Dg. 1. O. Wir wollen aber die Dg. für die ch. Str. in der Weise aufstellen, daß wir in

$$dp\,\delta x + dp_1\,\delta x_1 + dp_2\,\delta x_2 - \delta p\,dx - \delta p_1\,dx_1 - \delta p_2\,dx_2 = 0$$

die Koeffizienten der vermöge (1) noch frei bleibenden Variationen einzeln gleich Null setzen. Wir führen zu diesem Zweck *Multiplikatoren* ein und erhalten

$$\begin{aligned} dp\,\delta x + dp_1\,\delta x_1 + dp_2\,\delta x_2 - \delta p\,dx - \delta p_1\,dx_1 - \delta p_2\,dx_2 \\ + \lambda_1\,dt(v\,\delta v + u_1\,\delta u_1 + u_2\,\delta u_2) \\ + \lambda_2\,dt(\delta u_2 - x\,\delta u_1 - u_1\,\delta x + \delta x_1) \\ + dt(-\delta v + p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + \delta p + u_1\delta p_1 + u_2\delta p_2) \\ + \mu\,dt((p_1 + p_2 x)\,\delta v + \delta u_1 + x\,\delta u_2 + (u_2 + v p_2)\,\delta x + v\,\delta p_1 \\ + v x\,\delta p_2) = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin zunächst die Faktoren von δu_1, δu_2 und δv gleich Null, so kommt

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 - \lambda_2 x + p_1 + \mu &= 0, \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 + p_2 + \mu x &= 0, \\ \lambda_1 v - 1 + \mu(p_1 + p_2 x) &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit x, die dritte mit $p_1 + p_2 x$, addiert sodann alle drei Gleichungen und berücksichtigt dabei die vierte Gleichung (1), so folgt

$$\mu(1 + x^2 + (p_1 + p_2 x)^2) = 0,$$

also
$$\mu = 0.$$

Durch Nullsetzen der Faktoren von δp, δp_1 und δp_2 erhält man dann

$$dx = dt, \quad dx_1 = u_1\,dt, \quad dx_2 = u_2\,dt$$

und dazu

$$dz = p\,dx + p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = dt(p + p_1 u_1 + p_2 u_2) = v\,dt.$$

Der einem Punkt des R_4 durch die p. Dg. zugewiesene M. K. ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} dx_2 &= x\,dx_1 - x_1\,dx, \\ dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 &= dx^2 \end{aligned}$$

und besteht aus ∞^1 Linienelementen.

Zur Bestimmung der ch. Str. haben wir also zunächst die drei Differentialgleichungen

$$x_1' = u_1, \quad x_2' = u_2, \quad z' = v,$$

in denen der Akzent die Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen x bedeutet. Setzt man dann die Koeffizienten von δx, δx_1 und δx_2 gleich Null, so kommt

$$p' - \lambda_2 u_1 = 0, \quad p_1' + \lambda_2 = 0, \quad p_2' = 0,$$

und hierzu treten die drei durch Nullsetzen der Koeff. von δu_1, δu_2, δv bereits gefundenen Gleichungen, in denen aber, wie festgestellt wurde, μ gleich Null zu setzen ist.

Als Dg. zur Bestimmung der ch. Str. erhält man schließlich

$$\begin{aligned} & x_1' = u_1, \quad x_2' = u_2, \quad z' = v, \\ (2) \qquad & p' + p_1' u_1 = 0, \quad p_2' = 0, \\ & u_1 + v(p_1' x + p_2) = 0, \quad u_2 + v(p_2 - p_1') = 0, \end{aligned}$$

und dazu treten selbstverständlich die Gleichungen (1). Wir suchen jetzt nach ch. Str. mit g. Tr., nach solchen also, bei denen

$$u_1' = u_2' = v' = 0$$

ist und finden aus (1) und (2) für diesen Fall die Bedingungen:

$$\begin{aligned} & p' + p_1' u_1 + p_2' u_2 = p' + p_1' u_1 = 0, \\ & v(p_1' + p_2) + u_2 = 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist wegen (2) erfüllt, und man erhält schließlich folgende ch. Str. mit g. Tr.:

$$\begin{aligned} & x_1 = u_1 x - u_2, \quad x_2 = u_2 x + c_1, \quad z = vx + c_2, \\ (3) \qquad & \qquad (v^2 = 1 - u_1^2 - u_2^2) \\ & p_1 = -\frac{u_1}{v}, \quad p_2 = -\frac{u_2}{v}, \quad p = v - p_1 u_1 - p_2 u_2 = \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Dabei sind u_1, u_2, c_1 und c_2 vier willkürliche Konstanten, also haben wir eine viergliedrige, in der Gesamtheit der ∞^5 ch. Str. enthaltene Schar von ch. Str. mit Geraden als Trägern. Die p. Dg. hat also notwendig ∞^5 und nicht nur ∞^4 ch. K., denn wäre letzteres der Fall, so müßte eben jede der berechneten viergliedrigen Schar angehörige Gerade T. von ∞^1 ch. Str. sein, während wir doch soeben festgestellt haben, daß sie nur T. *eines einzigen* ch. Str. ist. Bei diesem Beispiel gehen also von jedem L. eines M. K. ∞^1 ch. K. aus, nicht nur eine einzige.

Ein *zweites*, kürzer zu behandelndes Beispiel macht uns mit einer einfachen p. Dg. 1. O. im R_4 bekannt, die nur ∞^4 durchweg geradlinige ch. K. besitzt. Die p. Dg. sei gegeben durch

$$(1')\qquad \begin{aligned} &v^2 + u_1^2 + u_2^2 = 1,\\ &u_1 x - x_1 = 0,\\ &v = p + p_1 u_1 + p_2 u_2,\\ &v p_2 + u_2 = 0. \end{aligned}$$

Man findet wie oben

$$x_1' = u_1, \quad x_2' = u_2, \quad z' = v$$

und erhält die noch fehlenden Gleichungen, wenn man in

$$\begin{aligned} &dp\,\delta x + dp_1\,\delta x_1 + dp_2\,\delta x_2 + \lambda_1 dx(v\,\delta v + u_1\,\delta u_1 + u_2\,\delta u_2)\\ &+ \lambda_2 dx(-x\,\delta u_1 - u_1\,\delta x + \delta x_1) + dx(-\delta v + p_1\,\delta u_1 + p_2\,\delta u_2\\ &+ \delta p + u_1\,\delta p_1 + u_2\,\delta p_2) = 0 \end{aligned}$$

die Koeffizienten der willkürlichen Variationen gleich Null setzt.

Die ∞^5 ch. Str., also die ganze fünfgliedrige Schar wird hier dargestellt durch die Gleichungen

$$(3')\qquad \begin{gathered} x_1 = u_1 x, \quad x_2 = u_2 x + c_1, \quad z = vx + c_2\\ (v^2 = 1 - u_1^2 - u_2^2)\\ p_1 = -\frac{u_1}{v} + \frac{c_3}{x}, \quad p_2 = -\frac{u_2}{v}, \quad p = \frac{1}{v} + \frac{c_3}{x}, \end{gathered}$$

wobei

$$u_1, u_2, c_1, c_2, c_3$$

fünf willkürliche Konstanten sind. Hier hat man also in der Tat nur ∞^4 charakteristische Kurven, und zwar gerade Linien; jede ist Träger von ∞^1 ch. Str.

Zu beachten ist, daß hier die ∞^4 Geraden *Treffgeraden zweier zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten* sind, nämlich der Ebene

$$x = x_1 = 0$$

und einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades, die im Unendlichen liegt, und bei Einführung homogener Koordinaten

$$z : x : x_1 : x_2 : x_3$$

durch $\qquad x_3 = 0, \quad z^2 + x_1^2 + x_2^2 - x^2 = 0$

gegeben ist. Sowohl die Treffgeraden jener Ebene wie die Treffgeraden dieser unendlich fernen Mannigfaltigkeit zweiten Grades sind als Ausartungen von Tangentenkomplexen zu bezeichnen — und, wie wir hier an einem Beispiel sehen, daß die zwei (ausgearteten) Tangentenkomplexen gemeinsamen Geraden die ∞^4 ch. Str. einer p. Dg. 1. O. sind, so werden wir sehr bald feststellen können, *daß eine Geradenschar nur dann die ch. K. einer p. Dg. im R_n bildet, wenn die Geraden mehreren Tangentenkomplexen gleichzeitig angehören.*

Wir gehen nun zu der eigentlichen, durch unsere Beispiele ausreichend vorbereiteten Aufgabe über, der *Bestimmung aller p. Dg. 1. O. mit lauter geradlinigen Charakteristiken.*

Der Untersuchung unterworfen werden p. Dg. 1. O. im R_{n+m+1}, wobei die Zahl n angeben soll, wie viele Parameter der L. der M. K. willkürlich sind, mit andern Worten, die M. K. sollen aus ∞^n L. bestehen. Dabei soll $n > 0$ sein, denn $n = 0$ führt auf den trivialen Fall der linearen p. Dg. 1. O., wobei ja jede Ch. eo ipso Träger von ∞^{m-1} ch. Str. ist. (Dagegen ist für $m = 1$ jede Ch. eo ipso Tr. von einem und nur einem ch. Str.) Wir verlangen also jetzt, *es sollen in allgemeinster Weise ∞^{2n+m} Gerade so bestimmt werden, daß sie die einzigen charakteristischen Kurven einer p. Dg.* 1. O. *in R_{n+m+1} sind,* daß also jede von ihnen Tr. von ∞^{m-1} ch. Str. wird. (Im ganzen gibt es $\infty^{2n+2m-1}$ ch. Str., woraus sich für die „Tragstärke“ die Zahl $m - 1$ ergibt.)

Die Punktkoordinaten des R_{n+m+1} seien

$$x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m,$$

wir führen alsdann Linienkoordinaten ein durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_\nu &= r_\nu x + \varrho_\nu \ldots (\nu = 1, 2 \ldots n) \\ y_\mu &= s_\mu x + \sigma_\mu \ldots (\mu = 1, \ldots m) \end{aligned}$$

und nehmen an, daß die $(2n + m)$-gliedrige Geradenschar gegeben sei durch die Gleichungen

(5) $\sigma_\mu = f_\mu(r_1 \ldots r_n, s_1 \ldots s_m, \varrho_1 \ldots \varrho_n) \ldots (\mu = 1, 2 \ldots m)$.

Die (den Flächenelementen des R_3 entsprechenden) Elemente E_{n+m} sind bestimmt durch die $n + m + 1$ Koordinaten des Punktes, der das Element trägt und durch die homogenen „*Stellungskoordinaten*"

$$p, p_1 \ldots p_n, q_1, \ldots q_m,$$

wobei die Bedingung vereinigter Lage zweier unendlich benachbarten Elemente darin besteht, daß die Pfaffsche Gleichung

$$p\,dx + p_1 dx_1 \cdots + p_n dx_n + q_1 dy_1 \cdots + q_m dy_m = 0$$

erfüllt ist.

Um zur Aufstellung der p. Dg. 1. O. zu gelangen, haben wir zunächst die Geraden durch einen Punkt zu bestimmen, also die Linienkoordinaten den Bedingungen

$$x\,dr_\nu + d\varrho_\nu = 0, \quad x\,ds_\mu + d\sigma_\mu = 0$$

zu unterwerfen. Wegen (5) ist dann

$$(5') \quad \sum_1^m{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} ds_\mu + \left(x + \frac{\partial f_i}{\partial s_i}\right) ds_i + \sum_1^n{}^\nu \frac{df_i}{dr_\nu} dr_\nu = 0 \ldots (i = 1, 2 \ldots m),$$

wobei die Bezeichnung

$$\frac{df_i}{dr_\nu} = \frac{\partial f_i}{\partial r_\nu} - x \frac{\partial f_i}{\partial \varrho_\nu}$$

gebraucht worden ist.

Diesen Differentialgleichungen sind die Linienelemente

$$x_\nu' = r_\nu, \quad y_\mu' = s_\mu$$

des am Punkte

$$P(x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m)$$

haftenden M. K. unterworfen. Die p. D. selbst erhält man aus

$$(6) \qquad p + \sum_1^n{}^\nu p_\nu r_\nu + \sum_1^m{}^\mu q_\mu s_\mu = 0$$

und $$\sum_1^n{}^\nu p_\nu\, dr_\nu + \sum_1^m{}^\mu q_\mu\, ds_\mu = 0$$

mit Berücksichtigung von (5'), und zwar kommt

$$(7)\quad \begin{aligned} p_i &= \sum_1^m{}^\mu \tau_\mu \frac{df_\mu}{dr_i} = F_i \ldots (i = 1, 2 \ldots n), \\ q_k &= \sum_1^m{}^\mu \tau_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_k} + \tau_k x = G_k \ldots (k = 1, 2 \ldots m). \end{aligned}$$

Man hätte nunmehr die $2n + 3m$ Größen $(r_\nu, \varrho_\nu, s_\mu, \sigma_\mu, \tau_\mu)$ aus den

$$n + m + m + 1 + n + m = 2n + 3m + 1$$

Gleichungen (4), (5), (6) und (7) zu eliminieren, um die p. Dg. zu erhalten. Selbstverständlich kommt es nur darauf an, die Bedingung für die Möglichkeit der Elimination und dafür, daß dabei wirklich nur eine einzige Gleichung zwischen den Punktkoordinaten und den homogenen Stellungskoordinaten p, p_ν und q_n entsteht, analytisch zu formulieren. Es ist also zu verlangen, daß die Determinante

$$(8)\quad D = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dr_1} \ldots \frac{df_1}{dr_n} & x + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df_m}{dr_1} \ldots \frac{df_m}{dr_n} & \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & & x + \frac{\partial f_m}{\partial s_m} & 0 & & 0 \\ \frac{dF_1}{dr_1} \ldots \frac{dF_1}{dr_n} & \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial s_m} & \frac{df_1}{dr_1} & \ldots & \frac{df_m}{dr_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dF_n}{dr_1} \ldots \frac{dF_n}{dr_n} & \frac{\partial F_n}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial s_m} \ldots & \frac{df_1}{dr_n} & \ldots & \frac{df_m}{dr_n} \\ \frac{dG_1}{dr_1} \ldots \frac{dG_1}{dr_n} & \frac{\partial G_1}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial G_1}{\partial s_m} & x + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dG_m}{dr_1} \ldots \frac{dG_m}{dr_n} & \frac{\partial G_m}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial G_m}{\partial s_m} & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} & & x + \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. In dieser Determinante hat man sich die ϱ_r vermöge (4) durch x, x_r, r_r ausgedrückt zu denken; ferner sind bei der Bildung von

$$\frac{dF_i}{dr_r} = \frac{\partial F_i}{\partial r_r} - x\frac{\partial F_i}{\partial \varrho_r} \cdots$$

usw. die Multiplikatoren τ_μ als Konstanten zu behandeln.

Wir nehmen also von jetzt als an

$$D \neq 0$$

und schreiten zur Bestimmung der Differentialgleichungen für die ch. Str. nach dem *Multiplikatorenverfahren.* Wir haben also in

$$\begin{aligned} & dp\,\delta x - dx\,\delta p + \sum_1^n{}^r (dp_r\,\delta x_r - dx_r\,\delta p_r) + \sum_1^m{}^\mu (dq_\mu\,\delta y_\mu - dy_\mu\,\delta q_\mu) \\ & \quad + dt\left(\sum_1^n{}^r p_r\,\delta r_r + \sum_1^m{}^\mu q_\mu\,\delta s_\mu + \delta p + \sum_1^n{}^r r_r\,\delta p_r + \sum_1^m{}^\mu s_\mu\,\delta q_\mu\right) \\ (9) & \quad + dt\cdot\sum_1^m{}^\mu \lambda_\mu(\delta f_\mu + x\,\delta s_\mu - \delta y_\mu) \\ & \quad + dt\cdot\sum_1^n{}^r \pi_r(-\delta p_r + \delta F_r) + dt\cdot\sum_1^m{}^\mu \varkappa_\mu(-\delta q_\mu + \delta G_\mu) = 0 \end{aligned}$$

die Koeffizienten der Variationen

$$\delta x,\ \delta x_r,\ \delta y_\mu,\ \delta p,\ \delta p_r,\ \delta q_\mu,\ \delta r_r,\ \delta s_\mu,\ \delta \tau_\mu$$

gleich Null zu setzen. Greift man zuerst die $2m + n$ Gleichungen heraus, die man durch Nullsetzen der Koeffizienten von $\delta\tau_\mu$, δr_r und δs_μ erhält, so kommen $2m + n$ lineare homogene Gleichungen für

$$\pi_r,\ \varkappa_\mu,\ \lambda_\mu + \tau_\mu$$

und die Determinante dieser Gleichungen ist gerade D, also der Voraussetzung nach von Null verschieden. Es wird also

$$\pi_r \cdots = \pi_n = \varkappa_1 \cdots = \varkappa_m = \lambda_1 + \tau_1 \cdots = \lambda_m + \tau_m = 0.$$

Wir erhalten dann aus (9)

$$dx = dt$$

und weiter, wenn wir x als unabhängige Veränderliche längs eines ch. Str. einführen, durch Nullsetzen der Koeffizienten der δp_r und δq_μ in (9)

$$x'_r = r_r \cdots (\nu = 1 \cdots n)$$
$$y'_\mu = s_\mu \cdots (\mu = 1 \cdots m), \tag{10}$$

sodann durch Nullsetzen der Koeffizienten der δx_r

$$p'_r + \sum_1^m{}^\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$p'_r = \sum_1^m{}^\mu \tau_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r} \quad \cdots \quad (\nu = 1 \cdots n) \tag{11}$$

und durch Nullsetzen der Koeffizienten der δy_μ

$$q'_\mu - \lambda_\mu = 0 \qquad \text{oder}$$

$$q'_\mu = -\tau_\mu \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{12}$$

Nullsetzen der Koeffizienten von allen δr_r und δs_μ in (9) führt nur auf (7) zurück.

Wir sind jetzt unmittelbar daran, die notwendigen Bedingungen dafür ausfindig zu machen, daß alle Ch. gerade Linien sind. Differenziert man nämlich jetzt die Gleichungen (7) unter Verwendung des Operationssymbols

$$(\quad)' = \sum_1^n{}^i r'_i \left(\frac{\partial}{\partial r_i} - x \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\right) + \sum_1^m{}^k s'_k \frac{\partial}{\partial s_k}, \tag{13}$$

so erhält man

$$p'_r = \sum_1^m{}^\mu \left(\tau'_\mu \frac{d f_\mu}{d r_r} + \tau_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}\right) + (F_r)',$$

$$q'_\mu = \tau_\mu + x\tau'_\mu + \sum_1^m{}^\mu \tau'_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_\mu} + (G_\mu)',$$

oder mit Rücksicht auf (11) und (12)

$$2\,p'_r = \sum_1^m{}^\mu \tau'_\mu \frac{d f_\mu}{d r_e} + (F_r)'$$
$$2\,q'_\mu = x\tau'_\mu + \sum_1^m{}^\mu \tau'_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_\mu} + (G_\mu)'. \tag{14}$$

Wir fordern, daß *alle* Ch. Gerade sein sollen, daß also

$$r_r' = \cdots = r_n' = s_1' \cdots s_m' = 0$$

ist, daher auch

$$(F_1)' = \cdots = (F_n)' = (G_1)' = \cdots = (G_m)' = 0.$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen für die $2\,q_\mu'$ (14) der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_1} \cdots (\mu = 1, \cdots m)$$

und addieren zur Gleichung für $2\,p_1'$, berücksichtigen sodann (11) und (12), verfahren wir allgemein in dieser Weise, indem wir mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}$$

multiplizieren und zur Gleichung für $2\,p_r'$ addieren, so kommt

$$\sum_1^m{}^\mu \tau_\mu' \Phi_{\mu r} = 0 \cdots (r = 1, \cdots n), \tag{15}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned}\frac{d f_\mu}{d r_r} + \frac{\partial f_1}{\partial \varrho_r}\frac{\partial f_\mu}{\partial s_1} + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}\left(x + \frac{\partial f_\mu}{\partial s_\mu}\right) + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial \varrho_r}\frac{\partial f_\mu}{\partial s_m} \\ = \frac{\partial f_m}{\partial r_r} + \sum_1^m{}^k \frac{\partial f_k}{\partial \varrho_r}\frac{\partial f_\mu}{\partial s_k} = \Phi_{\mu r}.\end{aligned} \tag{16}$$

Es wird verlangt, daß jede der ∞^{2n+m} Geraden Tr. von ∞^{m-1} ch. Str. werden soll, also muß jedes Wertsystem

$$q_1, q_2 \cdots q_m$$

ein Anfangselement eines ch. Str. liefern, dessen Tr. eine Gerade ist, d. h. wie man auch in (7) die

$$\tau_\mu = q_\mu'$$

oder in (14) die τ_μ' wählt, immer soll (15) erfüllt sein. Es müssen also alle $\Phi_{\mu r}$ gleich Null sein.

Damit haben wir den Satz gewonnen:

Damit die Gleichungen (4) *bis* (7) *eine p. Dg. 1. O. im* R_{n+m+1} *ergeben, deren Ch. einzig und allein die durch* (5) *gegebenen* ∞^{2n+m} *Geraden sind, ist notwendig, daß die* $m \cdot n$ *Gleichungen*

$$\Phi_{\mu r} = 0 \tag{17}$$

bestehen.

Im übrigen sei nochmals die *Nebenforderung* hervorgehoben, daß die durch (8) definierte Determinante (D) von Null verschieden sein muß; dies war ja die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen (4) bis (7) überhaupt auf eine p. Dg. 1. O. führen.

Wir haben nunmehr noch nachzuweisen, daß die $m \cdot n$ Bedingungen — unter der selbstverständlichen Voraussetzung

$$D \neq 0,$$

wie kaum mehr hervorgehoben zu werden braucht — auch *hinreichend* sind.

Wenn man zunächst annimmt, daß die

$$r_1' \ldots r_n', \; s_1' \ldots s_m'$$

nicht alle Null sind, also auch die $(F_r)'$ und $(G_\mu)'$ nicht alle gleich Null, so ergibt jetzt die oben ausgeführte Multiplikation und Addition statt (15) die n Gleichungen

$$\sum_1^m{}^{\mu} \tau_\mu' \Phi_{\mu r} + (F_r)' + \sum_1^m{}^{\mu} (G_\mu)' \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r} = 0 \cdots (\nu = 1, \ldots n). \tag{15'}$$

Wenn dann alle $\Phi_{\mu r}$ gleich Null sind, so hat man zur Bestimmung von $r_1' \ldots r_n'$, $s_1' \ldots s_m'$ neben den Gleichungen

$$\sum_1^n{}^{r} \frac{df_i}{dr_r} r_r' + x \frac{\partial f_i}{\partial s_i} s_i' + \sum_1^n{}^{\mu} \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} s_\mu' = 0 \cdots (i = 1, \cdots m),$$

die aus (4), (5) und (10) folgen, noch

$$(F_r)' + \sum_1^m{}^{\mu} (G_\mu)' \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r} = 0 \cdots r = (1 \cdots n). \tag{15''}$$

Dies sind im ganzen $m+n$ lineare homogene Gleichungen, denen die Differentialquotienten $r_1' \dots r_r', s_1' \dots s_\mu'$ genügen müssen. Die Determinante Δ dieser Gleichungen hängt nun mit der Determinante D aufs engste zusammen. In D sind alle Glieder, welche in dem m ersten Zeilen und zugleich in den m letzten Reihen stehen, gleich Null. Wenn man dann die m letzten Zeilen mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_1} \cdots (\mu = 1, \cdots m)$$

multipliziert und zur $(m+1)$-ten Zeile addiert, so gehen die m letzten Glieder dieser Zeile über in

$$\Phi_{11}, \Phi_{21} \dots \Phi_{m_1};$$

ebenso wenn man mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_2} \cdots (\mu = 1 \cdots m)$$

multipliziert und zur $(m+2)$-ten Reihe addiert, so gehen die m letzten Glieder über in

$$\Phi_{12}, \Phi_{22}, \dots \Phi_{m2}$$

usw. Führt man dieses Verfahren durch, so erkennt man, daß, wenn die $\Phi_{\mu r}$, wie wir ja voraussetzen, alle gleich Null sind, D sich gerade in das Produkt der beiden Determinanten Δ und

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} x + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial s_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & x + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_m} & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} & x + & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{vmatrix}.$$

Diese letztere Determinante ist auf keinen Fall identisch gleich Null, auch ist der Voraussetzung nach D und mithin Δ *von Null verschieden*, demnach ist beim Fortschreiten *längs eines jeden charakteristischen Streifens*

$$r_1' = r_2' \dots = r_n' = s_1' = s_2' \dots = s_n' = 0,$$

also sind, wenn D von Null verschieden ist und die $m \cdot n$ Bedingungen (17) erfüllt sind, die Tr. der ch. Str. in der Tat identisch mit den durch (5) gegebenen Geraden.

Damit sind die als *notwendig* erkannten Bedingungen (17) auch als *hinreichend* festgestellt. Selbstverständlich darf auch hier die in unserer Darlegung immer wieder betonte Forderung

$$D \neq 0$$

nicht vergessen werden!

Unsere Aufgabe bliebe unerledigt, wenn die *geometrische Deutung* der Gleichungen (17) bei Seite gelassen würde. Es gibt auf jeder Geraden des durch (5) gegebenen Systems m Punkte, in denen die Determinante (18) gleich Null ist, also kann man, und zwar auf m verschiedene Weisen,

$$x = \bar{x} \text{ und } \tau_\mu = \bar{\tau}_\mu \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

so wählen, daß

$$\bar{q}_k = \sum_1^m {}^\mu \, \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_k} + \bar{\tau}_k \bar{x} = 0 \tag{19}$$

wird. Wegen (17) ist dann auch

$$\bar{p}_i = \sum_1^m {}^\mu \, \tau_\mu \frac{d f_\mu}{d r_i} = 0. \tag{20}$$

Diese m Punkte, die man etwa als „*Streuungspunkte*" bezeichnen kann, bilden, wie wir nun sehen werden, m von den Geraden des Systems berührte Mannigfaltigkeiten.

Hat man eine Wurzel $\bar{x}$ von (18) gewählt, so kann man die τ_μ so bestimmen, daß die Verhältnisse

$$\bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \cdots : \bar{p}_n : \bar{q}_1 : q_2 \cdots \bar{q}_m$$

die *unbestimmte Form*

$$0 : 0 \cdots : 0$$

erhalten; in Wirklichkeit sind die Verhältnisse der *Stellungskoordinaten* p_r, q_μ auch in den Streuungspunkten nicht unbestimmt, vielmehr wird, wie man durch Differentiation nach x erkennt, in jedem „Streuungspunkt" $\overline{P}(\bar{x}, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \bar{y}, \ldots y_m)$

$$\bar{q}_1 : \bar{q}_2 : \cdots : \bar{q}_m : \bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \cdots : \bar{p}_n$$

$$= \bar{\tau}_1 : \bar{\tau}_2 : \cdots : \bar{\tau}_m : \left(-\sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_1}\right) : \left(-\sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_2}\right)$$

$$\cdots : \left(-\sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_n}\right). \tag{21}$$

Man kann auch, da ja die Stellungskoordinaten homogene Veränderliche sind, sie den Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung unmittelbar gleich setzen.

Setzt man jetzt

$$\Delta_i(x) = x\,d s_i + \sum_1^m{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} d s_\mu + \sum_1^n{}^r \frac{d f_i}{d r_r} d r_r$$

$$= \sum_1^n{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} d s_\mu + \sum_1^n{}^r \left(\frac{\partial f_i}{\partial r_r} d r_r + \frac{\partial f_i}{\partial \varrho_r} d \varrho_r\right)$$

$$+ x\,d s_i - \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_i}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + x\,d r_r)$$

$$= d\sigma_i + x\,d s_i - \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_i}{\partial s_r}(d\varrho_r + x\,d r_r),$$

so ist mit Rücksicht auf die Definition von $\bar{x}$ und den $\bar{\tau}_\mu$:

$$\sum_1^m{}^i \bar{\tau}_i \Delta_i(\bar{x}) \equiv 0.$$

Anderseits wird

$$\bar{p}\,d\bar{x} + \sum_1^n{}^r \bar{p}_r\,d\bar{x}_r + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu\,d\bar{y}_\mu$$

$$= \sum_1^n{}^r \bar{p}_r (d r_r - r_r d\bar{x}) + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu (d\bar{y}_\mu - s_\mu d\bar{x})$$

und, wenn man noch beachtet, daß

$$d x_r - r_r d x = x\,d r_r + d\varrho_r,$$
$$d y_\mu - s_\mu d x = x\,d s_\mu + d\sigma_\mu$$

ist, so verwandelt sich der letzte Ausdruck nach (21) in

$$\sum_1^n{}^r \bar{p}_r(\bar{x}dr_r + d\varrho_r) + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu \left(\Delta_\mu(\bar{x}) + \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + \bar{x}dr_r)\right)$$

$$= \sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \left(\Delta_\mu(\bar{x}) + \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + \bar{x}dr_r) - \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + \bar{x}dr_r)\right)$$

$$= \sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_m \Delta_\mu(\bar{x}) = 0.$$

Es ist also

$$\bar{p}\,d\bar{x} + \sum_1^n{}^r \bar{p}_r\,d\bar{x}_r + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu\,d\bar{y}_\mu = 0,$$

d. h. die dem Ort der „Streuungspunkte“

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_m)$$

zugeordneten „Streuungselemente“

$$E_{n+m}(\bar{x}, \bar{x}_r, \bar{y}_\mu, \bar{p}_r, \bar{q}_\mu)$$

gehören dem Elementverein an, dessen Punktort von den Punkten $\bar{P}$ gebildet wird, die Geraden also sind Tangenten dieses geometrischen Ortes bzw. Treffgeraden, wenn seine Dimension nicht gleich $m+n$, sondern niedriger ist.

Damit ist die gesuchte geometrische Deutung gefunden:

Die ∞^{2m+n} Geraden, welche durch (5) *gegeben sind, müssen m Tangentenkomplexen angehören, wenn sie die Ch. einer p. Dg. 1. O. sein sollen.*

Unter einem *eigentlichen* „Tangentenkomplex“ sind dabei die Tangenten einer M_{n+m}, unter einem *ausgearteten* die Treffgeraden einer M_{n+m-1} zu verstehen. Die Treffgeraden einer M_{n+m-k} sind als Gerade aufzufassen, die k (im übrigen beliebige) durch M_{n+m-k} gehende M_{n+m-1} treffen, wobei dann jeder Treffpunkt mit der M_{n+m-k} als k-facher Streuungspunkt zu zählen ist. Auf die *Nebenforderung*, die hinzukommt, nämlich

$$D \neq 0$$

kommen wir nachher zurück und lassen dahingestellt, ob ihr ein *allgemein giltiger* geometrischer Sinn abgewonnen werden kann.

Beispiel: Im R_4 kommen als die Ch. einer p. D. 1. O. folgende Systeme von ∞^4 Geraden in Betracht:

1. die gemeinsamen Tangenten zweier dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (M_3),
2. die Geraden, welche eine M_3 berühren und zugleich eine M_2 treffen,
3. die gemeinsamen Treffgeraden zweier M_2 (wovon oben S. 290 ein Beispiel behandelt ist),
4. die Treffgeraden einer Kurve.

Legt man nämlich durch die Kurve zwei M_2, so erkennt man, daß die ∞^4 Treffgeraden der Kurve zwei (ausgearteten) Tangentenkomplexen gleichzeitig angehören und daß die Schnittpunktpaare mit diesen beiden M_2 in je einen Punkt zusammenfallen.

Zum Schluß wollen wir als Beispiel die ∞^{n+1} *Treffgeraden einer Kurve* des R_{n+1} $(x, x_1 \ldots x_n)$ behandeln, die ja auf Grund des allgemeinen Satzes in Betracht kommen. In der Tat wird sich herausstellen, daß sie immer dann die Ch. einer p. Dg. 1. O. sind, wenn die Kurve nicht eine gerade Linie ist. Wir wollen diese Untersuchung hier durchführen, wobei sich nochmals Gelegenheit gibt, das schmiegsame Multiplikatorenverfahren anzuwenden.

Die Kurve sei gegeben durch

$$x = u, \quad x_\nu = u_\nu, \quad u_\nu = f_\nu(u) \ldots (\nu = 1 \ldots n).$$

Dann sind ihre Treffgeraden gegeben durch

$$x_\nu = f_\nu + r_\nu (x - u). \tag{22}$$

Dazu führen wir noch homogene Stellungskoordinaten p, $p_1 \ldots p_n$ ein, so daß die Bedingung für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarter Elemente wird:

$$p\,dx + \sum_1^n{}^\nu p_\nu\, dx_\nu = 0.$$

Wenn das Linienelement

$$x, x_1 \ldots x_n, \quad x_1' = r_1 \ldots x_n' = r_n$$

in dem Element $x, x_1 \ldots x_n, p, p_1 \ldots p_n$ liegt, ist also

$$p + \sum_1^n{}^r p_r r_r = 0. \tag{23}$$

Hält man jetzt $x, x_1' \ldots x_n$ fest, so wird wegen (22)

$$(f_r' - r_v') \delta u + (x - u) \delta r_r = 0$$

und wegen (23)

$$\sum_1^n{}^r p_r \delta r_r = 0,$$

also

$$\sum_1^n{}^r p_r (f_r' - r_r) = 0. \tag{24}$$

Die p. Dg. 1. O. erhält man aus (22), (23), (24) durch Elimination von u und $r_1 \ldots r_n$. Diese Elimination ist dann und nur dann möglich, wenn (24) die Variable u enthält, also wenn nicht etwa

$$f_1'' = f_2'' = \cdots = f_n'' = 0,$$

d. h., *wenn die Kurve keine Gerade ist.*

Die Dg. für die ch. Str. erhält man durch das Multiplikatorenverfahren aus

$$\begin{aligned} dp\,\delta x - dx\,\delta p + \sum_1^n{}^r (dp_r\,\delta x_r - dx_r\,\delta p_r) \\ + dt\left(\delta p + \sum_1^n{}^r (p_r\,\delta r_v + r^v\,\delta p_r)\right) \\ + dt \sum_1^n{}^r \lambda_r ((x - u)\,\delta r_r + (f_r' - r_r)\,\delta u + r_r\,\delta x - \delta x_r) \\ + \mu\,dt \sum_1^n{}^r ((f_r' - r_r)\,\delta p_r - p_r\,\delta r_r + p_r f_r''\,\delta u). \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der Faktoren von δr_r und δu kommt:

$$p_r + \lambda_r (x - u) - \mu p_r = 0$$

und
$$\sum_1^n{}^r (\lambda_r (f_r' - r_r) + \mu p_r f_r'') = 0.$$

Multipliziert man hier die n ersten Gleichungen bzw. mit $r_r - f_r$, die letzte mit $(x-u)$ und addiert, so folgt wegen (24)

$$\mu(x-u)\sum_1^n{}^r p_r f_r'' = 0\,,$$

und da in diesem Ausdruck die beiden andern Faktoren nicht identisch gleich Null sind, so wird

$$\mu = 0.$$

Man erhält dann für die ch. Str. das System

$$\begin{array}{ll} x_r' - r_r = 0, & (\text{Faktor von } \delta p_r) \\ p' + \sum_1^n{}^r \lambda_r r_r = 0, & (\quad\text{„}\quad\text{„}\quad \delta x) \\ p_r' - \lambda_r = 0, & (\quad\text{„}\quad\text{„}\quad \delta x_r) \\ p_r + \lambda_r(x-u) = 0, & (\quad\text{„}\quad\text{„}\quad \delta r_r) \end{array}$$

oder

$$(25)\quad x_r' = r_r,\ \ p_r + p_r'(x-u) = 0,\ \ p + p'(x-u) = 0,$$

wobei der Akzent die Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen x bedeutet.

(24) kann wegen (23) geschrieben werden

$$p + \sum_1^n{}^r p_r f_r' = 0$$

und hieraus folgt durch Differentiation

$$p' + \sum_1^n{}^r p_r' f_r + u' \sum_1^n{}^r p_r f_r'' = 0$$

oder, wegen der aus (25) folgenden Proportionen

$$p' : p_1' \cdots : p_n' = p : p_1 \cdots : p_n$$

noch weiter

$$u' = 0,$$

und dann aus (22)

$$x_\lambda' = r_r = (f_r' - r_r)u' + r_r + r_r'(x-u)$$

oder
$$r_\nu' = 0,$$

d. h. *die ch. K. der durch (22) bis (24) gegebenen p. Dg. 1. O. sind eben die durch (22) gegebenen* ∞^{n+1} *Geraden*, und es sind u, $r_1 \ldots r_n$ die $n+1$ unabhängigen Parameter. —

Mit diesem einfachen Beispiel möge die Darlegung abgeschlossen werden, die an verschiedenen Stellen noch auf viel weitergehende Fragen hinweist und an einer einfachen Fragestellung mit durchsichtiger Antwort zeigen mag, daß die Gedankenwelt von Sophus Lie, an die sie anknüpft, noch mannigfacher Entwickelung fähig ist.

Zwei dieser Fragestellungen sollen zum Schluß berührt werden an der Hand eines einfachen Beispiels. Man betrachte zwei M_3 des R_4; die ∞^5 Tangenten der einen und die der andern sind dann die Ch. je einer p. Dg. 1. O. und die ∞^4 gemeinsamen Tangenten nach S. 302 die ch. K. einer dritten p. Dg. 1. O.

Der Satz: *Liegen im R_4 zwei fünfgliedrige Scharen von Ch. je einer p. Dg. 1. O. vor, die eine viergliedrige Schar gemein haben, dann stellt diese Schar die Ch. einer dritten p. Dg. 1. O. dar*, gilt also, wenn die Ch. *Gerade* sind.

Gilt er *allgemein*?

Die dritte Dg. hat übrigens mit der ersten (und mit der zweiten) nicht nur ∞^4 ch. K., sondern sogar ∞^4 ch. Str. gemein. Es gibt also Paare von p. Dg. 1. O. im R_4 *mit ∞^4 gemeinsamen ch. Str.*, eine Möglichkeit, die, wie ich auf Grund einer schriftlichen Mitteilung annehmen darf, bisher nicht beachtet worden ist und ebenfalls weitergehende Untersuchungen erfordert.