

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915, Heft II

Mal- bis Julisitzung

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über die Ausgleichung des zukünftigen bayerischen Hauptdreiecksnetzes.

Von **Sebastian Finsterwalder.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Mai 1915.

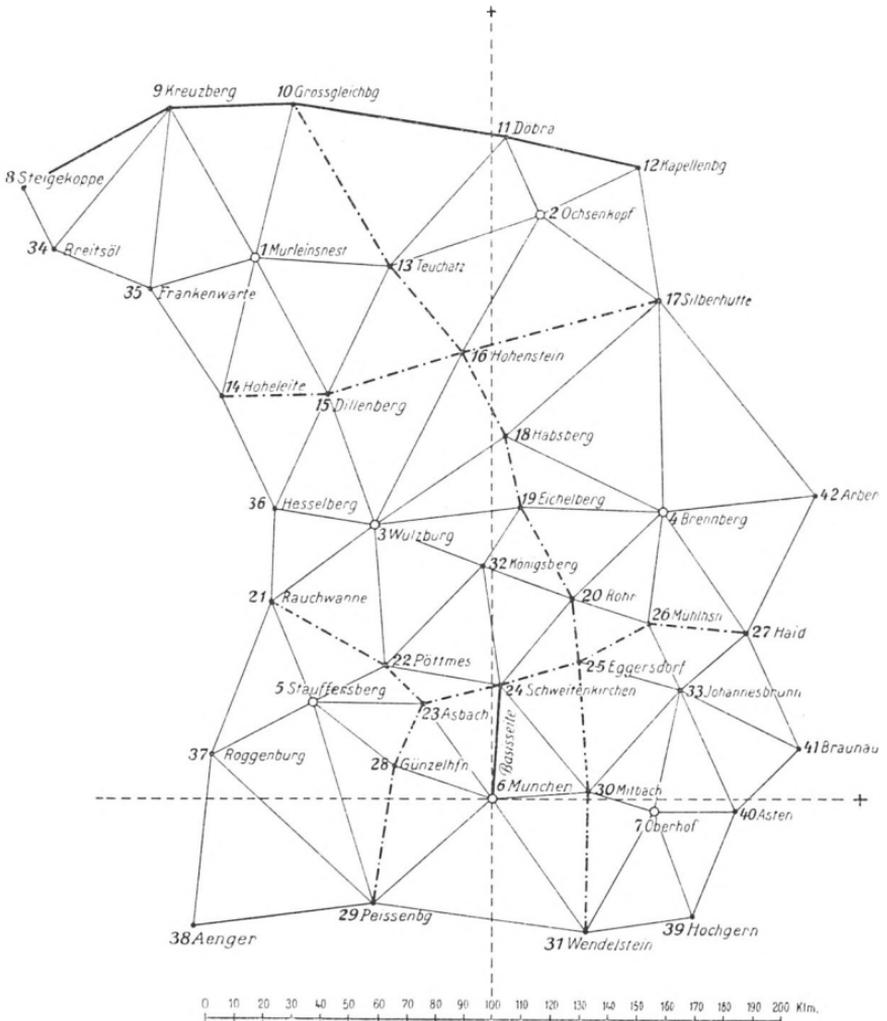
Das zukünftige bayerische Hauptdreiecknetz, welches nach den Erkundungen des K. Bayer. Katasterbureaus entworfen¹⁾ und in Fig. 1 dargestellt ist, umfaßt 42 Hauptdreieckspunkte, 62 Dreiecke, 103 Seiten und 22 innere Punkte, die zu Kranzsystemen Veranlassung geben. Im Norden hängt es mit 4 Punkten und 3 Seiten mit dem preußischen Hauptdreiecksnetz zusammen, dem noch ein Punkt (Kapellenberg) des sächsischen Dreiecksnetzes²⁾ annähernd gleichwertig angeschlossen ist, so daß ein 223 Kilometer langer Anschlußzug (Steigekoppe, Kreuzberg, Großgleichberg, Döbra, Kapellenberg) zur Verfügung steht, der eine Basismessung im Norden des Netzes überflüssig erscheinen läßt. Im Süden ist eine Basismessung vorgesehen, welche die Länge der Dreiecksseite München-Schweitenkirchen liefern soll. Das Netz ist also, obwohl es im übrigen nur eine schlichte Folge von Dreiecken ohne Diagonalen darstellt, reichlich verwickelt und seine Ausgleichung stellt auf alle Fälle eine umfangreiche Arbeit dar, die wohl überlegt sein will. Wenn das Netz als Ganzes ausgeglichen

¹⁾ Es ist hier gegenüber dem ursprünglichen Entwurf um die Punkte 8 (Steigekoppe) und 34 (Breitsöl) erweitert um eine weitere preußische Anschlußseite einbeziehen zu können.

²⁾ Vgl. diese Berichte, Jahrgang 1914, S. 241.

werden soll, so kommen vornehmlich zwei Methoden in Betracht, die zuerst besprochen werden sollen.

Die Methode der bedingten Beobachtungen. Die Beobachtungen an den 42 Stationen ergeben ebensoviele Richtungssätze mit $2 \cdot 103 = 206$ Richtungen, die durch $206 - 42 = 164$ Richtungswinkel ausgedrückt werden können. Wegen des im Norden zu übernehmenden Anschlußzuges fallen 3 von den in den mittleren Ecken sonst zu beobachtenden Winkel



weg, da diese dem Anschlußzug zu entnehmen sind. Es verbleiben also 161 beobachtete Richtungswinkel. Diese unterliegen zunächst den 62 Dreiecks-Schlußbedingungen und den 22 Kranzbedingungen. Außerdem kommen noch 4 Seitenbedingungen hinzu, welche aussagen, daß die Basis im Süden ein bestimmtes Verhältnis zu den 4 Anschlußseiten im Norden hat. Es sind also im Ganzen $62 + 22 + 4 = 88$ Bedingungen zu berücksichtigen. Dementsprechend ergeben sich ebensoviele Gleichungen für die unbekanntes 88 Korrelaten, aus denen sich die Verbesserungen der 161 beobachteten Richtungswinkel aufbauen. Die verbesserten Winkel gewährleisten dann eine widerspruchsfreie Berechnung der Seiten des Netzes und der Koordinaten der Eckpunkte.

Die Methode der vermittelnden Beobachtungen. Von den 42 Netzpunkten sind 37 neu zu bestimmen. Diese haben 74 unbekanntes Koordinaten. Letztere werden so gewählt, daß die 161 gemessenen Winkel möglichst richtig und die Seite München-Schweitenkirchen genau nach der Messung wiedergegeben werden. Mittels der letzteren Bedingung kann man eine (z. B. die nordsüdliche) Koordinate von Schweitenkirchen eliminieren, so daß 73 unbekanntes Koordinaten übrig bleiben, durch deren Wahl den 161 Beobachtungen möglichst Rechnung getragen wird. Die Zahl der Unbekanntes ist hier also nur 73 und die Unbekanntes sind das gewünschte Schlußergebnis der Ausgleichung.

Beide Arten der Ausgleichung haben ihre Vor- und Nachteile; es unterliegt aber kaum einem Zweifel, daß, so lange man nur unter ihnen zu wählen hat, im vorliegenden Falle die zweite Art den Vorzug verdient. Die Hauptrechenarbeit beruht in der Auflösung der Gleichungen für die Unbekanntes und wächst mit dem Quadrat ihrer Anzahl; diese Rechenarbeit verhält sich also in den beiden Fällen wie $88^2 : 73^2 = 7744 : 5329$. Der Umstand, daß die Bedingungsgleichungen bei der ersten Methode erheblich leichter zu bilden sind als die Fehlergleichungen bei der zweiten, hebt den Unterschied zu Gunsten der zweiten Methode nicht auf. Aber auch in der Art des Schluß-

ergebnisses ist die zweite Art der ersten überlegen, da dieses gerade in den gesuchten Punktkoordinaten besteht, wobei deren mittlere Fehler, ja wenn man will sogar die Fehlerellipsen der gefundenen Lagen der Punkte in unmittelbarem Anschluß an die Auflösung der Normalgleichungen gefunden werden können. Die erste Art liefert unmittelbar und einfach nur den mittleren Fehler der gemessenen Winkelgrößen und dient in diesem Sinne gewissermaßen nur der Befriedigung der persönlichen Eitelkeit der Messenden, ohne zugleich eine ausreichende Kritik des Ergebnisses zu ermöglichen, da die Punktlagen nicht bloß von der Genauigkeit der gemessenen Winkel, sondern in nicht minderem Grade von der Anlage des Netzes abhängen. Eine Berechnung der Koordinatenfehler, die ja an sich möglich ist, erweist sich hier wegen der großen Zahl der Korrelaten praktisch als ganz undurchführbar. Welche von den beiden Arten der Ausgleichung man auch wählen mag, stets wird die riesige Rechenarbeit in einem gewissen Mißverhältnis zu dem erzielten Schlußergebnis stehen, wenn man nämlich praktische Erwägungen als ausschlaggebend erachtet und nicht das Bewußtsein, das Beste unter dem Möglichen erreicht zu haben, als genügenden Ausgleich für die aufgewendete Arbeit ansieht. Das erwähnte Mißverhältnis liegt in der Natur der Ausgleichung aus einem Guß begründet. Gerade, weil sie den vielen auf das Ergebnis einwirkenden Umständen einzeln und unparteiisch Rechnung trägt, wird die Abhängigkeit des Ergebnisses von diesen Umständen so verwickelt, daß sie weder genau ausgerechnet, noch auch im Einzelnen durchschaut werden kann. Rein praktische Erwägungen haben in vielen ähnlichen Fällen, z. B. auch bei der Ausgleichung des alten bayerischen Hauptdreiecksnetzes durch v. Orff zu einer Teilung des Netzes (bei v. Orff in 30 Polygone) geführt, wobei das Ergebnis der Ausgleichung des einen Teils immer als Zwangsbedingung für die Ausgleichung des anschließenden Teiles eingeführt wird. Dadurch wird die Rechenarbeit auf alle Fälle sehr erheblich vermindert. Allerdings ist das Schlußergebnis abhängig von der Art der Zerlegung des Netzes und der Reihenfolge der Teile

bei der Ausgleichung. Auch verzichtet man von vorneherein auf die möglichst günstige Ausgleichung. In wieweit bei einer solchen teilweisen Ausgleichung eine ausreichende Kritik der Messungsgenauigkeit und ein genügender Einblick in die Sicherheit des Messungsergebnisses erzielt wird, hängt ganz und gar von der Anordnung der Ausgleichung ab. Es soll im folgenden ein diesbezüglicher Vorschlag gemacht werden, welcher die genannten Gesichtspunkte in befriedigender Weise berücksichtigt.

Der Vorschlag setzt voraus, daß Näherungskordinaten von den Hauptdreieckspunkten bereits bekannt sind, was für das bayerische Netz durch die Vorarbeit des Verfassers¹⁾ zutrifft. In dieser sind in gemeinsamer konformer Doppelprojektion die genauen Koordinaten der Anschlußpunkte und die genäherten Koordinaten der übrigen Netzpunkte gegeben²⁾ und es ist das System so gewählt, daß unter Beibehaltung der Gaußschen Projektionskugel die genäherten Koordinaten des nördlichen Frauenturms in München die Werte Null erhalten. Von dem preußischen System der konformen Doppelprojektion unterscheidet sich das genannte nur in der Wahl des Ausgangsmeridians, der durch München statt durch 31° öst. Ferro geht und die Zählung der Abszissen, die von München aus, statt von $52^{\circ} 42' 2.5$ n. B. aus geschieht. Das Netz wird nun durch die in Fig. 1 angedeuteten strichpunktierten Linien in 7 Felder zerschnitten und in jedem Feld ein trigonometrischer Punkt als Ausgangspunkt gewählt. Jedes Feld stellt ein einfaches Teilnetz mit wenigen Bedingungen dar; es soll ohne jeden Zwang für sich ausgeglichen werden und zwar nach der Methode der bedingten Beobachtungen. Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der in Betracht kommenden Verhältnisse.

¹⁾ Es fehlen die genäherten Koordinaten des Punktes 34 (Breitsöl); diese sind: Absc. + 198394,4, Ord. — 154145,7.

²⁾ Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern. Diese Berichte 1914, S. 259.

Nummer des Feldes	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Zahl der Dreiecke	9	6	14	9	7	7	10	62
Zahl der Zentralp.	1	1	2	1	1	1	2	9
Zahl der Bedingungsgl.	10	7	16	10	8	8	12	71
Rechenarbeit	100	49	256	100	64	64	144	777

Es werden nun mit den ausgeglichenen Winkelwerten und einem passenden Näherungswert für die Längen ausgehend von den Näherungskordinaten des gewählten Ausgangspunktes des Feldes Koordinaten aller derjenigen Punkte des zugehörigen Teilnetzes gerechnet, welche mit den preußischen Festpunkten oder mit den Grenzpunkten eines Nachbarfeldes zusammen treffen sollen. Naturgemäß entstehen dabei gegenüber den preußischen Festpunkten und an den Grenzpunkten benachbarter Felder Koordinatenunterschiede, die einer zusammenfassenden Hauptausgleichung unterzogen werden sollen. Wir denken uns dabei die einzelnen Felder unter Beibehaltung ihrer Form ähnlich verändert, verschoben und gedreht, so daß ein möglichstes Zusammenpassen der Felder untereinander und gleichzeitig ein möglichst günstiger Anschluß an die preußischen Festpunkte erfolgt. In dem 6. Feld, das die Basisseite München-Schweitenkirchen (6—24) enthält und das in seinen Abmessungen hiedurch schon bestimmt ist, soll sich die Veränderung bloß auf Verschiebung und Drehung beschränken. Da die Verschiebung des Ausgangspunktes je zwei, die Verdrehung und Maßstabänderung je eine unbekannte Größe für das Feld einführt, so sind hiernach $6 \cdot 4 + 3 = 27$ Unbekannte zu bestimmen. Die dabei notwendige Rechenarbeit wird durch $27^2 = 729$ ausgedrückt und es beziffert sich die Gesamt rechenarbeit einschließlich der in der Tabelle ausgewiesenen auf $729 + 777 = 1506$ gegenüber 7744 bzw. 5329 bei der Ausgleichung aus einem Guß. Sie kann also auf ein Fünftel bis ein Drittel von jener geschätzt werden. Ehe wir auf die weiteren erheblicheren Vorteile dieser Ausgleichung in Teilen auf-

merksam machen, soll auf die genauere Durchführung derselben näher eingegangen werden.

Von den 24 Punkten, welche bei der angegebenen Feldereinteilung auftreten, haben 4, nämlich 8, 9, 11 und 12 feste preußische Koordinaten und einfache Felderkoordinaten, die bei 8 und 9 dem Felde 1, bei 11 und 12 dem Felde 2 angehören. Man wird die Quadrate der Koordinaten-Unterschiede der Feldkoordinaten gegenüber den festen Koordinaten, oder, was auf das Gleiche hinausläuft,¹⁾ die Quadrate der Entfernungen der Feldlagen von den festen Lagen in die Fehlerquadratsumme aufnehmen. Der Punkt 10 kommt in 2 Feldern vor und ist außerdem preußischer Anschlußpunkt. Man wird das Quadrat der Entfernung des Mittels beider Feldlagen von der festen Lage in die Fehlerquadratsumme einrechnen, um seiner Eigenschaft als Anschlußpunkt an die preußische Vermessung gerecht zu werden. Als gegenseitiger Anschlußpunkt zweier benachbarter Felder wird er wie die Punkte 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31 zu behandeln sein. Man nimmt das doppelte Quadrat der Entfernung jeder der beiden Feldlagen von ihrer Mittellage in die Fehlerquadratsumme auf. Der Punkt 23 kommt in 3 benachbarten Feldern vor. Er liefert 3 Fehlerquadratsummanden, die aus den Entfernungen jeder Feldlage vom Schwerpunkt der 3 Feldlagen gebildet werden. Die Punkte 16 und 25 endlich treten in 4 verschiedenen Feldlagen auf, aus denen je 4 Bestandteile der Fehlerquadratsumme dadurch gebildet werden, daß man die Entfernung jeder Feldlage vom Schwerpunkt der 4 Feldlagen quadriert. Es setzt sich also die Fehlerquadratsumme aus folgenden Summanden zusammen: 5 Summanden infolge des preussischen Anschlusses, 17 mal 2 Summanden infolge des Auf-

1) Das gilt nur so lange, als die Entfernungen sich wie in der Ebene aus den Koordinaten-Unterschieden berechnen lassen. Bei konformen Koordinaten wird hierbei die Maßstabsänderung vernachlässigt; die bis zu $0,4 \text{ }^0/00$ betragee kann. So lange die Verschiebungen unter einigen Metern bleiben, ist das erlaubt. Eine Berücksichtigung der Maßstabsänderung begegnet keinerlei Schwierigkeiten.

tretens von ebensoviel doppelten gegenseitigen Anschlußpunkten zweier Felder, 1 mal 3 Summanden infolge des dreifachen und 2 mal 4 Summanden infolge der beiden vierfachen Anschlußpunkte. Es gibt insgesamt: $5 + 34 + 3 + 8 = 50$ Entfernungswerte oder die doppelte Zahl, wenn man die Quadrate der Koordinaten-Unterschiede zählt. Letztere Zählung schmiegt sich mehr der üblichen Bildung der Fehlergleichungen an, indem man die verbleibenden Koordinaten-Unterschiede als Verbesserungen ansieht, die an den verschiedenen Feldkoordinaten anzubringen sind, damit letztere für denselben Punkt gleiche Werte ergeben. Diese Verbesserungen sind Funktionen der 27 einzuführenden Unbekannten und ihre Quadratsumme wird durch geeignete Wahl derselben zu einem Minimum gemacht. Als Unbekannte führt man am besten ein: die Koordinaten-Verschiebungen der 7 Felder-Ausgangspunkte, welche letztere mit 1 bis 7 bezeichnet sind, die kleinen Drehwinkel, die diese Felder erfahren und 6 kleine Größen, die zur Einheit addiert, das geänderte Maßstabverhältnis der Felder 1, 2, 3, 4, 5 und 7 kennzeichnen. Feld 6 behält, wie schon erwähnt, den Basismaßstab bei. Bezeichnen wir mit x_n^m, y_n^m die Koordinaten des n^{ten} Punktes im m^{ten} Feld nach der ersten Teilausgleichung, mit $\overline{x_n^m}, \overline{y_n^m}$ dieselben Koordinaten nach der Schlußausgleichung und nennen wir die kleinen Koordinaten-Verschiebungen des Feldausgangs-Punktes dx_m, dy_m , den Drehwinkel da_m und die Streckung der Einheit dk_m , so bestehen folgende Beziehungen:¹⁾

$$\begin{aligned}\overline{x_n^m} &= x_n^m + dx_m - (y_n^m - y_m) da_m + (x_n^m - x_m) dk_m \\ \overline{y_n^m} &= y_n^m + dy_m + (x_n^m - x_m) da_m + (y_n^m - y_m) dk_m,\end{aligned}$$

x_m und y_m sind dabei die Koordinaten des Feldausgangs-Punktes vor der Hauptausgleichung $x_m + dx_m, y_m + dy_m$ nach derselben.

Die früher erwähnten $2 \times 50 = 100$ Fehlergleichungen lassen sich nun mittels obiger Differentialformeln leicht bilden.

¹⁾ Diese Formeln gelten streng nur für ebene Koordinaten. Bei konformen Koordinaten wäre wieder der Maßstabunterschied zwischen dem Ausgangspunkt und dem betrachteten Punkt zu berücksichtigen.

Einige charakteristische Gleichungen dieser Art mögen angeführt werden. Die Koordinaten der preußischen Anschlußpunkte werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Für den preußischen Anschlußpunkt 9 im Feld 1:

$$\overline{x_9^1} - \xi_9 = v_9$$

Ähnlich in y und η ; insgesamt 8 Gleichungen.

Für den preußischen Anschlußpunkt 10 in den Feldern 1 und 2:

$$\frac{1}{2}(\overline{x_{10}^1} + \overline{x_{10}^2}) - \xi_{10} = v_{10}$$

Ähnlich in y und η ; insgesamt 2 Gleichungen.

Für den gleichen Punkt 10 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 1 und 2:

$$\overline{x_{10}^1} - \frac{1}{2}(\overline{x_{10}^1} + \overline{x_{10}^2}) = v'_{10}$$

$$\overline{x_{10}^2} - \frac{1}{2}(\overline{x_{10}^1} + \overline{x_{10}^2}) = v''_{10}$$

Ähnlich in y ; insgesamt 68 Gleichungen.

Für den Punkt 23 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 3, 5 und 6:

$$\overline{x_{23}^3} - \frac{1}{3}(\overline{x_{23}^3} + \overline{x_{23}^5} + \overline{x_{23}^6}) = v_{23}$$

$$\overline{x_{23}^5} - \frac{1}{3}(\overline{x_{23}^3} + \overline{x_{23}^5} + \overline{x_{23}^6}) = v'_{23}$$

$$\overline{x_{23}^6} - \frac{1}{3}(\overline{x_{23}^3} + \overline{x_{23}^5} + \overline{x_{23}^6}) = v''_{23}$$

Ähnlich in y ; insgesamt 6 Gleichungen.

Für den Punkt 16 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 1, 2, 3 und 4:

$$\overline{x_{16}^1} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v_{16}$$

$$\overline{x_{16}^2} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v'_{16}$$

$$\overline{x_{16}^3} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v''_{16}$$

$$\overline{x_{16}^4} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v'''_{16}$$

Ähnlich in y ; insgesamt 16 Gleichungen.

Diese 100 Gleichungen werden nach den 27 Unbekannten dx_m , dy_m , da_m , dk_m geordnet und aus ihren Koeffizienten in der üblichen Weise jene der Normalgleichungen gebildet, deren

Auflösung dann die Werte der Unbekannten liefert. Die Berechnung der Gewichtskoeffizienten und der mittleren Fehler der Unbekannten, die bei ihrer mäßigen Auswahl vollständig durchgeführt werden kann, liefert dann die wertvollsten Aufschlüsse über die erzielte Genauigkeit der Lagebestimmung durch die Triangulation, indem sie die mittleren Punktfehler oder, wenn man will, auch die Fehlerellipsen von 7 über das Netz gut verteilten Punkten ergibt und außerdem noch die Sicherheit der Orientierung und der Maßstabbestimmung in den 7 um diese Punkte herumliegenden Feldern, wobei der preussische Anschluß im Norden die Ausgangsbasis für die genannte Genauigkeitsbestimmung in dem Sinne abgibt, daß die mittleren Punktfehler und Orientierungsfehler gegenüber jener als richtig angenommenen Basis zu gelten haben.

Mit den aus der Hauptausgleichung ermittelten Unbekannten werden nun die Koordinaten der den einzelnen Feldern zugehörigen Punkte korrigiert und für die Grenzpunkte zweier oder mehrerer Felder die Koordinaten gemittelt. Diese betrachtet man jedenfalls als endgiltige Werte und man hat dann außer den 5 preußischen Anschlußpunkten noch 19 weitere feste Punkte, die über das ganze Netz verteilt sind. Sind die Anschlußdifferenzen genügend klein, so kann man die 7 ausgeglichenen Ausgangspunkte eines jeden Feldes unbedenklich zu den 24 schon bestimmten Punkten hinzunehmen und die noch fehlenden Punkte mit jenen Koordinaten ansetzen, die sie nach der Hauptausgleichung in ihrem Felde haben. Sollten sich jedoch, was kaum zu erwarten ist, Anschlußdifferenzen herausstellen, die zu Bedenken Anlaß geben, so bliebe immer noch der Ausweg, an den 19 + 5 Punkten festzuhalten und die übrigen Punkte jedes Feldes durch kombiniertes Vor- und Rückwärtseinschneiden einzuschalten. Man hätte auf diese Weise im ersten Feld 3, im zweiten Feld 1, im dritten Feld 3, im vierten Feld 2, im fünften Feld 3, im sechsten Feld 1, im siebenten Feld 5 Punkte gemeinsam einzuschalten. Die betreffende Rechenarbeit wäre mit $6^2 + 2^2 + 6^2 + 4^2 + 6^2 + 2^2 + 10^2 = 232$ zu beziffern. Es würde sich damit die Ziffer

für die Gesamtrechenarbeit auf 1738 erhöhen, bliebe aber noch weit hinter der Mindestziffer 5329 einer Gesamtausgleichung aus einem Guß zurück.¹⁾

Fassen wir endlich zusammen, was sich zu Gunsten der vorgeschlagenen Ausgleichung nach 7 Feldern sagen läßt.

1. Die Rechenarbeit ist gegenüber einer Gesamtausgleichung auf ein Drittel bis ein Viertel vermindert; sie kann in jedem Felde für sich begonnen und weiter geführt werden; man braucht also nicht das Ende der Messungen abzuwarten.

2. Die zwanglose Ausgleichung der einzelnen Felder liefert einwandfreies Material zur Ermittlung der reinen Winkelmessungsfehler.

3. Aus der Zusammenfügung der Felder ergeben sich für sieben gut verteilte Punkte des Netzes die Lagen-, Orientierungs- und Maßstabfehler und damit wird eine zutreffende Kritik des eigentlichen Messungsergebnisses erzielt.

4. Das Ausgleichungsverfahren trägt insofern systematischen Charakter, als das Ergebnis desselben zwar von der Art der Feldereinteilung, nicht aber von der Reihenfolge, in der die Felder aneinandergefügt werden, abhängt. Im vorliegenden Falle ist übrigens die Art der Feldereinteilung durch die Zahl der Felder und die Rücksichten auf den preußischen Anschluß sowie die südbayerische Basismessung so gut wie festgelegt.

¹⁾ Bei der Hauptausgleichung werden auch die Koordinaten des Punktes 6 (München, nördl. Frauenturm) kleine Änderungen erfahren und nicht mehr genau gleich Null sein. Legt man wegen der alten Katasterblatt-Einteilung Wert darauf, die Koordinaten Null für diesen Punkt beizubehalten, so ist eine Transformation sämtlicher Koordinaten erforderlich, die sich jedoch bei der voraussichtlichen Kleinheit der Änderungen sehr einfach erledigen läßt.
