Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Keine der zahlreichen Darstellungen der Lieschen Geraden-Kugeltransformation[1]) läßt, das darf wohl gesagt werden, die einfachen Gedankengänge der projektiven Geometrie scharf umrissen in den Vordergrund treten, auf deren Grundlage diese durch ihre wichtigen Eigenschaften und mannigfachen Anwendungen so bekannte Berührungstransformation abgeleitet werden kann. Das hat seine geschichtlich wohl begreiflichen, auch von ganz bestimmten Lehrmeinungen und Absichten herrührenden Ursachen,[2]) auf die hier nicht eingegangen werden kann. Auf jeden Fall erscheint eine solche Ableitung berechtigt, um so mehr, wenn sie nicht nur beim Bekannten stehen bleibt, sondern sich auch mit Verallgemeinerungen befaßt, die in den bisher vorliegenden Untersuchungen zum Teil noch nicht einmal angedeutet zu sein scheinen.

Als Grundlage aus der Lehre von den Berührungstransformationen dient der Satz von Lie:[3])

Soll eine Berührungstransformation die Punkte P des Raumes $R\,(x, y, z)$ in ∞^3 Gerade s' des Raumes R' überführen,

---

[1]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I (Leipzig 1896), Kap. 10.

[2]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III (Leipzig 1893), S. 137—138.

[3]) S. Lie, Liniengeometrie und Berührungstransformationen (Leipzig, Ber. 49, 1897, S. 687—740).

und ihre Umkehrung die Punkte P' des Raumes R' in ∞^3 Gerade s des Raumes R, so bestehen, wenn dabei die Geraden s einem linearen Komplex (Nullsystem) angehören sollen, nur zwei Möglichkeiten, nämlich

1. die Geraden s' sind die Treffgeraden eines Kegelschnitts K',
2. die Geraden s' sind die Tangenten einer Fläche zweiten Grades.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß der Satz zur Konstruktion der Abbildungen in keiner Weise benützt werden kann, er weist nur auf Möglichkeiten hin, und er spricht aus, daß es außer den — wie gesagt durch rein projektive Konstruktionen herstellbaren — Abbildungen, welche diese Möglichkeiten verwirklichen, keine weiteren geben kann.

I. Die Geraden-Kugeltransformation.

Die erste Abbildung, aus der übrigens die Liesche Transformation wird, wenn der ausgezeichnete Kegelschnitt K' der imaginäre Kugelkreis ist, läßt sich in folgender Weise aufbauen.[1])

Im Gegenstandsraum R und im Bildraum R' sind je zwei Punkte A, B und A', B' gegeben. Sodann werden die Geraden h_1 durch A den Ebenen σ_1' durch A' linear („korrelativ") zugeordnet, eine Zuordnung, bei der zugleich den Ebenen σ_1 durch A die Geraden h_1' durch A' entsprechen; sie möge mit $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$ oder $(\sigma_1 \longrightarrow h_1')$ bezeichnet werden und ihre Umkehrung mit $(\sigma_1' \longrightarrow h_1)$ oder auch $(h_1' \longrightarrow \sigma_1)$. Ebenso sollen auch die Geraden h_2 durch B den Ebenen σ_2' durch B' und damit die Ebenen σ_2 durch B den Geraden h_2' durch B_1 linear zugeordnet werden, was mit $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$ bzw. $(\sigma_2 \longrightarrow h_2')$ bezeichnet wird. Diese beiden Zuordnungen sollen aber nicht völlig unabhängig voneinander sein, es wird nämlich die Beschränkung auferlegt, daß dem gemeinsamen Strahl h_0 der beiden Strahlenbündel (A) und (B) in $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$ und in $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$ beidesmal dieselbe Ebene σ_0' entspricht.

---

[1]) Vgl. hierzu Lie-Scheffers, a. a. O., S. 446 ff.

Aus $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$ und $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$ entsteht dann die zu untersuchende Punktgeraden-Verwandtschaft $(P \longrightarrow s')$ durch die folgende Vorschrift: Als Bild s' von P gilt die Schnittgerade der den Geraden h_1 (AP) und h_2 (BP) entsprechenden Ebenen σ_1' und σ_2'. Bei der Umkehrung $(P' \longrightarrow s)$ ist s der Schnitt der Ebenen σ_1 und σ_2, welche den Geraden h_1' $(A'P')$ und h_2' $(B'P')$ in $(h_1' \longrightarrow \sigma_1)$ und $(h_2' \longrightarrow \sigma_2)$ entsprechen.

Wir stellen im Anschluß hieran zunächst fest, was das Bild einer beliebigen, nicht dem System s angehörigen Geraden g ist. Verbindet man ihre Punkte P mit A und B, so erhält man zwei perspektivisch aufeinander bezogene ebene Strahlenbüschel, denen zwei projektiv aufeinander bezogene Ebenenbüschel entsprechen, deren Achsen übrigens die den Ebenen $\sigma_1 = (A, g)$ und $\sigma_2 = (B, g)$ in $(\sigma_1 \longrightarrow h_1')$ bzw. $(\sigma_2 \longrightarrow h_2')$ zugeordneten Strahlen sind. Da die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel einander in den Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades F_2' schneiden, so verwandelt demnach $(P \longrightarrow s')$ eine Gerade g in eine Fläche F_2'.

Betrachten wir dagegen eine Systemgerade s, so gehen die Achsen der F_2' erzeugenden Ebenenbüschel jetzt beide durch P', die Fläche artet also in einen Kegel aus, dessen Spitze P' ist.

Wir wollen nunmehr zeigen, daß alle Systemgeraden s' Treffgeraden eines bestimmten in σ_0' gelegenen Kegelschnittes K' sind. Jeder Ebene σ_{12}, d. h. jeder Ebene, die sowohl A wie B enthält, wird durch $(\sigma_1 \longrightarrow h_1')$ eine in σ_0' gelegene Gerade t_1', durch $(\sigma_2 \longrightarrow h_2')$ eine ebenfalls in σ_0' gelegene Gerade t_2' zugeordnet, und der Ort der Schnittpunkte ist wegen der linearen Zuordnung ein Kegelschnitt K'. Jeder Punkt P bestimmt zusammen mit A und B eine Ebene σ_{12}, und den Strahlen h_1 und h_2, welche A und B mit P verbinden, werden zwei Ebenen σ_1' und σ_2' zugeordnet, die t_1' und t_2' enthalten, die Schnittgerade s' der Ebenen ist also eine Treffgerade von K', was zu zeigen war. Durch K' gehen dann auch die Flächen F_2', welche den Geraden g in der Verwandtschaft $(P \longrightarrow s')$ entsprechen.

Betrachten wir jetzt die Umkehrung ($P' \longrightarrow s$). Es gilt wie oben der Satz, daß die Bilder der Punkte P' einer Systemgeraden s' die Schnitte entsprechender Ebenen zweier projektiven Ebenenbüschel sind, deren Achsen durch P gehen, nur artet die projektive Zuordnung jetzt in eine Perspektive aus, denn den beiden Strahlen t_1' und t_2', die den Schnittpunkt S' von s' und σ_0' mit A' und B' verbinden, ist in ($h_1' \longrightarrow \sigma_1$) und ($h_2' \longrightarrow \sigma_2$) beidesmal dieselbe Ebene σ_{12} zugeordnet, d. h. diese Ebene, welche die Achsen der projektiv zugeordneten Ebenenbüschel enthält, entspricht sich selbst. Es ergibt sich also der Satz:

Durchläuft P' eine Systemgerade s', so bilden die entsprechenden Strahlen s ein ebenes Strahlenbüschel durch P (dessen Ebene in der Folge mit τ bezeichnet werden soll).

(Beiläufig bemerkt, kann man nun noch zeigen, daß die Ebenen τ sich um eine Achse q drehen, wenn P eine Gerade g durchläuft, und dadurch tritt dann die Beziehung $P \longrightarrow \tau$ als Nullsystem deutlich hervor. Legt man nämlich durch zwei Punkte P_1 und P_2 von g die zugehörigen Ebenen τ_1 und τ_2, so schneiden sie einander in einer Geraden q, deren Punkte Q einerseits den Systemgeraden QP_1, anderseits den Systemgeraden QP_2 perspektivisch zugeordnet sind. Bei der Abbildung ($P \longrightarrow s'$) gehen P_1 und P_2 in zwei Erzeugende s_1', s_2' des Bildes F_2' von g über, die Bilder der Punkte Q aber sind ebenfalls Systemgerade s', also Treffgerade von K', die sich überdies auf s_1' und s_2' stützen, also der Fläche F_2' angehören. Jede Gerade des einen Systems von geradlinigen Erzeugenden der F_2' (d. h. die Bilder aller Punkte P), schneidet aber alle Geraden des andern Systems, und hieraus folgt, daß die Verbindungsstrahlen eines beliebigen Punktes P von g mit den Punkten Q von q lauter Systemgeraden s sind, d. h. daß τ sich um q dreht, wenn P auf g wandert.)

Ein einfaches Beispiel einer derartigen Berührungstransformation ist gegeben durch die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} x x_1 + y y_1 + 1 &= 0, \\ x y_1 + y z_1 + z &= 0, \end{aligned}$$

dessen Natur deutlicher hervortritt, wenn man statt der rechtwinkligen Koordinaten homogene $(x:y:z:t)$ einführt. Die erste Gleichung gibt die Zuordnung $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$, wobei A und A' die Koordinaten haben

$$A\ : x = y = t = 0,$$
$$A' : x_1 = y_1 = t_1 = 0,$$

und die zweite Gleichung gibt die Zuordnung $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$, wobei B und B' die Koordinaten haben

$$B\ : x = y = z = 0,$$
$$B' : y_1 = z_1 = t_1 = 0.$$

Der Geraden (h_0), nämlich:

$$x = y = 0$$

entspricht bei beiden Zuordnungen die Ebene (σ_0'), nämlich

$$t_1 = 0.$$

Die Systemgeraden s gehören hier dem Nullsystem

$$y\,dz - z\,dy - dx = 0$$

an, und die Systemgeraden s' sind die Treffgeraden des Kegelschnittes (K')

$$t_1 = 0, \qquad x_1 z_1 - y_1^2 = 0.$$

Auf bekanntem Weg[1]) findet man aus den beiden Grundgleichungen (1) dann die Darstellung der Berührungstransformation:

$$x_1 = \frac{py - 1}{1 + \lambda y}, \quad y_1 = \frac{qy - z}{\lambda y + x}, \quad z_1 = -\frac{qx + \lambda z}{\lambda y + x},$$
$$p_1 = \frac{\lambda x}{y}, \quad q_1 = \lambda y - x,$$

wobei zur Abkürzung

$$z - px - qy = \lambda$$

gesetzt ist.

[1]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen II (Leipzig 1890), S. 53.

Man braucht nun nur noch die Transformation

$$x_1 = X + iY, \quad z_1 = -X + iY, \quad y_1 = Z$$

hinzuzufügen, um eine Liesche Geraden-Kugeltransformation zu erhalten.

2. Die verallgemeinerte Geraden-Kugeltransformation.[1]

Um jetzt eine Transformation zu erhalten, welche die Punkte P in die Tangenten u' einer Fundamentalfläche zweiten Grades Σ' überführt, braucht man noch eine Punktverwandtschaft $(P' \to Q')$, die den Treffgeraden s' von K' die Tangenten u' von Σ' zuordnet $(s' \to u')$.

Eine solche Verwandtschaft erhält man in folgender Weise: Zunächst muß Σ' den Kegelschnitt K' enthalten. Jede Treffgerade s' schneidet dann Σ' noch in einem weiteren Punkt. Durch diesen Punkt denke man sich die Tangentialebene an Σ' gelegt und zum Schnitt gebracht (u') mit der Ebene, die s' und den Pol C' der Ebene σ_0' von K' in Bezug auf Σ' enthält. Diese Gerade ist Tangente an die Fläche Σ' und soll der Treffgeraden σ' entsprechen, wodurch die gewünschte Abbildung hergestellt ist. Die Umkehrung dieser Abbildung ist zweideutig, denn die durch C' und die Tangente u' gelegte Ebene schneidet K' in zwei Punkten. Die Abbildung $(s' \to u')$ ist tatsächlich eine Punkttransformation $(P' \to Q')$, denn wenn man durch einen Punkt P' alle Treffgeraden von K' legt, so entsteht ein Kegel, der Σ' in einem zweiten Kegelschnitt trifft, und die Ebenen, welche durch die Erzeugenden des Kegels und durch C' gehen, also durch P' und C', enthalten alle den auf $P'C'$ gelegenen Pol Q' der Ebene des zweiten Kegelschnitts, d. h. den Treffgeraden von K', welche P' enthalten, werden die von Q' an Σ' gelegten Tangenten zugeordnet. Wir haben das Ergebnis:

---

[1]) Vgl. Lie, a. a. O. (Anm. 3), S. 736 und F. Engel, Verzeichnis der Schriften von Lie (Bibliotheca mathematica 3 (1), 1900, S. 166—204), Nr. 83 (S. 187).

Ordnet man jedem Punkt P' des Raumes R' den Pol Q' derjenigen Ebene zu, in der der Kegelschnitt liegt, nach dem die durch P' gehenden Treffgeraden s' von K' die Fundamentalfläche Σ' zum zweiten Male schneiden, so gehen bei dieser einzweideutigen Punktverwandtschaft die Geraden s' in die Tangenten u' der Fundamentalfläche über.

Weitere Einzelheiten zur Ausführung und Begründung sind aus der folgenden analytischen Darstellung zu entnehmen, bei der wir die Koordinaten von P mit x, y, z, die von Q mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen.

Wir wählen für K' wieder den imaginären Kugelkreis und für Σ' die imaginäre Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Um die Verwandtschaft herzustellen, hat man den Kegel

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = 0$$

mit Σ' zu schneiden. Die Gleichung der (zweiten) Schnittebene ist

$$2x\xi + 2y\eta + 2z\zeta + 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

und ihr Pol Q' ist gegeben durch

$$\begin{gathered} x_1 = \lambda x, \; y_1 = \lambda y, \; z_1 = \lambda z, \\ \lambda = \frac{2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Die Umkehrung ($Q' \longrightarrow P'$) der Abbildung ist dann gegeben durch

$$x = \mu x_1, \; y = \mu y_1, \; z = \mu z_1;$$

dabei ist noch

$$1 - \mu^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 2\mu,$$

woraus die schon erwähnte Zweideutigkeit hervorgeht.

Den Treffgeraden (s')

$$y = rx + \varrho, \; z = sx + \sigma, \; (1 + r^2 + s^2 = 0$$

des imaginären Kugelkreises (K') werden die Tangenten (u')

$$x_1 : y_1 : z_1 : 1$$
$$= 2x : 2(rx + \varrho) : 2(sx + \sigma) : (1 - \varrho^2 - \sigma^2 - 2x(r\varrho + s\sigma))$$

von Σ' zugeordnet.

Wir wollen auch noch die für die Zusammensetzung der hier besprochenen Punkttransformation $(P' \to Q')$ oder $(s' \to u')$ mit der Berührungstransformation $(P \to s')$ wichtige Frage beantworten, was aus einer beliebigen K' enthaltenden Fläche zweiten Grades F'_2 bei $(P' \to Q')$ hervorgeht.

Die F'_2 hat eine Gleichung von der Form

$$F'_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d \equiv x^2 + y^2$$
$$+ z^2 + E(x, y, z) = 0,$$

und sie schneidet Σ' außer in K' noch in einem zweiten Kreis, dessen Ebene die Gleichung hat

$$E(x, y, z) - 1 = 0.$$

Das Bild von F'_2 ist gegeben durch die Gleichung

$$1 - 2\mu + \mu(ax_1 + by_1 + cz_1) + d = 0$$

in Verbindung mit

$$1 - 2\mu - \mu^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt, wenn wir $E(x_1, y_1, z_1)$ zur Abkürzung mit E_1 bezeichnen

$$(E_1 - 1)^2 - (1 + d)^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1) = 0, \quad \text{d. h.}$$

Jede F'_2, welche K' enthält, verwandelt sich bei der Abbildung $(P' \to Q')$ in eine F''_2, die Σ' längs des Kegelschnitts berührt, den F'_2 und Σ' außer K' noch gemein haben.

Denkt man sich eine nichteuklidische (in unserem Fall elliptische) Maßbestimmung mit der Fundamentalfläche Σ' eingeführt, dann sind die F'_2 als Kugeln zu deuten, also läßt sich das Ergebnis in aller Kürze so aussprechen:

Die durch Zusammensetzung von $P \to s'$ mit $s' \to u'$ entstehende einzweideutige Punktgeraden-Transformation führt die Geraden g in die Kugeln über bei geeigneter nichteuklidischer Maßbestimmung.

Diese durch Zusammensetzung entstehende „nichteuklidische Geraden-Kugeltransformation“ ist in Lie-Scheffers, Btr. f. trotz ihres einfachen Aufbaus nicht einmal erwähnt; es ist anzunehmen, daß sie in den nicht erschienenen zweiten Band Aufnahme finden sollte.

3. Entsprechende Transformationen in Räumen von höherer Dimension.

Lie hat die Frage nach Punktgeraden-Transformationen in Räumen höherer Dimension nur erwähnt,[1]) außerdem scheinen von anderer Seite[2]) nur völlig unzulängliche Versuche einer Verallgemeinerung der Geraden-Kugeltransformation vorzuliegen.

Wir wollen deshalb auf eine dieser Verallgemeinerungen eingehen, nämlich die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x x_1 + y y_1 + 1 &= 0, \\ x y_1 + y z_1 + z &= 0, \\ x z_1 + y u_1 + u &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

gegebene Berührungstransformation des R_4. Denkt man sich wieder homogene Koordinaten $(x:y:z:u:t)$ eingeführt, so erkennt man leicht die Bedeutung dieser Gleichungen. Gegeben sind in den Räumen R_4 und R_4' je drei Gerade:

$$(A): x = y = t = 0, \quad (B): x = y = z = 0, \quad (C): x = y = u = 0$$

und $$(A'): x_1 = y_1 = t_1 = 0, \quad (B'): y_1 = z_1 = t_1 = 0,$$
$$(C'): z_1 = u_1 = t_1 = 0.$$

Durch die Gleichungen (3) werden den drei Bündeln von je ∞^2 Ebenen durch A, B, C die drei Bündel von je ∞^2 linearen R_3 durch A', B', C' zugeordnet, wobei die Ebene $x = y = 0$, in der die drei Geraden A, B, C liegen, in jeder der drei Zuordnungen dem linearen R_3 $(t_1 = 0)$ zugeordnet wird, welcher A', B' und C' enthält. Das Bild von P ist die Gerade s', in der die drei R_3 einander schneiden, welche den Ebenen (PA), (PB) und (PC) zugeordnet sind. Entsprechend ist die Umkehrung $(P' \rightarrow s)$ der Abbildung zu deuten.

[1]) Lie, a. a. O. (Anm. 3), S. 740.

[2]) Vgl. den Bericht von F. Engel (Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik 30, Jahrgang 1899, S. 338–339).

Die Geraden s' sind hier die Treffgeraden der unendlich fernen Kurve dritter Ordnung (des kubischen Kegelschnittes)

$$(K'): t_1 = 0,\ x_1 z_1 - y_1^2 = y_1 u_1 - z_1^2 = z_1 y_1 - x_1 u_1 = 0.$$

Die Geraden s bilden wieder ein Nullsystem, wie oben in (1), d. h. durch jeden Punkt P gehen ∞^1 Gerade s, die wieder ein ebenes Strahlenbüschel bilden. Ihre Fortschreitungsrichtungen im Punkte x, y, z, u sind durch das nicht integrale System von Pfaffschen Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} y\,dz - z\,dy - dx &= 0, \\ y\,du - u\,dy + x\,dz - z\,dx &= 0. \end{aligned}$$

Jede Ebene
$$\begin{aligned} z &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ u &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}$$

bildet sich auf eine (dreifach ausgedehnte) F_2 ab, die (K') enthält. Insbesondere kann man (vgl. den Schluß von Nr. 1) die Transformation auch so wählen, daß sich unter den ∞^6 Bildern der Ebenen auch ∞^4 (dreidimensionale) Kugeln befinden. Man erhält damit eine (unvollständige) Ebenen-Kugeltransformation des R_4. Eine vollständige Geraden-Kugel- oder Ebenen-Kugel-Transformation ist schon deshalb unmöglich, weil die Schar der Geraden und Ebenen je sechs, die der Kugeln aber nur fünf Parameter enthält.

Genau entsprechend zu der Untersuchung in Nr. 2 kann auch im R_4 die Abbildung verallgemeinert werden zu einer Transformation, welche die Punkte P abbildet auf ∞^4 von den ∞^5 Tangenten einer dreidimensionalen F_2 oder Fundamentalmannigfaltigkeit Σ', die K' enthält.

Schon die Gestalt der Gleichungen (3) zeigt, wie man von hier aus zu bestimmten Verallgemeinerungen, zu entsprechenden Punkt-Geradentransformationen in Räumen höherer Dimension gelangen kann. Daneben besteht die Aufgabe, zunächst im R_4 einen Überblick über alle Möglichkeiten zu gewinnen, wie ihn Lie für den R_3 gegeben hat, und alle diese Möglichkeiten auch durch einfache Beispiele zu verwirklichen.