Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1920

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Untersuchungen über das Sternsystem.

Von **H. Seeliger.**

Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1920.

1.

Im Jahre 1898[1]) habe ich die Formeln aufgestellt, welche den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Verteilung der Sterne und ihrer räumlichen herstellen. Betrachtet man als feststellbare Daten die Anzahlen der Sterne verschiedener Helligkeit und ihre mittleren Entfernungen oder Parallaxen, so entstehen vier Integralgleichungen zur Bestimmung jener Funktionen, welche die wesentlichen Eigenschaften unseres Sternsystems bestimmen. Ich habe das hiedurch charakterisierte Verfahren als „statistische Methode" bezeichnet (I, S. 6). Spätere Autoren haben diese Bezeichnung in „Stellarstatistik" umgeändert und diese Benennung für das ganze Gebiet scheint sich immer mehr einzubürgern.

Eine Erweiterung meiner Ansätze, die in I nur angedeutet war, habe ich dann in II durchgeführt, indem der Einfluß einer

---

[1]) Meine im folgenden verwendeten Abhandlungen werde ich mit den Nummern I bis IV bezeichnen.

I. Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne. Abhandlungen d. Ak. d. W. München 1898.

II. Unter dem gleichen Titel. Ebenda 1909.

III. Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Sitzungsber. München 1911.

IV. Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne. Ebenda 1912.

etwaigen Absorption des Sternlichts berücksichtigt wurde. In den vier Integralgleichungen kommen als zu bestimmende Funktionen vor: ψ und D, welche die Extinktion und die räumliche Verteilungsdichte der Sterne bestimmen und als Funktionen des Ortes zu betrachten sind, ferner die „Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ der absoluten Leuchtkräfte" und eine gewisse Maximalhelligkeit H. Diese Größen haben mehrfache Proben als überall vom Ort unabhängig erwiesen. Dadurch und durch eine verhältnismäßig leicht bestimmbare Sterngröße n ist die Entfernung der Grenze des Sternsystems vom Sonnensystem gegeben. Es sind also drei Funktionen und eine Größe H zu bestimmen und es bleiben noch Kontrollen für die Zulässigkeit der gemachten Annahmen übrig. Jedenfalls ist das Hauptproblem der Stellarstatistik auf ein allerdings verwickeltes Problem der Theorie der Integralgleichungen zurückgeführt. Seine Auflösung kann indessen durch speziellere Ansätze, da es sich um eine exakte Darstellung von Daten mit sehr beschränkter Genauigkeit nicht handeln kann, genügend durch numerische Rechnungen bewältigt werden. Übrigens war es bisher ausreichend oder mußte als ausreichend angesehen werden, von der jedenfalls geringen Extinktion im allgemeinen abzusehen. Meine Ansätze gingen von der Wahrnehmung aus, daß für die helleren Sterne die Differenz $\log A_m - \log A_{m-1/2}$, wo A_m die Gesamtzahl der Sterne auf einem bestimmten Himmelsareale und zwar von den hellsten bis zu denen von der Größe m ist, so nahe konstant ist, daß eine systematische Veränderlichkeit mit m nicht mit Sicherheit festgestellt werden kann. Ich bin zu dieser Erkenntnis gelangt auf Grund der recht umständlichen Bearbeitung meiner vor vielen Jahren ausgeführten Abzählungen der in der Bonner D. M. enthaltenen Sterne, was damals (1884) das einzige zuverlässige Material war. Erst Jahrzehnte später erschien die Potsdamer Durchmusterung (P. D.), welche die Größen aller Sterne am nördlichen Himmel bis etwa zur Größe 7 enthält und an Zuverlässigkeit und Sicherheit zweifellos alle andern Arbeiten ähnlicher Tendenz übertrifft. Es ist deshalb wichtig, wie ich schon früher getan habe, darauf hinzuweisen, daß die bemerkte Tatsache durch die P. D. vollständig bestätigt wird. Die folgende kleine Tabelle für die Gesamtheit der Sterne gibt darüber Rechenschaft.

	P. D.		Sch.		Sch. — P. D.
m	$\log A\, m$	$\log a$	$\log A\, m$	$\log a$	
2.5	1.462		1.546		+ 0.084
		0.255		0.263	
3.5	1.973		2.072		99
		273		0.262	
4.0	2.246		2.334		88
		241		0.259	
4.5	2.487		2.593		106
		271		0.258	
5.0	2.758		2.851		93
		271		0.255	
5.5	3.029		3.106		77
		248		0.254	
6.0	3.277		3.360		83
		238		0.252	
6.5	3.515		3.612		97
		261		0.249	
7.0	3.776		3.861		85

Nicht viel anders gestalten sich die Vergleichungen in den einzelnen Milchstraßzonen. Aber die Differenz Sch. — P. D. zeigt nicht unerhebliche Verschiedenheiten. So ist sie z. B. für die Milchstraße um rund + 0.03 größer, was vielleicht auf die Verschiedenheit der Sternfülle auf der nördlichen und südlichen Halbkugel zurückzuführen ist. Aber es könnten auch andere Umstände mitgewirkt haben, deren weitere Untersuchung nicht ohne Interesse und Wichtigkeit wäre.

Die Potsdamer Werte von $\log A_m$ lassen wohl kaum die leiseste Andeutung eines systematischen Ganges von $\log a$ erkennen. Unter Sch. sind neuere auf photographischem Wege gewonnene Werte angeführt. Hier tritt eine Verkleinerung der $\log a$ mit zunehmendem m hervor und zwar in einer Deutlichkeit, die aufs schroffste der Genauigkeit widerspricht, welche die einzelnen Werte darbieten können, wie auch die Gegenüberstellung der an sich zweifellos viel genaueren Werte P. D. zeigt. Dieses merkwürdige Vorkommnis ist vollständig und nur dadurch erklärbar, daß die direkten Resultate der Abzählungen eine Art Ausgleichung durch Kurvenzeichnungen erhalten haben, die von bedeutender Willkür nicht frei sein kann und eine deutlich erkennbare Regelmäßigkeit vortäuscht, die trotzdem gar nicht vorhanden zu sein braucht. Ich habe schon öfters vor solchen Täuschungen durch Ausgleichungen gewarnt, die gerade bei dem vorliegenden Problem geradezu gefährlich werden können. Jedenfalls geben die Sterne bis zur Größe 7.0 die Berechtigung zur Annahme, daß $\log a$ konstant angenommen werden darf. Ob und wieweit über diesen Bezirk hinaus diese Eigenschaft besteht, ließ sich nicht mit unverminderter Sicherheit feststellen, da sowohl das in meinen früheren Rechnungen benutzte, von der D. M. dargebotene Material, als auch die benutzten photometrischen Angaben der Harvard-Revision nicht die genügende Genauigkeit darboten, sobald man Sterne von erheblich geringerer Helligkeit als von der 8. Größe heranzog. Doch war dies nicht von erheblicher prinzipieller Bedeutung, da es sich nur um den Ausgangspunkt handelte, demzufolge $\log a$ meist sehr nahe konstant anzunehmen ist und dann von einem gewissen Werte von m an zuerst langsamer, dann schneller abnimmt. Dieser Ausgangspunkt wurde auch von mir selbst korrigiert und es ist sehr merkwürdig, daß man in ziemlich leichtfertiger Kritik diese Sachlage übersehen konnte. Die gemachte Annahme über das Verhalten der $\log a$ war zu schließen aus den Resultaten aus den von mir bearbeiteten Herschelschen „Eichungen", die damals fast das einzige brauchbare Material darboten. Ein in jedem Falle brauchbarer Ansatz schien es zu sein, wenn angenommen wird, daß bis zu einem näher zu bestimmenden $m = n$ genähert $\log a$ konstant bleibt und für größere m ziemlich schnell abnimmt. Es lag nahe, ehe diese Annahme korrigiert wurde, sie als genau erfüllt anzusehen und daraus die Konsequenzen zu ziehen, zumal dies überaus leicht geschehen konnte. Es war also für $m < n$ genau

$$\log A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda - 3}{2}}, \tag{1}$$

wo h_m die zur Größe m gehörende Helligkeit ist und für $m > n$ war diese Gleichung sicher nicht gültig. Die Zahlen A_m

sind also nicht durch dieselbe analytische Formel darstellbar und zwei verschiedene Formeln werden bei $m = n$ zusammenstoßen. Interpretiert man diese als sicher vorausgesetzte Tatsache in einfachster und in gewissem Sinne allein zulässiger Weise, so läßt sich strenge beweisen, daß die räumliche Dichtigkeit $\Delta(r)$ der Sternverteilung eindeutig bestimmt ist durch die Formel:

$$\Delta(r) = \gamma r^{-\lambda}. \qquad (2)$$

Diese Formel führt aber zu Konsequenzen, die mit den mehr oder weniger sicher und zwar aus den Apexbewegungen der Sterne bestimmten mittleren Parallaxen π_m für die einzelnen Sterngrößen im Widerspruch stehen. Dieser Widerspruch ließ sich aber (III) heben, wenn man die Ausgangsannahme korrigiert. Es stellte sich dann heraus, daß der doch im allgemeinen besonders interessierende Verlauf von $\Delta(r)$ sehr nahe durch eine Formel von derselben Gestalt wie (2) dargestellt wird und nur für einige Siriusweiten kaum überschreitende Werte von r eine wesentliche Veränderung erzeugende Korrektur zu erhalten hat, daß also der Verlauf der m. Parallaxen der helleren Sterne hauptsächlich infolge der veränderten Werte Δ für kleine r von der aus (2) folgenden Formel $\pi_m = c \cdot h_m^{1/2}$ merkbare Abweichungen zeigt. Übrigens habe ich in einer späteren gelegentlichen Bemerkung[1]) gezeigt, wie man wenigstens in speziellen Fällen die Korrektur der Funktion $\Delta(r)$ auch so vornehmen kann, daß man die Formel (2) allgemein gelten läßt, aber annimmt, daß r nicht von der Sonne, sondern von einem Punkte an zählt, der um einige Siriusweiten von ihr entfernt liegt. Daraus folgt schon die im Sinne allgemeiner Betrachtungen sehr wenig erhebliche Bedeutung dieser Korrektur.

Durch die ausgeführten Betrachtungen war gezeigt, daß die Formel (2) im großen und ganzen den wahren Verhältnissen genähert entspricht und zwar war dieses Resultat fast

---

[1]) Bemerkungen über das schematische Sternsystem. A. N., Nr. 4801.

ohne Rechnung mühelos zu erreichen und das war doch immerhin ein Fortschritt, da man vorher auch nicht einmal eine ganz ungefähre Angabe über den Verlauf von Δ machen konnte. Die Konstante λ ist überall ein positiver echter Bruch, dessen Wert von der gallaktischen Breite abhängt und da am Himmel selbstverständlich nirgends beliebig große Helligkeiten vorkommen, folgt — zunächst unter der Annahme einer nicht zu großen Extinktion — die endliche Begrenzung unseres Sternsystems. Die oben erwähnte Interpretation bestand in der Annahme, daß die Leuchtkräfte i einen endlichen Wert H nicht überschreiten können oder vielmehr, daß für $i > H$, $\varphi(i)$ als unmerklich angenommen werden darf. Man kann diese Annahme, wie später gezeigt werden wird, verallgemeinern, indem man der Funktion $\varphi(i)$ bei $i = H$ einen starken Abfall oder direkt eine Unstetigkeit zuteilt. Man kann diese Annahme weiterhin durch plausible Erwägungen bekräftigen, was hier nicht näher erörtert werden soll. Dagegen muß als ganz verfehlt angesehen werden, aus einer kleinen Zahl von Sternen, bei denen man aus rein hypothetischen Gründen von vorneherein eine besonders große Leuchtkraft anzunehmen sich berechtigt fühlen mag, zu folgern, daß die Annahme eines endlichen H unzutreffend sei.

Die genannte Interpretation bietet die Möglichkeit dar, die räumliche Ausdehnung des Sternsystems zu bestimmen, ein Vorhaben, das sonst nur durch ganz vage und willkürliche Annahmen bisher ab und zu versucht wurde. Denn eine direkte Folge dieser Interpretation ist das Auftreten einer Unstetigkeit in den zweiten oder höheren Differentialquotienten von A_m, wie ich schon in I (S. 41) gezeigt habe. Umgekehrt ist eine solche Unstetigkeit kaum anders zu erklären als durch Unstetigkeiten im Verlaufe von $\varphi(i)$, wie der analytische Ausdruck für A_m ergibt. Zur Zeit meiner früheren Arbeiten war es nicht möglich, aus dem Verlaufe von A_m etwas direkt nachzuweisen, was wie eine Unstetigkeit bei m etwa gleich 9—10 zu betrachten ist. In den letzten Jahren sind nun ausführliche Ermittlungen über den Verlauf von A_m und zwar bis zu beträchtlichen Werten von m entstanden. Wenn auch die gewonnenen Resultate voraussichtlich noch bedeutende Korrekturen erfahren werden, so ist doch auf den ersten Blick zu sehen, daß in der Tat für Werte von $m = n$, wie sie ungefähr zu erwarten waren, heftige Störungen in den offenbar künstlich ausgeglichenen Resten auftreten, die doch ganz im gewünschten Sinne und sicher nicht viel anders zu erklären sind. Darauf werde ich im folgenden einzugehen haben.

Von Anfang an habe ich als Einheitsentfernung die Siriusweite eingeführt, welche der Parallaxe 0″2 entspricht. Ihre Wahl entsprang zunächst dem Wunsch, die kleinste Entfernung zur Einheit zu nehmen, in welcher noch so viele Sterne stehen, daß Mittelbildungen einen Sinn haben. Aber die getroffene Wahl entspricht auch Gesichtspunkten, die bei der Wahl von Einheiten astronomischer Größen als maßgebend gehalten werden. Der Parallaxe 0″2 entspricht eine Entfernung von 1.03 Millionen Erdbahnradien und umgekehrt 1 Million Erdbahnradien der Parallaxe 0″206. Man müßte also in der Tat in äußerster Konsequenz, wie es Herr Charlier tut, meine Bezeichnung Siriusweite festhaltend, eine solche 1 Million Erdbahnradien zuordnen. Da aber in vielen astronomischen Angaben die Parallaxen eine große Rolle spielen, wird zur Vereinfachung und der geringen Genauigkeit stellarer Entfernungsangaben entsprechend es sich empfehlen, meine Definition „1 Siriusweite = 0″2 Parallaxe“ nicht aufzugeben. In jedem Falle ist der offenbar aus dem Prinzip des Widerspruchs entsprungene Vorschlag als Einheit für stellare Entfernungen eine solche zu wählen, welche der Parallaxe 1″0 oder 0″1 entspricht, als ein ganz willkürlicher und durch nichts zu rechtfertigender anzusehen.

Ich habe die vorstehenden Auseinandersetzungen für nötig gehalten, obwohl sie nicht wesentlich über das hinausgehen, was ich besonders in den Arbeiten II und IV ausgesprochen habe, und trotzdem eine ausführliche und vortreffliche Analyse meiner Arbeiten von Dr. Deutschland[1]) vorliegt, weil vor

[1]) V. J. S. der Astr. Ges., Jahrg. 1919.

$1^1/_2$ Jahren eine Schrift[1]) erschienen ist, die es sich zur Aufgabe zu machen schien, nicht etwa nur die numerischen Resultate, sondern ihre ganze Tendenz herabzuwürdigen. Die ganze Schrift ist eine Kompilationsarbeit, deren Zusammenstellungen nirgends etwas wesentlich Neues enthalten, doch immerhin brauchbar sind. Hätte sich der Verfasser damit begnügt, so wäre seine Arbeit nicht ohne Verdienst. Er hat sich aber in, gelinde gesagt, einseitiger Kritik in Gebiete und an Fragen gewagt, die seinem Verständnis entrückt zu sein scheinen. Deshalb werde ich im folgenden auf seine Angriffe im einzelnen nur hie und da mit einer Bemerkung eingehen und es ruhig abwarten, ob der Verfasser sich besser orientieren werde. Eine allgemeine Polemik mit ihm scheint mir völlig aussichtslos zu sein.

2.

Ich gehe nun zu einigen allgemeinen Betrachtungen über die früher aufgestellten Integralgleichungen über, wobei ich mich auf die erwähnten Arbeiten, insbesondere auf die ersten Abschnitte von II beziehe.

Es sei $\varphi(i)$ die vom Ort unabhängige Häufigkeitsfunktion der Leuchtkräfte i, die also die Gleichung erfüllt:

$$\int_0^H \varphi(i)\, di = 1.$$

Ist weiter $D(r)$ die Anzahl aller Sterne in der Volumeinheit in der Entfernung r und wird eine etwaige Extinktion dadurch eingeführt, daß die scheinbare Helligkeit h eines Sternes nicht $\frac{i}{r^2}$, sondern $h = \frac{i\,\psi(r)}{r^2}$ ist, so setze man:

$$r^2 = \varrho^2\,\psi(r); \quad r = f(\varrho)$$

und

$$\varDelta(\varrho) = D[f(\varrho)] \cdot \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho}\right)^2 \cdot f'(\varrho).$$

[1]) Schouten, On the Determination of the principal laws of statistical Astronomy. Amsterdam 1918.

Dann wird die auf dem Himmelsareal ω stehende Anzahl A_m der Sterne:

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{hm}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho \cdot \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(y)\,dy; \text{ für } m < n \tag{I*}$$

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(y)\,dy; \text{ für } m > n. \tag{II*}$$

Für die mittleren Parallaxen π_m der Sterne von der Größe m findet sich:

$$\frac{\pi_m}{0''2} \cdot \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\frac{\varrho^4}{f(\varrho)}\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho; \tag{III*}$$

für $m < n$

und für $m > n$ gilt eine analoge Formel (IV*), die aus (III*) entsteht, wenn man in den Integrationsgrenzen h_n an Stelle von h_m setzt[1]). Daraus folgt u. a., daß man die räumliche Dichtigkeit D aus den Abzählungen A_m allein nicht bestimmen kann, sondern nur Δ. r_0 ist die untere Grenze, so daß im Raume $r < r_0$ keine Sterne vorkommen. Streng genommen wird der sternleere Raum begrenzt durch ϱ_0, wo $r_0 = \frac{\varrho_0}{\sqrt{\psi(\varrho_0)}}$.
H ist die größte überhaupt vorkommende Leuchtkraft, h_n die scheinbare Helligkeit der Sterne, für welche die oben erwähnte Unstetigkeit im Verlaufe des Differentialquotienten von A_m auftritt und die Entfernung der Grenze des Sternsystems in der Richtung, in welcher ω liegt, findet man durch die Formel:

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}\,\psi(r_1)}.$$

[1]) In IV S. 480 habe ich in manchen Fällen bequemere Formeln für A_m durch Umkehrung der Integrationsfolge aufgestellt.

Diese Formeln sollen nunmehr insofern verallgemeinert werden, daß, wenn jetzt $\Phi(i)$ die Verteilungsfunktion ist, $\Phi(i) = \varphi(i)$ sein soll, so lange $i < H$, dagegen $\Phi(i) = \chi(i)$, wenn $i > H$, wobei $\chi(i)$ beliebig sein kann und nicht gerade Null zu sein braucht. Dann ist:

$$\int_0^H \varphi(i)\, di + \int_H^\infty \chi(i)\, di = 1 .$$

Am einfachsten bekommt man die verallgemeinerten Formeln (I) bis (IV), wenn man für alle m

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{r_2} \varDelta(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{\infty} \Phi(y)\, dy$$

setzt. Es ist hierbei

$$r_2 = \sqrt{\frac{r_1^2}{\psi(r_1)}} = \sqrt{\frac{H}{h_n}}. \tag{1}$$

Man hat offenbar 2 Fälle zu unterscheiden:

1. $r_2 > \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, d. h. $m < n$. Hier ist:

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varDelta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{\infty} \Phi(x)\, dx + \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{r_2} \varDelta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{\infty} \Phi(x)\, dx.$$

Das erste Glied ist:

$$\omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varDelta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varDelta(r)\, r^2\, dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx,$$

im zweiten hat man einfach Φ durch χ zu ersetzen, so wird also für $m < n$

$$\frac{A_m}{\omega} = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx$$

$$+ \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{\infty} \chi(x)\, dx. \qquad \text{(I)}$$

Die rechte Seite kann man auch schreiben:

$$\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r) r^2 dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^2 dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx - \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^2 dr \int_{H}^{h_m r^2} \chi(x)\, dx$$

2. $r_2 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, d. h. $m > n$:

$$\frac{A_m}{\omega} = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx. \qquad \text{(II)}$$

Für die mittleren Parallaxen findet man nach (III*) $\pi = 0''2 \cdot \frac{Z}{N}$, wo für $m < n$

$$Z = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, \frac{r^4}{f(r)}\, \varphi(h_m r^2)\, dr + \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\infty} \Delta(r)\, \frac{r^4}{f(r)}\, \chi(h_m r^2)\, dr \qquad \text{(III)}$$

und N derselbe Ausdruck für $f(r) = 1$ wird.

2. Ist dagegen $m > n$, also $r_2 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, so wird

$$Z = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\,\frac{r^4}{f(r)}\,\varphi(h_m r^2)\,dr \tag{IV}$$

und N ist selbstverständlich derselbe Ausdruck für $f(r) = 1$.

In I S. 605 habe ich erwähnt, daß die Betrachtung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 A_m}{d h_m^2}$ zu neuen Überlegungen auffordert. Die Formeln (I) und (II) ergeben:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{dA_m}{dh_m} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\,r^4\,\varphi(h_m r^2)\,dr - \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\,r^4\,\chi(h_m r^2)\,dr$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{dA_m}{dh_m} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\,r^4\,\varphi(h_m r^2)\,dr.$$

Für die 2. Differentialquotienten ergibt sich:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{d^2 A_m}{dh_m^2} = +\tfrac{1}{2}\,\Delta\left(\sqrt{\frac{H}{h_m}}\right)\cdot\frac{1}{H}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{1/2}[\varphi(H) - \chi(H)]$$

$$- \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\,r^6\,\varphi'(h_m r^2)\,dr - \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\,r^6\,\chi'(h_m r^2)\,dr.$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{d^2 A_m}{dh_m^2} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta r\cdot r^6\,\varphi'(h_m r^2)\,dr,$$

woraus für $m = n$ folgt:

$$\frac{1}{\omega}\left\{\left(\frac{d^2 A_n}{dh_n^2}\right)_I - \left(\frac{d^2 A_n}{dh_n^2}\right)_{II}\right\} = \Delta\left(\frac{d^2 A_n}{dh_n^2}\right)$$

$$= \frac{\Delta\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)}{2H}\left(\frac{H}{h_n}\right)^{1/2}[\varphi(H) - \chi(H)]. \tag{V}$$

Die vorstehenden Formeln ergeben für $m = n$

$$(A_n)_I - (A_n)_{II} = 0; \quad \left(\frac{dA_n}{dh_n}\right)_I - \left(\frac{dA_n}{dh_n}\right)_{II} = 0$$

und im 2. Differentialquotient entsteht ein Sprung vom Betrag (V), wenn $\varphi(H) \neq \chi(H)$. Diesen Satz habe ich bereits in I, S. 605 abgeleitet. Offenbar ist es nun vorteilhaft $\log A_m$ und m einzuführen. Für jede von m abhängige Größe B ist, wenn die bekannte Zahl 0.4343 mit ε bezeichnet wird:

$$\frac{d\log B}{dm} = \frac{\varepsilon\, d(\log \operatorname{nat} A B)}{dm} = \frac{\varepsilon}{B}\frac{dB}{dm} = \frac{\varepsilon}{B}\frac{dB}{dh_m}\frac{dh_m}{dm}.$$

Weiter ist:

$$\frac{dh_m}{dm} = -\frac{0.4}{\varepsilon} h_m; \quad \frac{d^2 h_m}{dm^2} = \left(\frac{0.4}{\varepsilon}\right)^2 h_m$$

$$\frac{d^2 \lg B}{dm^2} = -\frac{\varepsilon}{B^2}\left(\frac{dB}{dh_m}\right)^2\left(\frac{dh_m}{dm}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{B}\frac{d^2B}{dh_m^2}\left(\frac{dh_m}{dm}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{B}\frac{dB}{dh_m}\frac{d^2h_m}{dm^2}$$

Es soll nun B und $\frac{dB}{dh_m}$ stetig bleiben, während $\frac{d^2B}{dh_m^2}$ einen Sprung macht, dann ist:

$$\Delta\left(\frac{d^2\log B}{dm^2}\right) = +\frac{1}{B}\cdot\frac{0.16}{\varepsilon} h_m^2 \cdot \Delta\left(\frac{d^2B}{dh_m^2}\right).$$

Nimmt man für B, $\log A_n$ und $m = n$, so wird aus (V)

$$\Delta\left(\frac{d^2\log A_n}{dn^2}\right) = \omega\,\frac{0.08}{\varepsilon A_n}\,\Delta\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)\cdot\left(\frac{H}{h_n}\right)^{3/2}\cdot H[\varphi(H) - \chi(H)]. \quad \text{(VI)}$$

Die Grenze r_1 des Sternsystems ist nach (1) gegeben durch

$$\frac{r_1^2}{\varphi(r_1)} = r_2^2 = \frac{H}{h_n}.$$

h_n kann man bei genügendem Abzählungsmaterial als bekannt voraussetzen.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}_m$ den Wert von A_m, wenn man $\frac{r^4}{f(r)}$ an die Stelle von r^4 setzt, d. h. $\frac{\Delta(r)}{f(r)}$ statt $\Delta(r)$, so hat man:

$$\frac{\pi}{0''2} = \frac{d\mathfrak{A}_m}{dh_m} : \frac{dA_m}{dh_m}.$$

Der einfacheren Schreibweise halber soll der Index m zunächst fortgelassen werden

$$\pi\frac{dA}{dh} = 0''2\frac{d\mathfrak{A}}{dh} \text{ oder } \pi A\frac{d\log A}{dm} = 0''2\,\mathfrak{A}\frac{d\log\mathfrak{A}}{dm}.$$

Differenziert man nochmals nach m, so ist:

$$\pi\frac{d\log\pi}{dm}A\frac{d\log A}{dm} = -\pi\left[\frac{dA}{dm}\cdot\frac{d\log A}{dm} + A\frac{d^2\log A}{dm^2}\right]$$
$$+\,0''2\left[\frac{d\mathfrak{A}}{dm}\frac{d\log\mathfrak{A}}{dm} + \mathfrak{A}\frac{d^2\log\mathfrak{A}}{dm^2}\right].$$

Bildet man denselben Ausdruck für $m = n$, so wird hier A, π und $\frac{dA}{dm}$ stetig bleiben, dagegen wird $\frac{d\pi}{dm}$ einen Sprung machen müssen. Bezeichnet man denselben analog dem Früheren mit $\Delta\left(\frac{d\log\pi}{dm}\right)$, so wird demnach:

$$\pi\Delta\left(\frac{d\log\pi}{dm}\right)\cdot A\frac{d\log A}{dm} = -\pi A\Delta\left[\frac{d^2\log A}{dm^2}\right] + 0''2\,\mathfrak{A}\Delta\left(\frac{d^2\log\mathfrak{A}}{dm^2}\right)$$

Nun ist nach VI

$$\mathfrak{A}_n\Delta\left[\frac{d^2\log A_n}{dn^2}\right] = A_n\Delta\left(\frac{d^2\log\mathfrak{A}_n}{dn^2}\right)\cdot f\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{d\log\pi}{dn}\right)\frac{\partial\log A_n}{\partial n} + \Delta\left(\frac{d^2\log A}{dm^2}\right)$$
$$= \frac{0''2}{\pi}\Delta\left(\frac{d^2\log A_n}{dn^2}\right)\cdot\frac{1}{f\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)},$$

was man auch schreiben kann:

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)} = \frac{\pi}{0''2}\left[1 + \frac{\Delta\left(\frac{d\log\pi}{dn}\right)\cdot\frac{d\log A_n}{dn}}{\Delta\left(\frac{d^2\log A_n}{dn^2}\right)}\right].$$

Nun war die Funktion f definiert durch

$$\varrho^2 \psi(r) = r^2; \quad r = f(\varrho) = \varrho \sqrt{\psi(r)}\,.$$

Es ist also, wenn $\varrho = \sqrt{\frac{H}{h_n}}$ gesetzt wird,

$$f(\varrho) = \sqrt{\frac{H}{h_n} \cdot \psi(r)} = r_1,$$

wenn r_1 die Entfernung der Grenze des Sternsystems in der Richtung ω ist. So ergibt sich schließlich:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\pi}{0\rlap{.}''2} \left[1 + \frac{\varDelta \left(\frac{d \log \pi}{d n} \right) \cdot \frac{d \log A_n}{d n}}{\varDelta \left[\frac{d^2 \log A}{d n^2} \right]} \right]. \tag{VII}$$

Ist also an der aus dem Verlaufe der Abzählungen erkennbaren Stelle $m = n$ die Größe des Sprunges sowohl in $\frac{d^2 \log A_m}{d m^2}$ als auch in $\frac{d \log \pi}{d m}$ ermittelt, so ergibt sich aus diesen Daten allein die Entfernung der Grenze r_1 des Sternsystems und zwar eindeutig.

Die wegen ihrer Einfachheit bemerkenswerten Formeln (VI) und (VII) sind nur anwendbar, wenn $\varphi(H) - \chi(H)$ von Null verschieden ist, also auch $\varDelta \left(\frac{d^2 \log A_m}{d m^2} \right)$. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, dann müßten die höheren Differentialquotienten untersucht werden, was indessen kaum zu einfachen Resultaten führen dürfte. Auch rechnerisch würde wohl auf diesem Wege nichts zu erreichen sein, da die dritten Differentialquotienten kaum jemals mit einiger Sicherheit festgestellt werden können. Sucht man die Integralgleichungen durch spezielle Ansätze zu integrieren, so sind die genannten prinzipiellen Schwierigkeiten, wie meine früheren Rechnungen zeigen, behoben. Bisher war es überhaupt nicht möglich, den Sprung in den Zahlen $\frac{d^2 \log A_m}{d m^2}$ direkt nachzuweisen. Ich werde später zeigen, daß dies aber nach den neuesten Abzählungsresultaten durchaus möglich erscheint. Schlimmer steht es mit den mittleren Parallaxen. Die bisher ermittelten müßten erst auf schwächere Sterne ausgedehnt werden. Dazu kommen die sicherlich vorhandenen Unsicherheiten, die meist unterschätzt werden. Man muß immer wieder im Auge behalten, daß die Bestimmung der mittleren Parallaxen namentlich der schwächeren Sterne auf keineswegs ganz einwandfreien Hypothesen beruht.

3.

Die Integralgleichungen (I) bis (IV) sollen nun für den Fall $\chi = 0$ in eine andere Form gebracht werden. Die Gleichung (I), welche für $m < n$ gilt, gibt:

$$\frac{1}{\omega}\frac{d A_m}{d h_m} = -\int\limits_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho\,.$$

Setzt man nun

$$\zeta = \sqrt{\frac{h_n}{h_m}} < 1,\ \varrho = \frac{r_1}{\sqrt{\varphi_1(r_1)}}\,\zeta x = \zeta x\sqrt{\frac{H}{h_n}}$$

$$D(\xi) = \Delta\left(\frac{r_1}{\sqrt{\varphi_1(r_1)}}\,\xi\right)\left(\frac{r_1}{\sqrt{\varphi_1(r_1)}}\,\xi\right)^4;\quad \varphi(Hx^2) = \psi(x), \qquad (1)$$

wobei die Extinktionsfunktion mit φ_1 (statt dem früheren φ) bezeichnet wird, so wird

$$\frac{1}{\omega}\frac{d A_m}{d h_m} = -r_2\,\zeta\int\limits_{\frac{r_0}{r_2\zeta}}^{1} D(\zeta x)\,\psi(x)\,dx\,.$$

Da vorausgesetzt werden soll, daß n bekannt ist, wird $-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{d A_m}{d h_m}$ eine bekannte Funktion $f_1(\zeta)$ von ζ sein. Die Gleichung (I) wird demnach:

$$f_1(\zeta) = r_2\int\limits_{\frac{r_0}{r_2\zeta}}^{1} D(\zeta x)\,\psi(x)\,dx \quad \text{für } \zeta < 1\,.$$

Hieraus:

$$\zeta \frac{d f_1}{d \zeta} = \frac{r_0}{\zeta} D\left(\frac{r_0}{r_2}\right) \psi\left(\frac{r_0}{r_2 \zeta}\right) + r_2 \int\limits_{\frac{r_0}{r_2 \zeta}}^{1} \frac{d D(\zeta x)}{d x} \cdot x \psi(x) \, d x .$$

Wendet man auf das Integral die teilweise Integration an, so wird:

$$r_2 \cdot D(\zeta) \psi(1) = \zeta \frac{d f_1}{d \zeta} + r_2 \int\limits_{\frac{r_0}{r_2 \zeta}}^{1} D(\zeta x) \frac{d [x \psi(x)]}{d x} \, d x$$

oder, wenn man $r_2 \cdot D(\zeta) \psi(1)$ mit $u(\zeta)$ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= \zeta \frac{d f_1}{d \zeta} + \int\limits_{\frac{r_0}{r_2}}^{\zeta} u(\xi) K(\zeta, \xi) \, d \xi \\ K(\zeta, \xi) &= \frac{1}{\zeta \psi(1)} \left[\psi\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta} \psi' \cdot \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (1\,a)$$

Dies ist eine Integralgleichung der zweiten Art, die bekanntlich durch die C. Neumannsche sukzessive Substitutionsmethode integriert werden kann. Die Integralgleichung (II), die für $m > n$ gilt, läßt sich ganz analog behandeln. Es ist

$$-\frac{1}{\omega} \frac{d A_m}{d h_m} = \int\limits_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(\varrho) \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2) \, d \varrho .$$

Hierin setze man $\zeta = \sqrt{\frac{h_m}{h_n}} < 1$ und $\varrho = r_2 \xi$, dann wird mit Benützung von (1)

$$-\frac{1}{\omega} \frac{d A_m}{d h_m} = f_2(\zeta) = r_2 \int\limits_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} D(\xi) \psi(\zeta, \xi) \, d \xi$$

und weiterhin:

$$\zeta \frac{d f_2(\zeta)}{d \zeta} = r_2 \int\limits_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} D(\xi) \frac{d \psi(\zeta, \xi)}{d \xi} \xi \, d \xi$$

$$= r_2 \left[D(1) \psi(\zeta) - D\left(\frac{r_0}{r_2}\right) \cdot \left(\frac{r_0}{r_2}\right) \cdot \psi\left(\zeta \frac{r_0}{r_2}\right) \right]$$

$$- r_2 \int\limits_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} \psi(\zeta, \xi) \frac{d [\xi D(\xi)]}{d \xi} d \xi .$$

Nach 1) ist aber $D\left(\frac{r_0}{r_2}\right) = \Delta(r_0) r_0^4$. Es werde nun, da dies auch bei den früheren Rechnungen geschehen ist, $\Delta(r_0) = 0$ vorausgesetzt. Man setze:

$$u(\zeta) = r_2 D(1) \psi(\zeta),$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} u(\zeta) &= \zeta \frac{d f_2}{d \zeta} + \int\limits_{\frac{r_0}{r_2} \zeta}^{\zeta} u(\xi) K(\zeta, \xi) \, d \xi \\ K(\zeta, \xi) &= \frac{1}{\zeta D(1)} \cdot \left[D\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta} D'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Bei der Aufstellung der Formel für π_m ist in Betracht zu ziehen, daß $\frac{\pi}{0''2} \frac{d A_m}{d h_m}$ als bekannte Funktion von h_m anzusehen ist. Die Formel (III) stimmt mit (I) vollkommen überein, wenn $\Delta\left(\frac{\xi}{f(\xi)}\right)$ statt $\Delta(\xi)$ gesetzt wird. Also ist $D(\xi)$ zu ersetzen durch $D_1(\xi) = \frac{D(\xi)}{f(r_2 \xi)}$ und sonst nichts zu ändern.

Man erhält so:

$$f_3(\zeta) = r_2 \int\limits_{\frac{r_0}{r_2 \zeta}}^{1} D_1(\zeta x) \psi(x) \, d x ; \quad \zeta = \sqrt{\frac{h_n}{h_m}} < 1 .$$

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= r_2 D_1(\zeta)\,\psi(1) = \zeta \frac{d f_3}{d\zeta} + \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{\zeta} u(\xi)\,K(\zeta,\xi)\,d\xi \\ K(\zeta,\xi) &= \frac{1}{\zeta\,\psi(1)}\cdot\left[\psi\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta}\,\psi'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3\,\text{a})$$

Und ebenso für die letzte Formel (IV)

$$f_4(\zeta) = r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} D_1(\xi)\,\psi(\zeta,\xi)\,d\xi$$

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= r_2 D_1(1)\,\psi(\zeta) = \zeta \frac{d f_4}{d\zeta} + \int_{\frac{r_0}{r_2}\zeta}^{\zeta} u(\xi)\,K(\zeta,\xi)\,d\xi \\ K(\zeta,\xi) &= \frac{1}{\zeta\,D_1(1)}\left[D_1\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta}\,D_1'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4\,\text{a})$$

Dieselben Formeln sind natürlich auch für $r_0 = 0$ anwendbar. Es soll diese Annahme für einen Augenblick beibehalten werden. Wie schon erwähnt, sind Integralgleichungen von der Form (1 a) — (4 a) unter der Bedingung der Endlichkeit der auftretenden Funktionen durch die C. Neumannsche Methode durch stets konvergente Reihen auflösbar. Ist:

$$u(\zeta) = \Phi(\zeta) + \int_0^{\zeta} u(\xi)\,K(\zeta,\xi)\,d\xi,$$

so hat man:

$$u(\zeta) = \Phi(\zeta) + F_0(\zeta) + F_1(\zeta) + F_2(\zeta) + \cdots,$$

wo:

$$F_n(\zeta) = \int_0^{\zeta} K(\zeta,\xi_0)\,d\xi_0 \int_0^{\xi_0} K(\xi_0,\xi_1)\,d\xi_1 \int_0^{\xi_1} K(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 \cdots$$

$$\int_0^{\xi_{n-1}} K(\xi_{n-1},\xi_n)\,\Phi(\xi_n)\,d\xi_n.$$

So ist also in (1a)

$$K(\xi_{n-1}, \xi_n) = \frac{1}{\xi_{n-1}\,\psi(1)} \left[\frac{d[x\,\psi(x)]}{d\,x}\right]_{x=\frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}}$$

In einigen speziellen Fällen läßt sich dann das vielfache Integral leicht ausrechnen, z. B. für $\Phi(\zeta) = \zeta^\nu$. Man findet dann:

$$F_n = \zeta^\nu (J_\nu)^n; \text{ wo } J_\nu = \frac{1}{\psi(1)} \int\limits_0^1 \frac{d(x \cdot \psi(x))}{d\,x}\, x^\nu\, d\,x,$$

so daß $$u(\zeta) = \zeta^\nu [1 + J_\nu + J_\nu^2 + \cdots].$$

Nur wenn $J_\nu < 1$, konvergiert die Reihe und dann ist:

$$u(\zeta) = \frac{\zeta^\nu}{1 - J_\nu},$$

was leicht verifiziert werden kann. In dem andern Fall ist die aufgestellte Reihe unbrauchbar, weil divergent. Man muß also die Voraussetzungen zur Erlangung konvergenter Reihen einhalten. In den Integralgleichungen (1a) bis (4a) muß man die untere Grenze $r_0 = 0$ ausschließen dürfen, um in den Fällen, in denen dies nicht schon an sich stattfindet, eventuell zu erreichen, daß $K(\xi_{n-1}, \xi_n)$ für alle n im ganzen Integrationsintervall endlich bleibt. Gleiches soll von $u(\zeta)$ und selbstverständlich auch von Φ vorausgesetzt werden. Die vier Integrale sind entweder von der Form:

$$\int\limits_{a_m}^{\xi_m} P\,d\,\xi \text{ oder } \int\limits_{b\,\xi}^{\xi_m} P\,d\,\xi,$$

wobei a und b kleine konstante Größen sind und P endliche Funktionen. Ist der Maximalbetrag etwa Q, so ist im ersten Falle:

$$F n < Q \frac{(\xi - a)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

im zweiten:

$$F n < \frac{Q(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{n+1})}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

und die für $u(\zeta)$ aufgestellte Reihe konvergiert für alle Werte von ζ. Die Funktionen $u(\zeta)$ sind dann bekanntlich eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich also, daß durch die vier Integralgleichungen $r_2 D(\zeta)$ eindeutig durch $\varphi(\zeta)$ gegeben ist, ferner $r_2 \varphi(\zeta)$ eindeutig durch $D(\zeta)$ und ebenso $r_2 D_1(\zeta)$ durch $\varphi(\zeta)$ und $r_2 \varphi(\zeta)$ durch $D_1(\zeta)$. Es sind also immer gewisse Gruppen der 3 Funktionen $D(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ und $f(\zeta)$ als zusammengehörig zu betrachten, was man auch ohne die Reduktion auf die zuletzt abgeleiteten Formen direkt leicht einsehen kann. Die vier Integralgleichungen liefern demnach außerdem eine Kontrolle für die zu Grunde gelegten Annahmen. Wenn die Extinktion vernachlässigt wird, so werden schon die drei ersten Gleichungen eine gewisse Überbestimmtheit zeigen, so daß die gegebenen Funktionen f_1, f_2, f_3 nicht beliebig sein dürfen. Der Erfolg der früheren Rechnungen hat, so weit dies durchführbar war, ergeben, daß in der Tat die Beobachtungsresultate genügend dargestellt werden können und es wird später gezeigt werden, daß dies auch für das neue Material zutrifft.

Die letzte Umformung der Integralgleichungen und ihre Auflösung durch das Neumannsche Verfahren wird im allgemeinen, wie es scheint, zu überaus verwickelten Rechnungen führen und man wird nach wie vor durch spezielle Ansätze sich zu helfen trachten müssen. Auch läßt sich nicht ohne weiteres die Eindeutigkeit der Gesamtlösung auf diesem Wege beweisen. Es ist bei solchen Versuchen entschieden einfacher, auf die Gleichungen zurückzugehen, die vor der teilweisen Integration aufgestellt wurden. Dabei soll $r_0 = 0$ gesetzt werden, so daß wir nunmehr haben, indem r_2 mit D bzw. D_1 vereinigt wird.

$$\left.\begin{aligned}
f_1(\zeta) &= \int_0^1 D(\zeta x)\, \varphi(x)\, dx \\
f_2(\zeta) &= \int_0^1 D(x)\, \varphi(\zeta x)\, dx \\
f_3(\zeta) &= \int_0^1 D_1(\zeta x)\, \varphi(x)\, dx \\
f_3(\zeta) &= \int_0^1 D_1(x)\, \varphi(\zeta x)\, dx
\end{aligned}\right| \qquad \text{(A)}$$

Es könnte vielleicht zweifelhaft erscheinen, ob auch für diese Gleichungen der Satz gilt, daß, wenn überhaupt, nur ein System von zugehörigen Funktionen D, D_1, ψ existiert. Es ist sehr leicht, dies nachzuweisen. Denn gehörten zu einem bestimmten positiven ψ zwei Funktionen D und $\varDelta$, so würde z. B. aus der ersten Gleichung folgen, wenn $D(\xi) - \varDelta(\xi) = \sigma(\xi)$ gesetzt wird.

$$0 = \int_0^1 \sigma(\zeta x)\,\psi(x)\,dx$$

für alle $0 \leq \zeta \leq 1$. Daraus folgert man strenge, nach dem Verfahren, welches ich in II, S. 14 angewandt habe, $\sigma = 0$.

Der Beweis, daß, mathematisch gesprochen, nur eine Lösung der vier Gleichungen vorhanden ist, läßt sich führen, wenn die unbekannten Funktionen als eindeutig fortsetzbare analytische angenommen werden. Im folgenden wird es sich um wiederholte Ausführungen von Differentiationen und Anwendung der teilweisen Integration handeln. Es soll dann der Kürze wegen $\frac{d^n \Phi(x)}{dx^n}$ für $x = 1$ mit $\Phi^{(n)}$ bezeichnet werden. Ferner soll eine eindeutig bestimmte Größe mit den deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc. gekennzeichnet werden, wodurch nur diese eindeutige Bestimmtheit ausgedrückt werden soll. Weiterhin ist von den folgenden Beziehungen für beliebige Funktionen Gebrauch gemacht worden:

$$\frac{d\Phi(\zeta x)}{d\zeta} = \Phi'(\zeta x)\cdot x; \quad \frac{d\Phi(\zeta x)}{dx} = \Phi'(\zeta x)\cdot\zeta,$$

d. h.
$$\frac{d\Phi(\zeta x)}{d\zeta} = \frac{d\Phi(\zeta x)}{dx}\cdot\frac{x}{\zeta}$$

ebenso ist:

$$\frac{d^2\Phi(\zeta x)}{d\zeta^2} = \Phi''(\zeta x)\,x^2; \quad \frac{d^2\Phi(\zeta x)}{dx^2} = \Phi''(\zeta x)\,\zeta^2$$

und allgemein:

$$\frac{d^n\Phi(\zeta x)}{d\zeta^n} = \frac{d^n\Phi(\zeta x)}{dx^n}\cdot\frac{x^n}{\zeta^n}.$$

Hieraus ergibt sich durch die angedeutete Anwendung von Differentiationen und partieller Integration:

1. $D\psi = f_1 + f_1' + f_2'$
2. $D'\psi - D\psi' = 2f_1' - 2f_2' + f_1'' - f_2''$
3. $D''\psi - D'\psi' + 3D\psi' + D\psi'' = f_1''' + 3f_1'' + 6f_2' + 6f_2'' + f_2'''$
4. $D''\psi - D'\psi' + 3D'\psi + D\psi'' = f_1''' + 6f_1'' + 6f_1' + 3f_2'' + f_2'''$.

Diese Formeln ergeben sich durch Differentiation der ersten beiden Formeln (A). Ebenso findet man aus der 3. und 4. Gleichung (A):

1'. $D_1\psi = f_3 + f_3' + f_4'$
2'. $D_1'\psi - D_1\psi' = 2f_3' - 2f_4' + f_3'' - f_4''$
3'. $D_1''\psi - D_1'\psi' + 3D_1\psi' + D_1\psi'' = f_3''' + 3f_3'' + 6f_4' + 6f_4'' + f_4'''$
4'. $D_1''\psi - D_1'\psi' + 3D_1'\psi + D_1\psi'' = f_3''' + 6f_3'' + 6f_3' + 3f_4'' + f_4'''$.

Aus den obigen Betrachtungen (S. 107) folgt, wenn, wie jetzt geschieht, D und D_1 statt $r_2 D$ und $r_2 D_1$ gesetzt wird, daß $D_1(\zeta)$ eindeutig gegeben ist durch $D(\zeta)$. Schreibt man also:

$$D_1(\zeta) = D(\zeta) \cdot \mathfrak{A},$$

so folgt:

$$D_1^{(n)} = \mathfrak{A}\, D^{(n)} + n\,\mathfrak{A}'\, D^{(n-1)} + \binom{n}{2} \mathfrak{A}''\, D^{(n-2)} + \cdots \mathfrak{A}^{(n)}\, D,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \mathfrak{A}\, D \\ D_1' &= \mathfrak{A}\, D' + D\mathfrak{A}' \\ D_1'' &= \mathfrak{A}\, D'' + 2\mathfrak{A}'D' + \mathfrak{A}''\, D. \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\psi'' + 3\psi'$, $-\psi'$ und ψ und addiert, so wird nach 3')

$$\mathfrak{A}\, D''\psi + D'(2\mathfrak{A}'\psi - \mathfrak{A}\psi') + D(\mathfrak{A}''\psi - \mathfrak{A}'\psi' + \mathfrak{A}\psi'' + 3\mathfrak{A}\psi') = \mathfrak{B}.$$

Dividiert man durch $D_1\psi = D\mathfrak{A}\psi$ = einer Größe von der Art $\mathfrak{A}$, so hat man also:

$$D_1 \varphi = \mathfrak{A} D \varphi$$

$$\frac{D''}{D} + \frac{D'}{D}\left[2\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} - \frac{\varphi'}{\varphi}\right] + \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi''}{\varphi} + 3\frac{\varphi'}{\varphi} = \mathfrak{B}_1,$$

während 3. gibt:

$$\frac{D''}{D} - \frac{D'}{D}\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi''}{\varphi} + 3\frac{\varphi'}{\varphi} = \mathfrak{C}.$$

Durch Subtraktion ergibt sich:

$$2\frac{D'}{D}\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}\frac{\varphi'}{\varphi} = \mathfrak{A}_1.$$

Danach ist also auch:

$$2\frac{D'}{D} - \frac{\varphi'}{\varphi} = \mathfrak{B}$$

und da nach 2. $\frac{D'}{D} - \frac{\varphi'}{\varphi}$ eindeutig bekannt ist, ist es auch $\frac{D'}{D}$ und $\frac{\varphi'}{\varphi}$.

Wenn man also bis f''' fortgeschritten ist, sind

$$D\varphi, \quad \frac{D'}{D}, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{D''}{D} + \frac{\varphi''}{\varphi}$$

als eindeutig bestimmt erkannt und dieselben Größen, wenn D_1 an Stelle von D gesetzt wird. Es soll nun folgender Satz bewiesen werden:

Wenn bei Benützung der Differentialquotienten f' bis $f^{(n-1)}$ als eindeutig bestimmt die Größen

$$\frac{D'}{D}, \frac{D''}{D} \cdots \frac{D^{(n-3)}}{D}, \quad \text{ferner } D\varphi, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} \cdots \frac{\varphi^{(n-3)}}{\varphi}$$

und
$$\frac{D^{(n-2)}}{D} + (-1)^{n-2}\frac{\varphi^{(n-2)}}{\varphi}$$

erscheinen und dasselbe auch für D_1 gilt, so sind durch die weiteren Differentialquotienten $f^{(n)}$ auch die Größen

$$\frac{D^{(n-2)}}{D}, \quad \frac{\varphi^{(n-2)}}{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{D^{(n-1)}}{D} + (-1)^{n-1}\frac{\varphi^{(n-1)}}{\varphi} \quad \text{bestimmt.}$$

Allgemein ist:

$$\zeta^n f_1^{(n)}(\zeta) = \int_0^1 \frac{d^n D(\zeta x)}{d x^n} \cdot x^n \varphi(x)\, d x$$

$$= D^{(n-1)}(\zeta)\, \varphi(1) - \int_0^1 \frac{d^{n-1} D(\zeta x)}{d x^{n-1}} \cdot \frac{d[x^n \varphi(x)]}{d x}\, d x$$

und wenn man diese Operation weiter fortführt und dann $\zeta = 1$ setzt:

$$f_1^{(n)} = D^{(n-1)} \cdot \varphi - D^{(n-2)} \cdot \frac{d[x^n \varphi(x)]}{d x}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + D^{(n-3)} \cdot \frac{d^2[x^n \varphi(x)]}{d x^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot D \frac{d^{n-1}[x^n \varphi(x)]}{d x^{n-1}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + (-1)^n \int_0^1 D \frac{d^n [x^n \varphi(x)]}{d x^n}\, d x.$$

Ferner ist:

$$\frac{d^m [x^n \varphi(x)]}{d x^m} = n(n-1)\ldots(n-m+1)\, x^{n-m} \varphi(x)$$

$$+ \binom{m}{1} n(n-1)\ldots(n-m+2)\, x^{n-m+1} \varphi'(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \binom{m}{m-1} n \cdot 1 \quad x^{n-1} \varphi^{(m-1)}(x)$$

$$+ \binom{m}{m} \cdot 1 \quad x^n \varphi^{(m)}(x).$$

Nach der 2. Integralgleichung A) ist aber

$$f_2^{(p)} = \int_0^1 D(x)\, x^p \frac{d^p \varphi(x)}{d x^p},$$

also eine 𝔄-Größe. In dem Ausdruck für $f_1^{(n)}$ kann man voraussetzungsgemäß als bekannt fortlassen alle Größen $\Delta^{(p)} \varphi^{(q)}$, wenn p und $q < n-3$. Außerdem ist $D^{(n-2)} \varphi + (-1)^{n-2} \varphi^{(n-2)}$ als bekannt anzusehen. Der gefundene Ausdruck für $f_1^{(n)}$ sagt also aus, daß:

$$\begin{aligned} & D^{(n-1)}\psi - D^{(n-2)}[n\cdot\psi + \psi'] + (-1)^{n-2} D'\psi^{(n-2)} \\ & \quad + (-1)^{n-1} D[n(n-1)\psi^{(n-2)} + \psi^{(n-1)}] \end{aligned} \tag{α}$$

eine $\mathfrak{A}$-Größe ist. Dieselbe Formel gilt, wenn man D mit D_1 vertauscht. Nach der obigen Formel (γ) haben wir in (α) dann, wieder mit Fortlassung der $\mathfrak{A}$-Größen, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} D_1^{(n-1)}\psi &= \mathfrak{A}\, D^{(n-1)}\psi + \binom{n-1}{1}\mathfrak{A}'\, D^{(n-2)}\psi \\ D_1^{(n-2)}\psi &= \mathfrak{A}\, D^{(n-2)}\psi \\ D_1^{(n-2)}\psi' &= \mathfrak{A}\, D^{(n-2)}\psi' \\ D_1'\psi^{(n-2)} &= \mathfrak{A}\, D'\psi^{(n-2)} + \mathfrak{A}'\, D\psi^{(n-2)} \\ D_1\psi^{(n-2)} &= \mathfrak{A}\, D\psi^{(n-2)} \\ D_1\psi^{(n-1)} &= \mathfrak{A}\, D\psi^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Die Formel (α) kann man übersichtlicher schreiben:

$$\begin{aligned} & (D^{(n-1)}\psi + (-1)^{n-1} D\psi^{(n-1)}) - n\, D^{(n-2)}\psi \\ & + (-1)^{n-1}\cdot n(n-1) D^{(n-2)}\psi - D^{(n-2)}\psi' + (-1)^{n-2} D'\psi^{(n-2)} = \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Benützt man die Formeln (β) und dividiert durch $\mathfrak{A}$, so ergibt sich für gerade n

$$\begin{aligned} & (D^{(n-1)}\psi - D\psi^{(n-1)}) - (D^{(n-2)}\psi' - D'\psi^{(n-2)}) \\ & + D^{(n-2)}\psi\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}(n-1) - n\right) + D\psi^{(n-2)}\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} - n(n-1)\right) = \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Da aber $D^{(n-2)}\psi + D\psi^{(n-2)} = \mathfrak{B}$ sein soll, so ist nunmehr:

$$\begin{aligned} & (D^{(n-1)}\psi - D\psi^{(n-1)}) - (D^{(n-2)}\psi' - D'\psi^{(n-2)}) \\ & \quad - D\psi^{(n-2)}(n-2)\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} + n\right) = \mathfrak{B} \end{aligned}$$

und ebenfalls für gerade n ergibt (β):

$$\begin{aligned} & (D^{(n-1)}\psi - D\psi^{(n-1)}) - (D^{(n-2)}\psi' - D'\psi^{(n-2)}) \\ & \quad - D\psi^{(n-2)}\cdot n(n-2) = \mathfrak{B}_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $D\psi^{(n-2)}$ und also auch $D^{(n-2)}\psi$ bekannt sind und schließlich auch $D^{(n-1)}\psi - D\psi^{(n-1)}$. Der angekündigte Satz ist damit bewiesen, da für ungerade n eine ganz ähnliche Rechnung zu machen ist. Der Verlauf der analytisch fortsetzbaren Funktionen D, D_1 und ψ ist also vollkommen gegeben durch die Werte $D(1)$, $D_1(1)$ und $\psi(1)$. Außerdem sind, wie wir gesehen haben, D_1 und D eindeutig bestimmt durch $\psi(1)$. Dies ist eine Konstante. Man hat noch zu beachten, daß die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ so gewählt war, daß $\int\limits_0^{\pi} \varphi(i)\,di = 1$ angesetzt wurde. Außerdem ist auf die Betrachtungen des Artikels 2 zu verweisen, nach welchem gerade die Grenze des Sternsystems r_1 eindeutig durch den Betrag des Sprunges in den 2. Differentialquotienten von A und π bestimmt wurde.

4.

Die Annahme, daß in den Sternzahlen bei einer bestimmten Größe $m = n$ irgend eine Unstetigkeit auftritt, war an sich naheliegend, wenn für die hellen Sterne $\log a$ wirklich konstant war (was auch nach dem neuen Material der Fall ist), während für größere m ein wesentlich kleinerer Wert herauskam. Denn dann könnte sicher A_m nicht durch eine einzige analytische Formel für alle m dargestellt werden. Solche rein mathematischen Kriterien lassen sich an einem empirisch gegebenen Material nicht strenge nachweisen, insbesondere da dieser Nachweis, wie ich stets hervorgehoben habe, eine recht hohe Genauigkeit der Abzählungsresultate voraussetzen muß, die früher nicht erlangt werden konnte und auch jetzt noch keineswegs genügend weit gediehen ist. Man konnte früher nicht mehr zu erreichen hoffen als den Nachweis, daß die Annahme von Diskontinuitäten mit den empirischen Daten nicht in Widerspruch stand. Meinen früheren Rechnungen lagen nur die Resultate aus den Abzählungen nach der Bonner D. M. in Verbindung mit photometrischen Messungen der Harvard-Sternwarte zu Grunde, die beide von systematischen Ungenauigkeiten nicht frei sind, und den Herschelschen Eichungen. Ich habe selbst immer wieder auf die große Lücke hingewiesen, die zwischen etwa den Größen 9 bis 13 klafft, wo gerade die

Entscheidung über die Zulässigkeit verschiedener Annahmen liegt. Diese Lücke ist, wie schon erwähnt, neuerdings durch Beobachtungen auszufüllen versucht worden, deren Resultate Herr Schouten zusammengestellt hat. Er hat ebenfalls die Abzählungsresultate, wie ich es getan habe, nach Milchstraßenzonen geordnet, nur hat er, wohl recht unnötigerweise, die Milchstraßenzone mit I und die den Pol der Milchstraße enthaltende mit V bezeichnet, während bei mir die Reihenfolge der Nummern umgekehrt war. Sicher ist, daß dieses neue Material noch ziemlich deutlich hervortretende systematische und zufällige Ungenauigkeiten enthält, deren Beurteilung nicht gerade erleichtert wird durch den Umstand, daß die als „beobachtet" gegebenen Anzahlen schon eine zum Teil durchgreifende Ausgleichung erfahren zu haben scheinen, die selbstverständlich nicht ohne gewisse Annahmen geleistet werden kann. Ich habe vor solchen weit ausholenden Ausgleichungen stets gewarnt, weil hiedurch gewisse für die Interpretation wichtige reale Schwankungen verdeckt werden können. Es ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, daß im vorliegenden Falle diese Verdunkelung nicht vollkommen zustande gekommen ist, denn die Zahlen A_m deuten sehr bestimmt auf eine Schwankung für $m = 9 - 10$ hin, die ganz ähnlich verläuft, wie eine Unstetigkeit im 2. Differentialquotienten erfordert. Es ist nur durch die vorgefaßten Meinungen, die Herrn Sch. offenbar bei seinen Zusammenstellungen geleitet haben, erklärlich, daß er nicht selbst diese Vorkommnisse bemerkt hat. Zuerst möchte ich eine Bemerkung mitteilen, die sofort in die Augen fällt und die auch Herrn Deutschland selbstverständlich nicht entgangen ist. Der a. a. O. gemachte Versuch, die Zahlen $\log A_m$ bis $m = 15$ oder 16 durch e i n e quadratische Form von m darzustellen, muß als vollkommen gescheitert angesehen werden. Die Abweichungen weisen so enorme Beträge auf und zeigen einen so ausgesprochenen systematischen Gang, daß schon die Mitteilung solcher Versuche Verwunderung erregen muß, wenn nicht gleich die Unzulässigkeit solcher Ansätze hervorgehoben wird. Vielmehr ist auf den ersten Blick zu sehen, daß man zwei verschiedene Formeln annehmen muß, von denen die eine bis zu einem gewissen Wert $m \leqq n$ und die andere für $m > n$ gültig ist. Im Sinne meiner Annahmen müßte eine solche quadratische Form für $m > n$, wenn n die die Grenze des Sternsystems bestimmende Größe ist, einen wesentlich verschiedenen Koeffizienten von m^2 aufweisen wie für $m < n$, während die beiden andern Koeffizienten übereinstimmen müßten. Das letztere ist natürlich eine ideale Forderung, die ebensowenig absolut genau erfüllt zu sein braucht, wie auch die gemachten Annahmen nicht genau erfüllt sein werden. Tatsächlich gelangt man selbst unter diesen sehr einschränkenden Bedingungen zu einer ganz genügenden Darstellung. Es soll dies für die auf dem ganzen Himmel vorhandenen Sternzahlen A_m auf einem Quadratgrade gezeigt werden. Ohne auf eine möglichst gute Darstellung Bedacht zu nehmen, ergab eine beiläufige Rechnung die Formel:

$$f = \log A_m = +0.764 + 0.4700\,(m-9.5) - 0.0048\;(m-9.5)^2 \quad \ldots\; m < 9.5$$

$$= +0.764 + 0.4700\,(m-9.5) - 0.01734\,(m-9.5)^2 \quad \ldots\; m > 9.5.$$

Die Übereinstimmung mit den „beobachteten“ Werten Sch. ergibt die folgende Tabelle:

m	f	Sch.	Δ	m	f	Sch.	Δ
2.0	− 3.031	− 3.020	+ 11	9.5	+ 0.764	+ 0.764	0
2.5	− 2.761	− 2.755	+ 6	10.5	+ 1.217	+ 1.212	− 5
3.5	− 2.229	− 2.229	0	11.5	+ 1.635	+ 1.629	− 6
4.5	− 1.706	− 1.708	− 2	12.5	+ 2.018	+ 2.011	− 7
5.5	− 1.193	− 1.195	− 2	13.5	+ 2.367	+ 2.366	− 1
6.5	− 0.689	− 0.689	0	14.5	+ 2.681	+ 2.693	+ 12
7.5	− 0.195	− 0.194	+ 1	15.5	+ 2.960	+ 3.008	(+ 48)
8.5	+ 0.289	+ 0.290	+ 1				

Die Verschiedenheiten der Koeffizienten von m^2 in beiden Formeln erzeugt für $m = 14.5$ bereits 0.314, also ein gänzlich abweichendes Resultat. Noch ist zu bemerken, worauf ich noch zurückkommen werde, daß eine genauere Verfolgung dieser Umstände zunächst nicht möglich ist, was leider weitere

Betrachtungen sehr erschwert und unsicher macht, weil nämlich bei ungefähr $m = 9.5$ eine offenbar aus der Art der Bearbeitung entstandene Ungleichförmigkeit und zwar in allen Zonen vorhanden ist. Man kann z. B. nicht sagen, ob nicht bei $m > 9.5$ für alle $\log A_m$ eine konstante Korrektion von etwa $+ 0.030$ anzunehmen ist. Doch scheint dies nicht unwahrscheinlich zu sein. In der obigen Tabelle habe ich diese Korrektion zu $+ 0.027$ angenommen. Die Größe dieser Korrektion, deren Notwendigkeit an sich kaum zu bezweifeln ist, hat aber großen Einfluß auf die Übereinstimmung mit Resultaten, die auf anderem Wege erreichbar sind. Die genannte Korrektion scheint auch angedeutet in den Abzählungen, die Herr Nort nach den Harvard-Beobachtungen gemacht hat. Dort findet sich für $m = 11.0$, $\log A_m = 1.417$, während Sch. 1.395 angibt. Doch dürfte die Sachlage keineswegs klar liegen. In jedem Falle ist, wie aus der folgenden Tabelle der Sch.-Werte hervorgeht, bei $m = 9.5$ eine auffallende Störung vorhanden, die, von allen Hypothesen abgesehen, eine Aufklärung erfordert, und es wäre dringend erwünscht, gerade die Anzahl der Sterne von der Größe 9.0 oder 9.5 ab bis 10.5 einer genauen Revision zu unterwerfen. Auch die Gleichmäßigkeit der Störung in allen Zonen deutet darauf hin, daß hier in der Bearbeitung nicht die nötige Unabhängigkeit der Feststellungen in verschiedenen Himmelsteilen gewaltet hat. Es unterliegt keinem Zweifel, daß genauere Feststellungen gerade an der bezeichneten Stelle von größter Wichtigkeit sind, wenn sie auch gegenwärtig noch nicht durchführbar sind. Wenn sie trotzdem mit aller Reserve durchgeführt werden sollen, so geschieht dies in der Absicht, die Anforderungen, die an das Material zu stellen sind, genauer zu präzisieren und zu zeigen, wie die Durchführung der Rechnung nach den von mir aufgestellten Gesichtspunkten zu erfolgen hat.

Überblickt man die Zahlen der Werte $\log A_m$, so geht, und das ist zunächst das Wichtigste, mit der größten Deutlichkeit hervor, daß in der Gegend $m = 9.5$ etwa eine plötzliche Veränderung im 2. Differentialquotienten stattfindet. Es ist ganz natürlich, daß diese Tatsache besonders in den sternreicheren Zonen wohl außer Zweifel gestellt ist, was ja auch die obige Betrachtung über die Zahlen für alle Sterne ergibt. Die zweiten Differenzen, die durchweg negativ sind, sind für $m < 9.5$ insbesondere in der Nähe der kritischen Stelle dem absoluten Werte nach stets kleiner wie nachher und der Übergang ist sehr rasch und fast sprunghaft. Den Betrag dieses Sprunges abzuleiten ist natürlich insbesondere deshalb erschwert, weil eben, wie erwähnt, an der kritischen Stelle noch eine andere Störung stattgefunden hat, die nicht zweifellos feststellbar ist. Um wenigstens einen ungefähren Überblick zu gewinnen, habe ich das selbstverständlich nicht ganz einwandfreie Verfahren eingeschlagen, das aber den Vorteil hat, von der unsicheren Störung einigermaßen unabhängig zu sein, daß ich das Mittel M_- von 4 zweiten Differenzen vor und M_+ von 4 solchen nach der kritischen Stelle bildete. Die Differenz der beiden M gibt dann, mit 4 multipliziert, den Sprung Δ im 2. Differentialquotienten.

Zone	M_-	M_+	Δ
V	— 0.00125	— 0.00875	+ 0.030
IV	— 0.00238	— 0.00850	+ 0.025
III	— 0.00375	— 0.00875	+ 0.020
II	— 0.00525	— 0.01025	+ 0.020
I	— 0.00675	— 0.01100	+ 0.017
alle Sterne	— 0.00250	— 0.00850	+ 0.024

Die Zahlen sind recht sicher mit Ausnahme der für die Zonen I und II. Für alle Sterne stimmt Δ übrigens überein mit dem Resultat der oben gegebenen Interpolationsformeln, wie zu erwarten war. Indessen mögen die Werte Δ in Wirklichkeit merklich größer sein, wenn es sich bestätigen sollte, daß man von $m = 9.5$ ab eine konstante Korrektion, die zu bestimmen ist, einführen darf. Korrigiert man diese $\log A_m$ für alle Sterne z. B. um $+ 0.037$, so zeigen die 2. Differenzen eine starke Vergrößerung ganz in der Nähe von $m = 9.5$ (vgl. S. 121).

Zone V (E, Milchstraße)

m	$\log A_m$	I	II
2.0	— 2.900		
		+ 268	
2.5	— 2.632		— 1
		+ 267	
3.0	— 2.365		+ 1
		+ 268	
3.5	— 2.097		0
		+ 268	
4.0	— 1.829		— 2
		+ 266	
4.5	— 1.563		— 1
		+ 265	
5.0	— 1.298		— 3
		+ 262	
5.5	— 1.036		+ 1
		+ 263	
6.0	— 0.773		— 2
		+ 261	
6.5	— 0.512		— 2
		+ 259	
7.0	— 0.253		— 3
		+ 256	
7.5	+ 0.003		— 1
		+ 255	
8.0	+ 0.258		— 1
		+ 254	
8.5	+ 0.512		— 1
		+ 253	
9.0	+ 0.765		— 2
		+ 251	
9.5	+ 1.016		— 38
		+ 213	
10.0	+ 1.229		+ 22
		+ 235	
10.5	+ 1.464		— 9
		+ 226	
11.0	+ 1.690		— 5
		+ 221	
11.5	+ 1.911		— 11
		+ 210	
12.0	+ 2.121		— 10
		+ 200	
12.5	+ 2.321		— 7
		+ 193	
13.0	+ 2.514		— 2
		+ 191	
13.5	+ 2.705		— 15
		+ 176	
14.0	+ 2.881		— 1
		+ 175	
14.5	+ 3.056		— 4
		+ 171	
15.0	+ 3.227		— 3
		+ 168	
15.5	+ 3.395		

Zone IV (D)

m	$\log A_m$	I	II
2.0	— 2.942		
		+ 260	
2.5	— 2.682		— 2
		+ 258	
3.0	— 2.424		— 1
		+ 257	
3.5	— 2.167		— 1
		+ 256	
4.0	— 1.911		— 1
		+ 255	
4.5	— 1.656		— 2
		+ 253	
5.0	— 1.403		— 2
		+ 251	
5.5	— 1.152		— 2
		+ 249	
6.0	— 0.903		0
		+ 249	
6.5	— 0.654		— 2
		+ 247	
7.0	— 0.407		— 2
		+ 245	
7.5	— 0.162		— 3
		+ 242	
8.0	+ 0.080		— 2
		+ 240	
8.5	+ 0.320		— 2
		+ 238	
9.0	+ 0.558		— 2
		+ 236	
9.5	+ 0.794		— 35
		+ 201	
10.0	+ 0.995		+ 19
		+ 220	
10.5	+ 1.215		— 7
		+ 213	
11.0	+ 1.428		— 6
		+ 207	
11.5	+ 1.635		— 10
		+ 197	
12.0	+ 1.832		— 11
		+ 186	
12.5	+ 2.018		— 8
		+ 178	
13.0	+ 2.196		— 2
		+ 176	
13.5	+ 2.372		— 12
		+ 164	
14.0	+ 2.536		— 2
		+ 162	
14.5	+ 2.698		— 3
		+ 159	
15.0	+ 2.857		— 4
		+ 155	
15.5	+ 2.012		

Zone III (C)

m	$\log A_m$	I	II
2.0	− 3.054	+ 260	
2.5	− 2.794	+ 259	− 1
3.0	− 2.535	+ 257	− 2
3.5	− 2.278	255	− 2
4.0	− 2.023	254	− 1
4.5	− 1.769	252	− 2
5.0	− 1.517	249	− 3
5.5	− 1.268	246	− 3
6.0	− 1.022	245	− 1
6.5	− 0.777	242	− 3
7.0	− 0.535	239	− 3
7.5	− 0.296	236	− 3
8.0	− 0.060	233	− 3
8.5	+ 0.173	229	− 4
9.0	+ 0.402	224	− 5
9.5	+ 0.626	188	− 36
10.0	+ 0.814	207	+ 19
10.5	+ 1.021	200	− 7
11.0	+ 1.221	191	− 9
11.5	+ 1.412	182	− 9
12.0	+ 1.594	172	− 10
12.5	+ 1.766	164	− 8
13.0	+ 1.930	161	− 3
13.5	+ 2.091	147	− 14
14.0	+ 2.238	145	− 2
14.5	+ 2.383	141	− 4
15.0	+ 2.524	137	− 4
15.5	+ 2.661		

Zone II (B)

m	$\log A_m$	I	II
2.0	− 3.199	+ 274	
2.5	− 2.925	+ 272	− 2
3.0	− 2.653	+ 269	− 3
3.5	− 2.384	+ 267	− 2
4.0	− 2.117	+ 264	− 3
4.5	− 1.853	+ 261	− 3
5.0	− 1.592	+ 257	− 4
5.5	− 1.335	+ 253	− 4
6.0	− 1.082	+ 249	− 4
6.5	− 0.833	+ 245	− 4
7.0	− 0.588	+ 240	− 5
7.5	− 0.348	+ 234	− 6
8.0	− 0.114	+ 228	− 6
8.5	+ 0.114	+ 223	− 5
9.0	+ 0.337	+ 219	− 4
9.5	+ 0.556	+ 183	− 36
10.0	+ 0.739	+ 198	+ 15
10.5	+ 0.937	+ 188	− 10
11.0	+ 1.125	+ 179	− 9
11.5	+ 1.304	+ 167	− 12
12.0	+ 1.471	+ 157	− 10
12.5	+ 1.628	+ 150	− 7
13.0	+ 1.778	+ 141	− 9
13.5	+ 1.919	+ 130	− 11
14.0	+ 2.049	+ 127	− 3
14.5	+ 2.176	+ 123	− 4
15.0	+ 2.299	+ 117	− 6
15.5	+ 2.416		

Zone I (A, Pol)

m	$\log A_m$	I	II
2.0	− 3.278		
		+ 284	
2.5	− 2.994		− 3
		+ 281	
3.0	− 2.713		− 3
		+ 278	
3.5	− 2.435		− 2
		+ 276	
4.0	− 2.159		− 4
		+ 272	
4.5	− 1.887		− 4
		+ 268	
5.0	− 1.619		− 6
		+ 262	
5.5	− 1.357		− 4
		+ 258	
6.0	− 1.099		− 7
		+ 251	
6.5	− 0.848		− 5
		+ 246	
7.0	− 0.602		− 6
		+ 240	
7.5	− 0.362		− 6
		+ 234	
8.0	− 0.128		− 7
		+ 227	
8.5	+ 0.099		− 7
		+ 220	
9.0	+ 0.319		− 7
		+ 213	
9.5	+ 0.532		− 36
		+ 177	
10.0	+ 0.709		+ 13
		+ 190	
10.5	+ 0.899		− 10
		+ 180	
11.0	+ 1.079		− 10
		+ 170	
11.5	+ 1.249		− 12
		+ 158	
12.0	+ 1.407		− 12
		+ 146	
12.5	+ 1.553		− 8
		+ 138	
13.0	+ 1.691		− 6
		+ 132	
13.5	+ 1.823		− 13
		+ 119	
14.0	+ 1.942		− 3
		+ 116	
14.5	+ 2.058		− 7
		+ 109	
15.0	+ 2.167		− 4
		+ 105	
15.5	+ 2.272		

alle Sterne

m	$\log A_m$	I	II
2.0	− 3.020		
		+ 265	
2.5	− 2.755		− 2
		+ 263	
3.0	− 2.492		0
		+ 263	
3.5	− 2.229		− 1
		+ 262	
4.0	− 1.967		− 3
		+ 259	
4.5	− 1.708		− 1
		+ 258	
5.0	− 1.450		− 3
		+ 255	
5.5	− 1.195		− 1
		+ 254	
6.0	− 0.941		− 2
		+ 252	
6.5	− 0.689		− 3
		+ 249	
7.0	− 0.440		− 3
		+ 246	
7.5	− 0.194		− 3
		+ 243	
8.0	+ 0.049		− 2
		+ 241	
8.5	+ 0.290		− 3
		+ 238	
9.0	+ 0.528		− 2
		+ 236	
9.5	+ 0.764		− 36
		+ 200	
10.0	+ 0.964		+ 20
		+ 220	
10.5	+ 1.184		− 9
		+ 211	
11.0	+ 1.395		− 5
		+ 206	
11.5	+ 1.601		− 10
		+ 196	
12.0	+ 1.797		− 10
		+ 186	
12.5	+ 1.983		− 8
		+ 178	
13.0	+ 2.161		− 1
		+ 177	
13.5	+ 2.338		− 13
		+ 164	
14.0	+ 2.502		− 1
		+ 163	
14.5	+ 2.665		− 4
		+ 159	
15.0	+ 2.824		− 3
		+ 156	
15.5	+ 2.980		

m	Sch.	I	II
8.0	+ 0.049		
		+ 241	
8.5	0.290		— 3
		+ 238	
9.0	0.528		— 2
		+ 236	
9.5	0.764		+ 1
		+ 237	
10.0	1.001		— 17
		+ 220	
10.5	1.221		— 9
		+ 211	
11.0	1.432		— 5
		+ 206	
11.5	1.638		

Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß zur Feststellung der Größe des Sprunges ziemlich hohe Anforderungen gestellt werden; aber wenn die offenbaren Ungenauigkeiten ermittelt sein werden, ist eine ungefähre Bestimmung und zwar am sichersten durch aufzustellende Interpolationsformeln, wie sie schon oben beispielsweise ausgeführt worden sind, ziemlich sicher zu erreichen. Das neue Material hat aber auch schon jetzt die Möglichkeit, die Angaben über die Ausdehnung des Sternsystems sicherer gestalten zu können, dargetan und die Tatsache, daß sich in der Tat die Endlichkeit des Systems beweisen läßt, ist gegen unberufene Kritik festgestellt. Das ist immerhin ein Fortschritt, wenn auch das Problem quantitativ noch nicht endgültig gelöst ist und naturgemäß mehr oder weniger bedeutende Korrekturen der Zahlenresultate der Zukunft vorbehalten bleiben müssen.

Was die recht bedeutenden Abweichungen der log A_m für große m gegenüber den Herschelschen Angaben betrifft, so rühren diese jedenfalls zum Teil davon her, daß man früher in der Hauptsache nur auf die nördliche Himmelshalbkugel angewiesen war. Es ist immerhin noch sehr zu bezweifeln, ob die Angaben für die südliche Halbkugel die genügende Sicherheit besitzen, die eine Mittelbildung ganz gerechtfertigt erscheinen läßt. Die Hauptursache der Divergenz bilden aber wohl die Angaben für die Milchstraße. Bei ihrer verwickelten Struktur ist es notwendig, an viel mehr Stellen zu beobachten, als geschehen ist. Die Milchstraße in den südlichen Gegenden hat offenbar ein Aussehen, das recht verschieden von dem in den nördlichen ist, und die räumliche Ausdehnung mag so sehr variieren, daß es schwer wird, die mittlere Ausdehnung zu definieren. Auch hat W. Herschel offenbar die sternreichsten Stellen mehr bevorzugt als J. Herschel, wie auch meine Bearbeitung der beiderseitigen Resultate ergeben hat. Sicher ist aber, daß die Grenzen des Sternsystems sich in der Zone V an einzelnen Stellen weit hinausschieben über die, welche die Mittelzahlen angeben.

Die Eichungen der beiden Herschel ergaben nach meinen Ermittlungen, wie ich sie benutzt hatte, für die Anzahl A der Sterne auf dem Quadratgrad für den ganzen Himmel:

$$\begin{array}{ll} \text{Mittel aus W. und J. Herschel } \log A & = 2.818 \\ \text{J. Herschel} & = 2.713. \end{array}$$

Um diese Zahlen mit Sch. vergleichen zu können, muß die Korrektion angebracht werden, welche aus der Verschiedenheit der photographischen und okularen Größen folgt. Diese Korrektion ist aber zunächst nicht recht bestimmbar. Schon für die helleren Sterne schwankt sie in den einzelnen Zonen erheblich. Für die schwachen Herschelschen Sterne werde nun die oben gefundene Korrektion von $+ 0.085$ angenommen, was natürlich nur eine mehr oder weniger willkürliche Annahme ist. Die obigen Zahlen werden dadurch in 2.903 und 2.798 verändert. Soll also durch die Herschel dieselbe Anzahl herauskommen, wie sie Sch. angibt, dann würde die Größe der Herschelschen Sterne mindestens zu 15.3 bzw. 14.9 anzusetzen sein. Die Berücksichtigung der atmosphärischen Extinktion, deren Einfluß auf die Herschelschen Zonen bisher noch nicht untersucht worden ist, würde diese Zahlen noch etwas vergrößern. Für die Milchstraße finde ich für die analogen Größen für W. Herschel, Mittel aus W. und J. Herschel und für J. Herschel 15.7; 15.3; 14.7. Darnach würden die Herschelschen Sterne, denen man bisher knapp die Größe 14 zuerteilt hat, auffallend schwach sein und den bisherigen Ansichten über die Lichtstärke des 20-Füßers oder die Lichtempfindlichkeit der Augen der Beobachter kaum entsprechen. Die Herschelschen Zahlen beziehen sich demnach sehr wahrscheinlicherweise auf einen anderen mittleren Zustand, als ihn die an vielleicht zu wenigen Stellen des Himmels ausgeführten Abzählungen definieren. Namentlich in der Milchstraße müßte, wie schon erwähnt, der überwiegend größte Teil des Areales in Betracht gezogen werden, um das typische Sternsystem genügend feststellen zu können.

5.

Wie ich schon erwähnte, gibt das neue Material wohl eine sehr schätzbare Erweiterung unserer Kenntnisse über die Zahlen A_m. Aber es enthält doch an den wichtigsten Stellen nicht unerhebliche Unvollkommenheiten. Wenn ich trotzdem weitere Rechnungen im Sinne meiner früheren Untersuchungen anschließe, so geschieht dies aus dem Grunde, weil es mir von Wichtigkeit erscheint, nachzuweisen, daß ein Widerspruch gegen meine Ansätze nach keiner Richtung berechtigt ist. Sogar die von mir gebrauchten ganz speziellen Ansätze, deren eventuelle Umänderung ich stets als nicht von der Hand zu weisend bezeichnet habe, brauchen nicht geändert werden. Damit sind von vornherein alle Einwände dagegen hinfällig, die vielleicht vorzubringen versucht werden könnten. Ich will zunächst die mittleren Parallaxen von neuem ableiten, obwohl hier kein wesentliches neues Material vorliegt. Daß dagegen die neuen Werte für $\log A_m$ in den Zahlenresultaten Veränderungen hervorbringen müssen, ist selbstverständlich. Für die m. Parallaxen (aus allen Zonen) habe ich dieselben Formeln in III und IV benutzt und auch an den angenommenen Werten der Konstanten nur geringfügige Änderungen vorgenommen, und zwar solche, welche in Verbindung mit den weiteren Rechnungen ein einheitliches System bilden. Deshalb war die Neurechnung nötig, wobei es aber auf Mitteilung von Einzelheiten nicht ankommen kann.

Ich nehme also an:

$$k = \frac{1}{4.8}; \ H \text{ entsprechend der Größe } -4.3; \ b = 53.875,$$

d. h.

$$\sigma(\mu) = 4.3122 - \frac{6}{5}\mu; \ \sigma(1) = 3.1122; \ \log e^{\sigma^2} = 4.2065$$

$$a = -\sigma + 0.2331 + 0.1919\,(m + 4.3); \ \lambda_1 - \lambda = \frac{1}{2}.$$

Dabei habe ich gegen früher a etwas mehr abgeändert und $\log a = 9.8771 - 10$ angenommen. Darnach erstreckt sich der als sternleer angenommene Raum bis zur Parallaxe 0"353. Mir scheint diese Annahme durchwegs akzeptabel. λ mußte entsprechend dem neuen Material wesentlich abgeändert und es mußte $\lambda = 0.655$ gewählt werden; dann ergeben sich die m. Parallaxen π_m aus folgender Tabelle:

m	$\log \pi_m$	π_m	π_k
2.0	8.682—10	0"0482	0"0530
4.0	8.422	0.0264	0.0265
6.0	8.133	0.0136	0.0132
8.0	7.813	0.0065	0.0069
10.0	7.464	0.0029	0.0033

Unter π_k sind die hypothetischen Parallaxen von Herrn Kapteyn angegeben, die ich schon früher meinen Rechnungen zu Grunde gelegt habe. Die Übereinstimmung muß als eine vollkommene angesehen werden. Inzwischen sind die π_k wiederholt abgeändert worden. Eine Verpflichtung, diese verschiedenen Varianten immer von neuem zu berücksichtigen und die ganze Rechnung dementsprechend abzuändern, kann ich nicht anerkennen, da die Sicherheit derselben, sicherlich nicht von Herrn Kapteyn selbst, wohl aber von andern, zweifellos überschätzt worden ist. Wenn Herr Sch. die Meinung zu vertreten scheint, daß mehr als 3 Stellen nach der Null in den Werten von π_m sicher sind und jede Abweichung der jeweilig neuesten Werte als unzulässig oder als nachgewiesener Mangel der Rechnung bezeichnet wird, so wird ihm wohl niemand zustimmen. Offenbar übersieht er es, daß die Werte π_m von gewissen Voraussetzungen abhängen, die immerhin als hypothetisch bezeichnet werden müssen. Das Verdienst der Bestimmung der mittleren Parallaxen durch Herrn Kapteyn kann hiedurch nicht geschmälert werden. Es wird vielmehr in Zweifel gezogen durch übertriebene und ganz unzutreffende Aussagen, wie sie Herr Sch. leider macht.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich erwähnen, daß die von Herrn Kapteyn aufgestellte, sicherlich sehr brauchbare Formel für den Zusammenhang zwischen Parallaxe, Eigenbewegung und Helligkeit keineswegs mehr als eine Interpolation ist und deshalb nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich besitzen kann. Seit mehr als 15 Jahren pflege ich in meinen Vorlesungen eine Ableitung zu geben, die diese übrigens wohl allgemein geteilte Ansicht klar hervortreten läßt.

Die Bemerkung, die schon Bessel zu seinen Parallaxenbeobachtungen von 61 Cygni veranlaßt hat, daß unter sonst gleichen Umständen eine um so größere Parallaxe eines Sterns zu erwarten ist, je größer seine scheinbare Eigenbewegung gefunden wird, kann in dieser Fassung keine tiefere Bedeutung haben; insbesondere ist sie nur für große E. B. einigermaßen einleuchtend. Nicht mehr, aber auch nicht weniger vage ist der weitere Ansatz, daß die Parallaxe proportional der scheinbaren E. B. zu setzen sei. Innerhalb gewisser Grenzen wird dieser Ansatz aber, wenn man die Mittelwerte für sehr viele Sterne nimmt, mit mehr oder weniger Sicherheit einen angenäherten Erfolg versprechen. Der Ansatz:

$$\pi = \gamma \cdot \mu,$$

wo μ die Eigenbewegung ist, ist also ein vermutetes Kriterium, das mit einer vorläufig unbestimmten Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden kann. Ganz unabhängig davon ist ein anderer Ansatz. Wiederum unter sonst gleichen Umständen, d. h. unter der Annahme gleicher Leuchtkraft, wird ein Stern um so heller sein, je näher er uns ist, und zwar im quadratischen Verhältnis.

Für seine Helligkeit h_m, wo m die Sterngröße bedeutet, ist jetzt anzusetzen:

$$\pi = \Gamma \cdot \sqrt{h_m}\,.$$

Diese Formel wird ebenfalls mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Erfolg versprechen. Offenbar wird sich nun eine neue Formel von größerer Brauchbarkeit ergeben, wenn man beide voneinander unabhängigen Formeln passend kombiniert, und zwar wird man die $\log \pi$ zu kombinieren haben, denn die Brauchbarkeit der zu erhaltenden Formel wird sich selbstverständlich zeigen in der Größe der in Prozenten ausgedrückten zu erwartenden Fehler. Die weitere Behandlung ist dann durch ein bekanntes und erprobtes Verfahren vorgeschrieben. Man wird empirisch durch Sterne, deren Eigenbewegung und Helligkeit bekannt sind, die beiden Annahmen durch Anbringung von noch zu bestimmenden Gewichten in einen Mittelwert vereinigen. Man erhält so:

$$\log \pi = c + \log \mu; \text{ Gewicht } p_2$$
$$\log \pi = \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} \log h_m; \text{ Gewicht } p_1.$$

So ergibt sich:

$$\log \pi = \frac{1}{p_1 + p_2} \left\{ c p_2 + \tfrac{1}{2} C p_1 + p_2 \log \mu + \frac{p_1}{2} \log h_m \right\}$$
$$= \log M + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \log \mu + \frac{p_1}{2(p_1 + p_2)} \log h_m.$$

Führt man Sterngrößen durch $\log \dfrac{h_m}{h_{5\cdot 5}} = -0.4\,(m - 5.5)$ ein und setzt:

$$a = 10^{-\frac{p_1}{5(p_1 + p_2)}}, \text{ d. h. } \frac{p_2}{p_1 + p_2} = 1 + 5 \log a,$$

so wird:

$$\pi = M \cdot a^{(m - 5.5)} \cdot \mu^{(1 + 5 \log a)}.$$

Also eine Formel mit den zwei zu bestimmenden Konstanten M und a. Die Formel des Herrn Kapteyn hat genau dieselbe Gestalt, nur hat sie drei Konstante, indem der Exponent von μ unabhängig von a ist. Bemerkenswert ist aber, daß auch hier die vorgeschriebene Verbindung zwischen den beiden Exponenten nahe genug erfüllt wird. Für Sterne aller Typen findet er z. B.:

$$\pi = (0.905)^{m-5.5} \cdot (0.0387\,\mu)^{\frac{1}{1.405}}.$$

Nun ist nach der obigen Formel $1 + 5 \log a = \frac{1}{1.405}$, d. h. $a = 0.876$, während nach Herrn Kapteyn $a = 0.905$ ist. Man überzeugt sich leicht, daß die Differenz in den beiden Werten von a praktisch nicht in Frage kommen kann. Es ergibt sich noch, daß $\frac{p_1}{p_2}$ nahe $\frac{2}{5}$, daß also das Kriterium der Eigenbewegung $2^1/_2$ mal so sicher ist, wie das der Helligkeit.

Ganz neuerlich hat Herr Hertzsprung[1]) ebenfalls darauf aufmerksam gemacht, daß eine nur 2 Konstante enthaltende Formel vollkommen genügt. Das deckt sich also mit meiner obigen, vor vielen Jahren gemachten Darstellung der Sachlage.

6.

Ich habe schon oben ausgesprochen, daß die Darstellung der neuen Werte A_m in einer Weise zu behandeln, die als irgendwie definitiv angesehen werden könnte, unmöglich ist. Da es aber, wie erwähnt, immerhin von Wichtigkeit ist, die Durchführbarkeit der Rechnungen in concreto zu zeigen, werde ich dieselben so weit führen, als es wünschenswert ist. Die Anpassung an die Beobachtungen soll deshalb keineswegs so weit geführt werden, als vielleicht möglich wäre. Auch die Genauigkeit der Rechnung an sich wurde etwas eingeschränkt, was die Sicherheit der Resultate für die schwachen Sterne, etwa von der 14. Größe ab, etwas herabgemindert hat. Indessen sind die Resultate immerhin sicherer wie die früher gefundenen und in prinzipieller Richtung bedeuten sie wohl einen Fortschritt. Was die früheren Resultate betrifft, so erlaube ich mir zu wiederholen, was ich am Schlusse der genannten Rechnungen sagte (IV, S. 488):

[1]) Astr. Nachr., Nr. 4975.

„Mir fällt es nicht ein, dem Resultat der angestellten Rechnung besondere Zuverlässigkeit zuzusprechen. Aber es ist doch nicht ganz ohne Wert, weil es auf genau präzisierten Annahmen aufgebaut ist. Die Zulässigkeit derselben ist durch die Übereinstimmung mit den gegenwärtig verfügbaren Daten bewiesen, aber es tut dringend not, diese Daten zu vermehren...." Dann werden die verbesserungsfähigen Elemente und diejenigen, die nur der Einfachheit wegen für alle Zonen als unveränderlich angesehen werden, im einzelnen erwähnt. Mit diesem Zitat beabsichtige ich festzustellen, daß ich die Sicherheit der gewonnenen Resultate nichts weniger als überschätzt habe. Deshalb ist die Kritik des Herrn Schouten als gänzlich überflüssig zu bezeichnen, während ich das Gewand, in dem diese Kritik erscheint, mit den gebührenden Worten zu kennzeichnen unterlassen möchte.

Die Formeln, nach denen die weiteren Rechnungen ausgeführt wurden, sind bis auf Umstellungen und geringfügige Änderungen dieselben, welche ich in IV zusammengestellt habe. Die räumliche Dichtigkeit der Sternverteilung $\Delta(\varrho)$ in der Entfernung ϱ ist nach wie vor:

$$\Delta(\varrho) = \gamma\,[\varrho^{-\lambda} - \alpha\,\varrho^{-\lambda_1}].$$

In der Verteilungsfunktion $\varphi(i)$ habe ich das zweite Glied, entsprechend den Betrachtungen des Artikels (2), fortgelassen, also gesetzt:

$$\varphi(i) = \Gamma_1 \left\{ e^{-h^2\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b\log\frac{i}{H}} \right\},$$

wobei natürliche Logarithmen gemeint sind. Die weiteren Bezeichnungen waren:

$$\sigma(\mu) = \frac{2bh^2 - (\mu+1)}{4k};\quad a = -\sigma - k\log\frac{h_m r_0^2}{H};\quad r_0^{\lambda_1-\lambda} = \alpha;$$

$$\beta = \alpha\,\frac{3-\lambda}{3-\lambda_1}$$

$$\Phi(\mu) = e^{\sigma^2(\mu)}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\sigma(\mu)}^{a(\mu)} e^{-r^2}\,dr;\quad \chi(\mu) = e^{\sigma^2(\mu)}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sigma(\mu)+k\log\frac{h_m}{h_n}}^{\sigma(\mu)} e^{-r^2}\,dr$$

$$\mathfrak{A}_m = \frac{1}{3-\lambda}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\Phi(4-\lambda) - \beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\Phi(4-\lambda_1)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\Phi(1)\,(1-\beta r_0^{\lambda-\lambda_1})\right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{3-\lambda}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\chi(4-\lambda) - \beta\,\chi(4-\lambda_1)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\chi(1)\left[1-\beta\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\right].\right\}$$

Dann ist:

$$\frac{1}{\omega}A_m = \frac{\gamma\sqrt{\pi}\,\Gamma_1}{2k}H\mathfrak{A}_m \quad \ldots \quad m<n$$

$$\frac{1}{\omega}A_m = \frac{\gamma\sqrt{\pi}\,\Gamma_1}{2k}H(\mathfrak{A}_m - C_1) \quad m>n.$$

Vielleicht sind die etwas umgestellten Formeln übersichtlicher:

$$\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2k}\cdot\frac{\Gamma_1 H}{3-\lambda} = \Gamma$$

$$\mathfrak{A}_m = \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\left[\Phi(4-\lambda) - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\Phi(1)\right]\right.$$
$$\left. - \beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\left[\Phi(4-\lambda_1) - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\Phi(1)\right]\right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{3-\lambda}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\left[\chi(4-\lambda) - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\chi(1)\right]\right.$$
$$\left. - \beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\left[\chi(4-\lambda_1) - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\chi(1)\right]\right\}.$$

Für die numerische Rechnung sind die von Radau gegebenen ausführlichen Tafeln für das Integral:

$$\psi(z) = e^{z^2}\int_{z^2}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

von Wert, da man

$$J = e^{\sigma^2} \int_{\sigma - \Delta}^{\sigma} e^{-x^2} dx$$

braucht, wo σ mehrere Einheiten und Δ klein ist. Denn es ist:

$$J = e^{\sigma^2 - (\sigma - \Delta)^2} \cdot \psi(\sigma - \Delta) - \psi(\sigma).$$

Noch eine Bemerkung möchte ich hinzufügen, von der ich Gebrauch gemacht habe. Will man α in α_1 verändern, so muß auch r_0 in r_1 geändert werden, weil r_0 zwischen Rechnungen nach der Gleichung $r_0^{\lambda_1 - \lambda} = \alpha^2$ gewählt wurde. Es kommt aber r_0 nur in der Verbindung $h_m r_0^2$ vor. Man hat also die Klammer in A_m zu berechnen für m und r_1^2, d. h. mit $h_m r_1^2$. Bestimmt man nun eine Größe m, so daß $h_{m_1} r_0^2 = h_m r_1^2$, so kann man auch die Klammer für die Größe m_1 und für r_0 berechnen, was durch Interpolation leichter geschieht, als durch eine neue Rechnung, wenn auch noch $\beta_1 h_m^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} = \beta h_{m_1}^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}}$ gemacht wird. Man hat also zur Bestimmung von m_1

$$\frac{h_{m_1}}{h_m} = \frac{r_1^2}{r_0^2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^{\frac{2}{\lambda_1 - \lambda}}$$

und dann ist in der Tat:

$$\beta_1 h_m^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} = \beta_1 h_m^{\frac{\lambda - \lambda}{2}} \left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = \beta h_{m_1}^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}}$$

für $\lambda_1 - \lambda = \frac{1}{2}$ ist:

$$\frac{h_{m_1}}{h_m} = \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^4, \text{ d. h.: } m_1 - m = -10 \log \frac{\beta_1}{\beta}.$$

Die passende Wahl von λ für jede Zone wird durch die beifolgende Tabelle für $\mathfrak{A}_m$ erleichtert.

Zuerst sollen die A_m für alle Sterne, also im „schematischen Sternsystem", durch die angeführten Formeln dargestellt werden. Hier wie im folgenden wurden die Zahlen zu Grunde gelegt, welche bei der Berechnung der mittleren Parlog $\mathfrak{A}_m$

$m \backslash \lambda$	0.515	0.535	0.555	0.575	0.595	0.615	0.635	0.655	0.675	0.695	0.715	0.735	0.755	0.775	0.795	m. Diff.	
2.0	2.509	2.495	2.481	2.467	2.454	2.441	2.428	2.415	2.403	2.390	2.377	2.364	2.351	2.338	2.326	0.013	2.0
3.0	3.073	3.056	3.039	3.022	3.005	2.989	2.973	2.957	2.940	2.924	2.909	2.893	2.878	2.863	2.848	0.016	3.0
4.0	3.622	3.601	3.581	3.562	3.542	3.523	3.504	3.485	3.466	3.447	3.428	3.409	3.390	3.372	3.355	0.019	4.0
5.0	4.158	4.134	4.110	4.088	4.066	4.043	4.020	3.997	3.974	3.952	3.931	3.909	3.888	3.867	3.847	0.022	5.0
6.0	4.685	4.658	4.631	4.605	4.579	4.553	4.527	4.501	4.475	4.450	4.425	4.400	4.375	4.351	4.327	0.026	6.0
7.0	5.205	5.175	5.145	5.115	5.085	5.056	5.027	4.998	4.969	4.940	4.911	4.882	4.853	4.825	4.798	0.029	7.0
8.0	5.720	5.686	5.653	5.620	5.586	5.553	5.520	5.488	5.456	5.424	5.391	5.358	5.326	5.294	5.263	0.033	8.0
9.0	6.231	6.193	6.156	6.119	6.082	6.045	6.008	5.972	5.935	5.899	5.863	5.828	5.793	5.758	5.723	0.036	9.0
10.0	6.739	6.696	6.655	6.614	6.574	6.534	6.494	6.454	6.414	6.374	6.335	6.296	6.257	6.217	6.178	0.040	10.0
11.0	7.244	7.197	7.151	7.107	7.063	7.019	6.975	6.932	6.888	6.845	6.802	6.759	6.716	6.673	6.631	0.043	11.0
12.0	7.748	7.699	7.650	7.601	7.552	7.503	7.455	7.408	7.361	7.314	7.267	7.220	7.173	7.126	7.080	0.047	12.0
13.0	8.250	8.197	8.144	8.091	8.039	7.987	7.935	7.883	7.831	7.780	7.730	7.679	7.629	7.579	7.528	0.051	13.0
14.0	8.751	8.690	8.637	8.580	8.523	8.466	8.409	8.353	8.298	8.244	8.190	8.136	8.082	8.028	7.975	0.056	14.0
15.0	9.251	9.190	9.129	9.068	9.008	8.948	8.888	8.829	8.770	8.711	8.652	8.594	8.536	8.478	8.420	0.059	15.0
16.0	9.751	9.685	9.620	9.556	9.492	9.428	9.364	9.301	9.238	9.175	9.112	9.050	8.988	8.926	8.864	0.063	16.0

allaxen benutzt worden sind. λ muß natürlich den Zahlen A_m der betreffenden Zone angepaßt werden. Ich habe stets die Betrachtungen über das schematische Sternsystem nur als einen orientierenden Versuch aufgefaßt, der hauptsächlich darum einen gewissen Wert hat, weil hier die Zahlen A_m selbstverständlich zuverlässiger sind als für die einzelnen Zonen. Es ist mir nicht erfindlich, wie das Gegenteil von Seite einer unmotivierten Kritik behauptet werden konnte. Nach einigen leichten Versuchen bin ich beim Wert $\lambda = 0.655$ stehen geblieben, der auch selbstverständlich bei der Berechnung der m. Parallaxen benutzt wurde. Für die Konstante

$$\Gamma = \log \frac{\omega\gamma\sqrt{\pi}}{2k}\,\Gamma_1 H$$

ergab sich -5.444. Gemäß dem Verlauf der Zahlen $\log A_m$ wurde $n = 9.5$ gesetzt. Die folgende Tabelle gibt Aufschluß über die erhaltenen Resultate. Unter Sch. sind die beobachteten $\log A_m$ angegeben. Sie wurden für $m > 9.5$, wie schon oben als plausibel erkannt, um $+0.037$ korrigiert. Das ist natürlich eine wenig sichere Korrektur, aber unter den jetzigen Umständen gewiß zulässig. Will man sie nicht als legal gelten lassen, so würden geringfügige Änderungen genügen, um die Darstellung wiederum genügend zu gestalten. Aus den aus der Zusammenstellung ersichtlichen übrig bleibenden Differenzen dürfte hervorgehen, daß der Anschluß an die Beobachtungsdaten ein vollkommener ist.

Da von der Extinktion abgesehen wurde, ist die Grenze des Sternsystems gegeben durch:

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}},$$

also $\log r_1 = 2.76$; $r_1 = 580$ Siriusweiten.

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log C_1$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch.	$\varDelta$
2.0	2.415			−3.029	−3.020	+9
3.0	2.957			−2.487	−2.492	−5
4.0	3.485			−1.959	−1.967	−8
5.0	3.997			−1.447	−1.450	−3
6.0	4.502			−0.942	−0.941	+1
7.0	4.998			−0.446	−0.440	+6
8.0	5.488			+0.044	+0.049	+5
9.0	5.972			+0.528	+0.528	0
9.5	6.213			+0.769	+0.764	−5
10.0	6.454	4.712	6.446	+1.002	+1.001	−1
10.5	6.693	5.493	6.665	+1.221	+1.221	0
11.5	7.170	6.463	7.076	+1.632	+1.638	+6
12.5	7.646	7.185	7.461	+2.017	+2.020	+3
13.5	8.118	7.814	7.820	+2.376	+2.375	−1
14.5	8.591	8.391	8.158	+2.714	+2.702	−12
15.5	9.065	8.935	8.478	+3.034	+3.017	−17

Die Formel (VI) des Artikels 2 ergibt folgendes: Dort ist die Bezeichnung so gewählt, daß, um Übereinstimmung mit der zuletzt benutzten zu erzielen, man in (III) $\Gamma_1 \cdot \varphi(H)$ statt $\varphi(H)$ und $\gamma \cdot \varDelta(r_1)$ statt $\varDelta(r_1)$ zu setzen hat. Sie lautet deshalb:

$$\varDelta\left(\frac{d^2 \log A_n}{d n^2}\right) = \frac{0.02}{\varepsilon A_n} \cdot \frac{\omega \sqrt{\pi}}{2k} \Gamma_1 \gamma H r_1^{3-\lambda} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r_1}}\right) \quad \text{oder}$$

$$r_1^{2.345} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r_1}}\right) = [7.565]\, \varDelta\left(\frac{d^2 \log A_n}{d n^2}\right),$$

weil $\log A_n = 0.764$ ist. Nimmt man der Reihe nach für $\varDelta\left(\frac{d^2 \log A_n}{d h_n^2}\right)$: 0.068, 0.048, 0.028, so findet sich:

$$\log r_1 = 2.78;\ 2.66;\ 2.56. \quad r_1 = 600;\ 460;\ 360.$$

Diese Werte werden vielleicht, wie die oben gemachten Bemerkungen erweisen, den wahrscheinlichen Wert von r_1 umfassen. Genaueres läßt sich zur Zeit nicht aussagen, so lange die bemerkten Inhomogenitäten in den Werten von A_m nicht behoben sind. Zunächst ist wohl noch der aus H und h_n bestimmte Wert von r_1 als der sicherere anzusehen. Die aus (VI) bestimmten sind vollkommen unabhängig von den sonstigen Rechnungen und deshalb sicherlich wertvoll. Sie stimmen doch immerhin mit dem ersteren (580 Siriusweiten) recht gut überein, wenn die ganze Sachlage vernünftig beurteilt wird. Danach wäre die Ausdehnung des schematischen Systems mit etwa *500 Siriusweiten* anzunehmen. Die Verkleinerung gegen die in (IV) gegebenen Dimensionen war vorauszusehen, weil die Zahl der Herschelschen Sterne in der Milchstraße viel größer angenommen wurde, als das neue Material anzeigt. Von einer Extinktion ist dabei abgesehen worden. Die Gesamtzahl aller sichtbaren Sterne ist:

$$A = \omega \int_0^{r_2} \varDelta(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho = \omega\gamma \int_0^{r_2} (\varrho^{2-\lambda} - \alpha\, \varrho^{2-\lambda-1/2})\, d\varrho\,,$$

da man bei solchem Überschlag $r_0 = 0$ setzen darf. Man findet: $H\Gamma_1 = [4.592 - 10]$, $\omega\gamma = [9.335 - 10]$, wobei ω die Fläche eines Quadratgrades ist. Es ist also noch mit der Anzahl Quadratgrade [4.615] zu multiplizieren, welche die ganze Kugelfläche enthält, also zu setzen: $\log \omega\gamma = 3.950$.

Man erhält so:

für $r_2 =$ 600	$\log A =$	10.090
460		9.824
360		9.524

also A etwa 10 Milliarden. In A. N. Nr. 4992 schätzt Herr Hertzsprung durch eine weitgehende Interpolation $\log A = 9.850$, was damit gut übereinstimmt.

Bekanntlich hat Schwarzschild A. N. Nr. 4557 ein unendliches Sternsystem behandelt, was nach meiner Meinung allerdings nicht angängig ist. Aus seinen Zahlen folgt denn auch ein ganz anderes und zwar enorm viel größeres A. In andern Einheiten (Einheit der Entfernung entspricht der Parallaxe 1″0) gibt er für die Anzahl der Sterne in der Kubikeinheit:

$$\log \text{nat}\, D(r) = 1.124 + 0.485 \log \text{nat}\, r - 0.0956\, (\log \text{nat}\, r)^2.$$

Die Formel: $$A = 4\pi \int_0^{\infty} D(r)\, r^2\, dr$$

schreibt sich dann, wenn die 3 Koeffizienten in der Formel für $D(r)$ der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet werden:

$$A = \frac{4\pi}{\sqrt{c}} e^{a + \frac{(b+3)^2}{4c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

und es erreicht A den enormen Wert $\log A = 16.14$. Schließlich sollen die von Schwarzschild gefundenen Werte (Schw.) für die räumliche Dichtigkeit $D(r)$ und die von mir hier angegebenen (S) verglichen werden. Es wurde gefunden $\gamma\omega = [9.335 - 10]$. In Einheiten des Radius ist 1 Quadratgrad $\omega = (1 : 57.3)^2$, also $\gamma = [2.851]$. Die räumliche Dichtigkeit, d. h. die Anzahl der Sterne in einer Kubik-Siriusweite in der Entfernung von σ Siriusweiten ist demnach:

$$\log S = \log D = 2.851 - 0.655 \log \sigma + \log \left(1 - \frac{0.754}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

Nach Schwarzschilds Rechnungen ist die Dichtigkeit:

$$\log D_1(r) = + 0.488 + 0.485 \log r - 0.2200 (\log r)^2,$$

oder, da $r = 5 \cdot \sigma$ zu setzen ist:

$$\log D_1'(\sigma) = 0.719 + 0.177 \log \sigma - 0.2200 (\log \sigma)^2.$$

Um schließlich die Anzahl der Sterne in einer Kubik-Siriusweite zu erhalten, muß man mit $5^3 = 125$ multiplizieren:

$$\log \text{Schw} = \log D_1(\sigma) = 2.816 + 0.177 \log \sigma - 0.2200 (\log \sigma)^2.$$

Die Gegenüberstellung gibt folgende Tabelle:

σ	log Schw	log S	diff.	Δ_1	σ	log Schw	log S	diff.	Δ_1
0.10	2.419				100	2.290	1.507	+0.783	−0.10
0.25	2.630				200	2.058	1.320	738	− 6
0.50	2.740				300	1.904	1.210	694	− 1
0.564	2.759				400	1.788	1.130	658	+ 2
1.0	2.816	2.243	+0.573	+0.11	500	1.691	1.068	623	+ 6
2.0	2.848	2.324	524	+ 16	600	1.610	1.017	593	+ 9
3.0	2.850	2.291	559	+ 12	700	1.539	0.975	564	+ 12
4.0	2.843	2.251	592	+ 9	800	1.476	0.937	539	+ 14
5.0	2.831	2.215	616	+ 6	900	1.419	0.907	512	+ 17
10	2.773	2.078	695	− 2	1000	1.367	0.876	491	+ 19
20	2.674	1.920	754	− 7					
30	2.596	1.821	775	− 10					
40	2.535	1.747	788	− 11					
50	2.481	1.689	792	− 11					
100	2.290	1.507	783	− 10					

Nimmt man als ungefähres Mittel der Differenz 0.680, so bleibt Δ_1 übrig. Bis $\sigma = 800$ ist demnach der Verlauf, abgesehen von einer Konstanten, bei beiden Bestimmungen angenähert derselbe (bis etwa auf 25 %), abgesehen von ganz kleinen σ. Weiterhin tritt auch jetzt, wie früher, die Tatsache hervor, daß die gefundenen D_1, wenn man von kleinen σ (etwa $\sigma < 5$) absieht, sehr nahe verlaufen wie $\sigma^{-\lambda}$. Hier ist $\lambda = 0.60$, also wie schon in (III) bemerkt wurde, von dem Werte, welchen die $\log A_m$ ($\lambda = 0.655$) ergeben, etwas verschieden.

σ	$\log \sigma^{-0.60}$	$\log S$	diff.	σ	$\log \sigma^{-0.60}$	$\log S$	diff.
1	0.000	2.243	2.243	50	− 1.019	1.689	2.708
2	− 0.181	2.324	2.515	100	− 1.200	1.507	2.707
3	− 0.286	2 291	2.577	200	− 1.381	1.320	2.701
4	− 0.362	2.251	2.613	300	− 1.486	1.210	2.696
5	− 0.419	2.215	2.634	400	− 1.562	1.130	2.692
10	− 0.600	2.078	2.678	500	− 1.619	1.068	2.687
20	− 0.781	1.920	2.701	600	− 1.667	1.017	2.684
30	− 0.886	1.821	2.707	700	− 1.707	0.975	2.682
40	− 0.962	1.747	2.709	800	− 1.742	0.937	2.679
50	− 1.019	1.689	2.708	900	− 1.772	0.907	2.679
				1000	− 1.800	0.876	2.676

Wäre $D = \gamma \sigma^{-\lambda}$, so wären die m. Parallaxen $\pi_m = \Gamma \cdot h_m^{1/2}$. Die empirischen Parallaxenwerte werden also in der Hauptsache von einer Veränderung der Dichtigkeitsverteilung ganz in der Nähe der Sonne hervorgebracht. Alle diese Sätze habe ich bereits in den Arbeiten III und IV aufgestellt. An den Mißverständnissen, die daran geknüpft worden sind, mag die Überschätzung der Sicherheit der Zahlenresultate schuld sein, welche auf anderem Wege erlangt worden sind und die keineswegs die ihnen zugeschriebene Allgemeingültigkeit beanspruchen können.

Die Rechnungen in Bezug auf die Michstraßenzone V ergaben folgende Resultate:

$$\lambda = 0.535; \quad n = 10.0 \quad \log \Gamma = -5.428,$$

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log C_1$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch	Δ
2.0	2.495			— 2.933	— 2.900	+ 33
3.0	3.056			— 2.372	— 2.365	+ 7
4.0	3.601			— 1.827	— 1.829	— 2
5.0	4.134			— 1.294	— 1.298	— 4
6.0	4.658			— 0.770	— 0.773	— 3
7.0	5.175			— 0.253	— 0.253	0
8.0	5.686			+ 0.258	+ 0.258	0
9.0	6.193			+ 0.765	+ 0.765	0
10.0	6.696			+ 1.268	+ 1.266	— 2
10.5	6.947	5.303	6.937	+ 1.509	+ 1.501	— 8
11.0	7.197	6.082	7.162	+ 1.734	+ 1.727	— 7
12.0	7.699	7.059	7.586	+ 2.158	+ 2.158	0
13.0	8.197	7.795	7.978	+ 2.550	+ 2.551	+ 1
14.0	8.694	7.436	8.345	+ 2.917	+ 2.918	+ 1
15.0	9.190	8.026	8.688	+ 3.260	+ 3.265	+ 5
16.0	9.685	8.565	8.998	+ 3.570	+ 2.593	+ 23

Ich habe hier die Werte $m > 10.0$ um $+ 0.037$ korrigiert. Diese Korrektion ist, wie gesagt, zweifelhaft, ändert aber wiederum nichts an der Tatsache, daß dadurch die Möglichkeit einer fast vollkommenen Darstellung der Beobachtungsdaten nicht alteriert werden kann. Die Gesamtzahl $A_{2.0}$ ist hier 9.0, demnach wäre hier eine viel größere Abweichung, als oben gefunden, vollkommen gleichgültig.

Für die Zone D wurde gefunden:

$$\lambda = 0.675; \quad n = 9.5; \quad \log \Gamma = -5.377.$$

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch	Δ
2.0	2.403		— 2.974	— 2.942	+ 32
3.0	2.940		— 2.437	— 2.424	+ 13
4.0	3.464		— 1.913	— 1.911	+ 2
5.0	3.974		— 1.403	— 1.403	0
6.0	4.475		— 0.902	— 0.903	— 1
7.0	4.969		— 0.408	— 0.407	+ 1
8.0	5.456		+ 0.079	+ 0.080	+ 1
9.0	5.935		+ 0.558	+ 0.558	0
9.5	6.175		+ 0.798	+ 0.794	— 4
10.0	6.414	6.406	+ 1.029	+ 1.025	— 4
10.5	6.651	6.624	+ 1.247	+ 1.245	— 2
11.5	7.125	7.032	+ 1.655	+ 1.665	+ 10
12.5	7.596	7.416	+ 2.039	+ 2.048	+ 9
13.5	8.064	7.775	+ 2.398	+ 2.402	+ 4
14.5	8.534	8.111	+ 2.734	+ 2.728	— 6
15.5	9.004	8.428	+ 3.051	+ 3.042	— 9

Die Korrektion für $m > 9.5$ wurde zu $+ 0.030$ angenommen. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist fast vollkommen.

Für die Zone C wurde angenommen:

$$\lambda = 0.715; \quad n = 8.5; \quad \log \Gamma = - 5.449$$

und die Korrektion für $m \geqq 9.5$ zu $+ 0.020$ bzw. $+ 0.016$. Die letztere zeigt, wie durch kleine Veränderungen der Ausgleich der Differenzen erzielt werden kann, nämlich:

m	$\log A$	I	II
8.0	− 0.060		
		+ 233	
8.5	+ 0.173		− 4
		+ 229	
9.0	+ 0.402		− 9
		+ 220	
9.5	+ 0.622		− 10
		+ 212	
10.0	+ 0.834		− 5
		+ 207	
10.5	+ 1.041		− 7
		+ 200	
11.0	+ 1.241		

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch	Δ
2.0	2.377		− 3.072	− 3.054	+ 18
3.0	2.909		− 2.540	− 2.535	+ 5
4.0	3.428		2.021	− 2.023	− 2
5.0	3.931		− 1.518	− 1.517	+ 1
6.0	4.425		− 1.024	− 1.022	+ 2
7.0	4.911		− 0.538	− 0.535	+ 3
8.0	5.391		− 0.058	− 0.060	− 2
8.5	5.627		+ 0.178	+ 0.173	− 5
9.0	5.863	5.856	+ 0.407	+ 0.402	− 5
9.5	6.099	6.073	+ 0.624	+ 0.622	− 2
10.5	6.568	6.482	+ 1.033	1.041	+ 8
11.5	7.040	6.842	+ 1.415	1.432	+ 17
12.5	7.499	7.223	+ 1.774	1.786	+ 12
13.5	7.961	7.559	+ 2.110	2.111	+ 1
14.5	8.422	7.887	+ 2.421	2.403	− 18

Auch diese Darstellung ist jedenfalls genügend.

Schließlich seien noch die Resultate einiger Rechnungen über die Sternverteilung in der Zone A, welche die Pole der Milchstraße enthalten, mitgeteilt. Ich habe mich hiebei nur auf mehr überschlagsweise ausgeführte Darstellungen beschränkt, da hier die Unsicherheit des Materials teils infolge der geringen Anzahl der helleren Sterne, teils wohl auch durch andere Umstände viel erheblicher geworden ist, so daß eine Bestimmung der betreffenden Konstanten zurzeit nur mit großer Ungenauigkeit auszuführen möglich scheint.

Mit der Konstanten — 5.369 und $\lambda = 0.775$ ergaben sich $\log A_m = f_1$ und die übrig bleibenden Fehler Δ_1.

m	f_1	Sch	Δ_1	f_2	Δ_2
2	— 3.030	— 3.278	+ 248	—	—
4	— 1.995	— 2.159	+ 164	— 2.111	+ 48
6	— 1.019	— 1.099	+ 80	— 1.076	+ 23
8	— 0.111	— 0.128	+ 17	— 0.127	+ 1
10	+ 0.708	+ 0.709	— 1	+ 0.700	— 9
11	+ 1.048	+ 1.079	— 31	—	—
12	+ 1.381	+ 1.407	— 26	+ 1.377	— 30
13	+ 1.689	+ 1.691	— 2	+ 1.689	— 2
14	+ 1.984	+ 1.941	+ 43	+ 1.986	+ 45

Die großen Abweichungen für $m = 2$ und $m = 4$ sind an sich ganz gleichgültig, weil die Anzahl aller Sterne 1 bzw. 17 ist, während die f_1 hiefür 2 und 14 ergeben. Für $m = 6$ freilich kann die Differenz (239 gegen 194) immerhin als nicht recht zulässig betrachtet werden. Man wird voraussichtlich die Anzahlen der schwachen Sterne durch andere Wahl der Konstanten besser darstellen können, aber die Unsicherheit dürfte wenig verringert erscheinen. Was die hellen Sterne betrifft, so hat man es in der Hand, die berechneten Werte den beobachteten, die übrigens offenbar durch weitgehende und unsichere Interpolation zustande gekommen scheinen, näher zu bringen und zwar durch das oben S. 130 angegebene Mittel. Es steht doch an sich fest, daß die Konstanten α und $\lambda_1 - \lambda$ wesentlich durch die m. Parallaxen bestimmt werden und die Wahrscheinlichkeit, in allen Zonen mit denselben Konstanten α und $\lambda_1 - \lambda$ auszukommen, sehr gering sein muß. Wie man aber für die hellen Sterne $m = 2, 3, 4, 5$ zu irgend welchen sicheren Parallaxen kommen will, ist nicht recht verständlich, da die Zahlen aller Sterne der Reihe nach nur 1, 5, 17, 60 sind. Auf diesem Wege ist also eine Bestimmung namentlich von a kaum zu erwarten. Nimmt man für a den Wert $a' = 1.585\,a$, ändert im Übrigen nichts, so ergeben sich die Zahlen f_2 und Δ_2. Die Darstellung ist also jetzt für die hellen Sterne ganz genügend geworden, während sich für die schwachen die Sachlage nicht merklich geändert hat. Der sternleere Raum wird allerdings sich bis zur Parallaxe 0."14 vergrößern, was vielleicht beanstandet werden kann, wenn auch kaum ein begründeter Einwand dagegen erhoben werden könnte. In jedem Falle muß eine Revision der A_m für die Zone A abgewartet werden, ehe man an weitere Rechnungen mit Erfolg wird schreiten können.

Wenn man die gewonnenen vorläufigen Resultate zusammenstellt, so ergibt sich:

Zone	Γ	λ	n	Grenzen in Siriusweiten	
alle Sterne	— 5.444	0.655	9.5	587	(IV)
V	— 5.428	0.535	10.0	725	1700
IV	— 5.377	0.675	9.5	580	645
III	— 5.449	0.715	8.5	360	457
I	— 5.339	0.775	7.0	180	327

Die nicht gleichmäßig verlaufende Wertreihe Γ deutet von Neuem auf Ungleichheiten des benutzten Materials und sicher auch auf die nicht genügend weit geführten Näherungsrechnungen hin. Ein Vergleich mit den in IV gefundenen Zahlen zeigt eine besonders bedeutende Abweichung in der Milchstraße, während in den andern Zonen eine größere Übereinstimmung nicht zu erwarten war, denn die Resultate sind sehr empfindlich gegen Änderungen in den Zahlen A_m, wie ich schon sehr oft hervorgehoben habe. In der Milchstraße spricht sich die Verschiedenheit des neuen Materials und der Resultate der Herschelschen Eichungen deutlich aus. Keinem Zweifel unterliegt, daß das Sternsystem in der Milchstraße an vielen Stellen eine viel bedeutendere Ausdehnung besitzen muß, als die neue Rechnung ergibt, da hier infolge des sehr stark mit dem Ort variierenden Sternreichtums das „typische Sternsystem“ nur ganz unsicher definiert werden kann. Es müßten jedenfalls an viel mehr Stellen Abzählungen ausgeführt werden, als bisher geschehen ist.

Zunächst kann man in Anbetracht aller Umstände immerhin behaupten, daß bisher mindestens eine ungefähre Vorstellung von der Ausdehnung des Sternsystems gewonnen ist. Es wäre eine Verkennung der ganzen Sachlage, wenn man schon jetzt mehr verlangen wollte.

Die weitere Entwicklung des großen Problems der Stellarastronomie, so weit wir auch von einer ganz befriedigenden Lösung entfernt sein mögen, ist doch immerhin auf einen einigermaßen festen Grund gestellt worden. Erwünscht bleibt auch weiterhin eine Ausfeilung und Verbesserung der Abzählungsresultate, auch weitere Untersuchungen über mittlere Parallaxen. Was den ersten Punkt betrifft, so sind die Abzählungen auf noch schwächere Sterne auszudehnen, insbesondere ist aber eine möglichst scharfe Bestimmung der Zahlen A^m in der Nähe von $m = 8$ bis $10^1/_2$ erforderlich, wie die allgemeinen Untersuchungen in Artikel (3) beweisen. Gerade in dieser Beziehung läßt offenbar das neue Material noch zu wünschen.

Noch muß folgendes bemerkt werden: Aus den Integralgleichungen können prinzipiell sowohl die scheinbare Dichtigkeitsverteilung Δ, als auch die wahre D, d. h. diejenige, wie sie nach Berücksichtigung der Extinktion stattfindet, gefunden werden. Bei der Unvollständigkeit der verfügbaren Daten wurde in den mitgeteilten Rechnungen von jeder Extinktion abgesehen. Damit aber die so berechneten mittleren Parallaxen mit der nach den richtigen Formeln berechneten genügend übereinstimmen, darf der durchschnittliche Einfluß der Extinktion ein gewisses Maß nicht übersteigen. Daß die Extinktion an sich voraussichtlich gering sein wird, habe ich schon in III wahrscheinlich gemacht. Es ist von Interesse, den Zusammenhang der ohne Extinktion berechneten π mit den nach den strengen Formeln berechneten π_1 zu überschlagen.

Es ist:

$$\frac{\pi_1}{0''2}\int \varDelta(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\,\varrho^2)\,d\,\varrho = \int \varDelta(\varrho)\,\frac{\varrho^4}{r}\,\varphi(h_m\,\varrho^2)\,d\,\varrho$$

$$\frac{\pi}{0''2}\int \varDelta(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\,\varrho^2)\,d\,\varrho = \int \varDelta(\varrho)\,\varrho^3\,\varphi(h_m\,\varrho^2)\,d\,\varrho$$

und weiter $\frac{r^2}{\psi(r)} = \varrho^2$.

Setzt man:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}\,(1 + \Gamma\varrho), \text{ so wird } \frac{\pi_1 - \pi}{0''\,2} < \Gamma_1,$$

wo Γ_1 den Maximalwert von Γ bedeutet.

Für die von mir als „allgemeine Extinktion“ bezeichnete Extinktion ist: $\psi(r) = e^{-\nu r}$.

Hieraus folgt:

$$r\,e^{\frac{\nu}{2}r} = \varrho, \text{ also } \Gamma = \frac{1 - e^{-\frac{\nu}{2}r}}{r}.$$

Für $r = 0$ ist $\Gamma = \frac{\nu}{2}$, für $r = \infty$ $\Gamma = 0$; ferner folgt:

$$\frac{d\,\Gamma}{d\,r} = -\frac{1}{r^2}\left[1 - e^{-\frac{\nu}{2}r}\left(1 + \frac{r\,\nu}{2}\right)\right].$$

Man hat nun

$$e^{-\frac{\nu}{2}r}\left(1 + \frac{r\,\nu}{2}\right) < 1.$$

Γ nimmt also fortwährend mit wachsendem r ab.

Es ist also $\Gamma < \frac{\nu}{2} = \Gamma_1$, d. h. es ist:

$$\pi_1 - \pi < 0''1\,\nu.$$

Nimmt man allgemein:

$$\psi(r) = e^{-\int_0^r \nu\,d\,r},$$

wo ν eine beliebige Funktion von r ist, und setzt:

$$\int_0^r \nu\, d\, r = \varphi(r);\quad \psi(r) = e^{-\varphi(r)},$$

so wird:

$$\Gamma = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\varphi(r)}}{r}.$$

Der absolute Maximalwert wird für ein zunächst unbestimmtes $r = r_1$ stattfinden:

$$\Gamma_1 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\varphi(r_1)}}{r_1}.$$

Weiterhin ist:

$$\varphi(r_1) = \int_0^{r_1} \nu\, d\, r = \nu_1 r_1,$$

wo ν_1 ein zwischen größtem und kleinstem Wert von ν liegender Durchschnittswert ist. Unter der Voraussetzung genügend kleiner ν wird also sein: $\Gamma_1 = \frac{\nu_1}{2}$, und es wird:

$$\pi_1 - \pi < 0.''1\, \nu_1.$$

Was die Größe von ν betrifft, so habe ich in verschiedenen Ansätzen in (III) Schätzungen vorgenommen aus einem doch wohl zulässigen Prinzip heraus, nämlich dem, daß es unwahrscheinlich sein dürfte, die wirkliche räumliche Dichtigkeit sollte auf größere Strecken mit der Entfernung zunehmen. Merkwürdig ist immerhin, daß meine Schätzungen ungefähr übereinstimmen mit den Versuchen, ν aus der Bestimmung des Farbenindex durch Vergleichung photographischer und photometrischer Intensitäts-Bestimmungen abzuleiten. Allerdings müssen die dabei benutzten Ansätze zum Teil als willkürlich, zum Teil als unzulässig angesehen werden und von der Form dieser Ansätze hängt die schließliche zahlenmäßige Bestimmung der durchschnittlichen Größe der Extinktion ab. Auch neuerdings angestellte Versuche in dieser Richtung sind im Prinzip keineswegs einwandfrei. Ich hoffe auf diesen Gegenstand bei späterer Gelegenheit zurückzukommen. Jedenfalls dürfte es kaum zweifelhaft sein, daß z. B. bei der „allgemeinen Extinktion" die Größe ν bedeutend kleiner als etwa $\frac{1}{1000}$ ist. Dann aber wird $\pi_1 - \pi < 0''.0001$. Die Extinktion spielt demnach bei Sternen, die heller als etwa von der 10. Größe sind, kaum eine Rolle, da hier π gewöhnlich zu etwa $0''.003$ angesetzt wird.