Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Weingartenschen Flächen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 21. Juni 1919.

Bekanntlich hat Weingarten gelehrt, wie man auf einer beliebigen Fläche Parameter einführen kann, die zu Systemen sogenannter „konfokaler Ellipsen und Hyperbeln" gehören, d. h. zu Kurven, für welche die Summe oder die Differenz der geodätischen Entfernungen ihrer Punkte von zwei willkürlich auf der Fläche gewählten festen Kurven (oder Punkten) konstant ist. Indem er solche Kurvensysteme auf der Kugel konstruierte und als das sphärische Bild der Krümmungskurven einer Fläche betrachtete, gelang es ihm, alle Flächen zu bestimmen, zwischen deren Krümmungsradien die Relation

$$2(\varrho'' - \varrho') = \sin(2\varrho' + 2\varrho'')$$

erfüllt ist. Im folgenden soll dieser Gedanke dadurch verallgemeinert werden, daß die geodätischen Entfernungen des bewegten Punktes von den beiden festen Kurven nicht senkrecht zu diesen, sondern unter konstantem Winkel gegen dieselben gemessen werden. Es ergeben sich dann ganz analoge Rechnungen, und die entstehenden Flächen sind zu den durch obige Relation charakterisierten Flächen ähnlich.

1. Auf einer beliebigen Fläche bestimmen wir einen Punkt durch eine Schar von geodätischen Linien $\sigma =$ Konst. und durch die Schar von Kurven $u =$ Konst., welche diese Linien

[1]) Crelles Journal, Bd. 62, 1863.

unter konstantem Winkel w schneiden; dann ist das Quadrat des Linienelementes ds von der Form

$$(1)\qquad ds^2 = du^2 + 2m\cos w\,du\,d\sigma + m^2\,d\sigma^2,$$

wo m eine Funktion von u allein ist. Wird derselbe Punkt durch eine andere Schar von geodätischen Linien $\tau =$ Konst. und deren Trajektorien unter dem Winkel w' ($v =$ Konst.) bestimmt, so ist auch

$$(2)\qquad ds^2 = dv^2 + 2n\cos w'\,dv\,d\tau + n^2\,d\tau^2,$$

wo n eine Funktion von v allein ist. Führt man endlich die Parameter u und v ein, so werde

$$(3)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

wo E, F, G Funktionen von u und v bedeuten. Es sei ferner

$$(4)\qquad dv = \alpha\,du + \beta\,d\sigma,$$

dann wird:

$$ds^2 - du^2 = (E - 1 + 2F\alpha + G\alpha^2)\,du^2 + 2(F\beta + G\alpha\beta)\,du\,d\sigma + \beta^2 G\,d\sigma^2 = 2m\cos w\,du\,d\sigma + m^2\,d\sigma^2.$$

Es ergibt sich also:

$$E + 2F\alpha + G\alpha^2 = 1,$$
$$\beta(F + \alpha G) = m\cdot\cos w,\quad \beta^2 G = m^2,$$

und hieraus:

$$F + \alpha G = \cos w\sqrt{G},$$
$$(5)\qquad EG - F^2 = G\cdot\sin^2 w.$$

In analoger Weise wird die Transformation des Linienelements von der Form (2) auf die Form (3) durch den Ansatz

$$(6)\qquad du = \gamma\,dv + \delta\,d\tau$$

vermittelt; und dann ergibt sich

$$(7)\qquad EG - F^2 = E\cdot\sin^2 w'.$$

Sei zur Abkürzung

$$a^2 = \sin^2 w,\quad b^2 = \sin^2 w',$$

so erhalten wir aus (3), (5) und (7), da $aG = bE$:

$$ds^2 \cdot a^2 = E(a^2\,du^2 + b^2\,dv^2) + 2ab\sqrt{E(E-a)}\,du\,dv$$

und mittels der Transformation

(8) $$du = b(dp + dq),\quad dv = a(dp - dq),$$

weiter:

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2b^2\left[(E + \sqrt{E}\sqrt{E-a^2})\,dp^2 + (E - \sqrt{E}\sqrt{E-a^2})\,dq^2\right] \\ &= 2a^2\left[(G + \sqrt{G}\sqrt{G-b^2})\,dp^2 + (G - \sqrt{G}\sqrt{G-b^2})\,dq^2\right]. \end{aligned}$$

Die durch (8) definierten Kurven $p =$ Konst. und $q =$ Konst. ergeben also auf einer beliebigen Fläche ein System von Parameterkurven, durch welche das Quadrat des Linienelementes die Form

(9) $$ds^2 = e\,dp^2 + g\,dq^2$$

annimmt, wobei zwischen e und g die Relationen bestehen:

$$e + g = 2b^2E,\quad eg = 4b^4a^2E,$$

also auch

(10) $$\frac{1}{e} + \frac{1}{g} = a^2b^2.$$

Führt man neue Variable p', q' durch die Gleichungen

$$p' = pab,\quad q' = qab$$

ein und gehen e und g dadurch in e' und g' über, so wird die Relation (10):

(11) $$\frac{1}{e'} + \frac{1}{g'} = 1.$$

Das Kurvensystem $p =$ Konst., $q =$ Konst. ist also nicht wesentlich verschieden von dem System, das Weingarten eingeführt hat und bei dem $a = b = 1$ war.

2. Im allgemeinen ist es in der Flächentheorie unwesentlich, ob man statt der Parameter p und q Funktionen von p bzw. q als neue Variable einführt. Betrachtet man aber e

und g als Fundamentalgrößen des sphärischen Bildes einer Fläche und will man von diesem Bilde nach Weingartner zu der Fläche selbst übergehen, so können sich aus demselben Kurvensysteme der Bildkurven verschiedene (wenn auch einander verwandte) Flächen ergeben, wenn man die Parameter p, q in angegebener Weise transformiert.

Bei den Minimalflächen tritt dies noch nicht hervor. Sind p, q die Parameter der Bildkurven der Krümmungslinien, so sind die Flächen durch die Gleichung $e = g$ charakterisiert. Geht man statt dessen von der allgemeineren Gleichung

(12) $$e = a^2 g$$

aus, wo a eine Konstante bedeutet, und setzt mit Weingarten

(13) $$e = \frac{1}{k^2}, \quad g = \frac{1}{\theta'(k)^2},$$

so werden bekanntlich die Hauptkrümmungs-Halbmesser ϱ' und ϱ'' der betreffenden Fläche

(13a) $$\varrho' = \theta(k), \quad \varrho'' = \theta(k) - k\theta'(k).$$

und aus (12) folgt:

$$\varrho' = \theta = \tfrac{1}{2} a k^2 + C, \quad \varrho'' = C - \tfrac{1}{2} a k^2,$$

also:

$$\varrho' + \varrho'' = C;$$

d. h. es ergeben sich die Parallelflächen der Minimalflächen, und der Konstanten a kommt keine wesentliche Bedeutung zu.

Für Flächen konstanten Krümmungsmaßes ($= a^2$) ist bekanntlich

(14) $$e = g + a^2.$$

Schreiben wir αp statt p und βq statt q, so haben wir allgemein

$$\alpha^2 e = \beta^2 g + a^2$$

Die Gleichungen (13) und (13a) ergeben dann

$$\varrho' = C - \frac{\beta}{a^2}\sqrt{a^2 - a^2 k^2}, \quad \varrho'' = C - \frac{a^2 \beta}{\sqrt{a^2 - a^2 k^2}}$$

$$(\varrho' - C)(\varrho'' - C) = \frac{a^2 \beta^2}{a^2},$$

d. h. eine Parallelfläche zur Fläche mit dem Krümmungsmaß $a^2 \beta^2 a^{-2}$, und das Linienelement der einen Schale der Evolutenfläche ergibt

(15) $$d\sigma^2 = \theta'^2 dk^2 + k^2 dq^2 = [1 + F'(r)^2]\, dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

wenn $k = mr$, $mq = \varphi$ gewählt wird, wo m eine willkürliche Konstante bedeutet. Diese Fläche ist auf die Rotationsfläche

(16) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = F(r)$$

abwickelbar, und man findet:

(17) $$F(r) = \int \sqrt{\frac{m^2 r^2 (m^2 \beta^2 - a^2) - a^2}{a^2 - m^2 a^2 r^2}} \cdot dr.$$

Die Flächen vom Krümmungsmaße $a^2 \beta^2 a^{-2}$ sind ähnlich den Flächen vom Krümmungsmaße a^{-2}. Auch die zugehörigen Schalen der Evolutenflächen müssen daher einander ähnlich sein, und folglich auch die Rotationsflächen, auf welche diese Schalen abwickelbar sind. In der Tat geht die durch die Gleichungen (16) und (17) dargestellte Rotationsfläche durch die Substitution

$$m = \frac{n}{\beta}, \quad r = \varrho a \beta, \quad x = \xi a \beta, \quad y = \eta a \beta, \quad z = \zeta a \beta$$

in die Fläche:

$$\xi = \varrho\cos\varphi, \quad \eta = \varrho\sin\varphi, \quad \zeta = f(\varrho), \text{ wo}$$

$$f(\varrho) = \int \sqrt{\frac{n^2 \varrho^2 (n^2 - a^2) - 1}{1 - n^2 \varrho^2}}\, d\varrho$$

über, d. h. in eine Fläche, welche dem Falle $a\beta = 1$ entspricht.

3. Zu der in Nr. 1 begonnenen Betrachtung zurückkehrend, schreiben wir die Gleichung (10) in der allgemeineren Form

$$(18) \qquad \frac{\alpha^2}{e} + \frac{\beta^2}{g} = \gamma^2.$$

Dann wird zufolge (13):

$$\alpha^2 k^2 + \beta^2 \theta'(k)^2 = \gamma^2,$$

also, wenn C eine Integrationskonstante bedeutet:

$$\varrho' = \theta(k) = C + \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta}\left[\frac{\alpha}{\gamma} k \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 k^2}{\gamma^2}} + \arcsin\frac{\alpha k}{\gamma}\right]$$

$$\varrho'' = \theta - k\theta' = C + \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta}\left[\arcsin\frac{\alpha k}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} k \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 k^2}{\gamma^2}}\right].$$

Zwischen den Hauptkrümmungsradien der Fläche, deren sphärisches Bild durch die Gleichung (18) charakterisiert ist, besteht somit die Relation:

$$\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}(\varrho' - \varrho'') = \sin\left(C + \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}(\varrho' + \varrho'')\right).$$

Die Fläche ist also eine Parallelfläche zu der Fläche, für welche die Relation

$$(19) \qquad (\varrho' - \varrho'')\, a^2 = \sin(a^2(\varrho' + \varrho'')), \quad \text{wo:}\ a^2 = \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}$$

erfüllt ist. Um die Rotationsflächen (16) zu finden, auf welche der eine Mantel der Evolutenfläche abwickelbar ist, haben wir wieder

$$k = mr, \quad 1 + F'(r)^2 = m^2\theta'^2$$

zu setzen; und es wird:

$$F(r) = \frac{1}{\beta}\int \sqrt{m^2\gamma^2 - \alpha^2 m^4 r^2 - \beta^2} \cdot dr,$$

und insbesondere, wenn $m\gamma^2 = \beta^2$ gewählt wird:

$$F(r) = i\,\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\,\frac{r^2}{2}.$$

Der eine Mantel der Evolutenflächen der durch die Gleichungen (18) oder (19) bestimmten Flächen ist also auf das imaginäre Rotationsparaboloid

$$\frac{i}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}z \tag{20}$$

abwickelbar, d. h. auf eine zu dem Paraboloide, das sich für $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ergibt, ähnliche Fläche.

Legt man demnach als sphärisches Bild der Krümmungslinien das in Nr. 1 mittels der Winkel w und w' konstruierte Kurvensystem $dp = 0$, $dq = 0$ zu Grunde, so wird man zu Flächen geführt, weche den Weingartenschen Flächen ähnlich sind.

4. Durch die Substitution

$$\alpha k = \gamma \cdot \sin\frac{w}{2}$$

bringen wir das Quadrat des Linienelementes für den einen Mantel der Evolutenfläche auf die Form

$$\alpha^2\beta^2 d\sigma^2 = \tfrac{1}{4}\gamma^4 \cos^4\frac{w}{2} \cdot dw^2 + \gamma^2 \sin^2\frac{w}{2} \cdot dq^2,$$

und weiter, wenn wir eine neue Konstante $\varkappa$ einführen und auch q transformieren:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{4\varkappa^2}\cos^4\frac{w}{2} \cdot dw^2 + \sin^2\frac{w}{2} \cdot dv^2, \tag{21}$$

wo $\gamma^2\varkappa = \alpha\beta, \quad \alpha v = \gamma q.$

Wie Darboux angibt[1]), sind Flächen mit dem Linienelemente (21) auf das Paraboloid (20) abwickelbar, was mit unserem Resultate übereinstimmt.

Bianchi[2]) kommt auf diese Flächen als Brennflächen gewisser Strahlensysteme; nach ihm sollen die Flächen mit dem Linienelement der Form

---

[1]) Théorie générale des surfaces, t. III, 1890, S. 370.

[2]) Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, 2. Aufl., Leipzig 1910, S. 332.

$$(22)\qquad d\,s^2 = \frac{a^2}{4\,m^2}\left(\cosin^4\frac{w}{2}\cdot d\,w^2 + \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{w}{2}\cdot d\,\beta^2\right)$$

als Evolutenflächen zu denjenigen Flächen gehören, zwischen deren Krümmungsradien die Relation

$$(23)\qquad m\,(\varrho'' - \varrho') = \sin\left[m\,(\varrho'' + \varrho')\right]$$

erfüllt ist. Der Vergleich mit (19) lehrt, daß hier

$$m = \frac{2\,a\,\beta}{\gamma^2}$$

sein müßte; die zu dem Linienelemente (22) gehörenden Flächen genügen demnach der Relation, welche aus Gleichung (23) entsteht, wenn man in letzterer m durch $\frac{2\,m}{a}$ ersetzt.