Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

München.
Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche.

Von S. Günther.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Jede Aufgabe der ebenen Polygonometrie gestattet eine doppelte räumliche Erweiterung. An die Stelle der ebenen Figur von n Seiten kann eine solche von $(n-1)$ Seiten treten, während der n^{te} Eckpunkt in den Raum verlegt wird, so dass man es also mit einer $(n-1)$ seitigen Pyramide zu tun bekommt; andererseits kann man das ebene Polygon durch ein sphärisches ersetzen. Dies trifft also natürlich auch zu für die fälschlich als Pothenot'sches Problem[1]) bezeichnete Viereckskonstruktion. Dass es von Interesse ist, beide Ausdehnungen auf die dritte Dimension auch für dieses Problem durchzuführen, hat Finsterwalder dargetan, und zwar handelt es sich in beiden Fällen um photogrammetrische Anwendungen. Kennt man die drei Winkel, welche die von einem ausserhalb der Ebene des Dreieckes ABC gelegenen Punkte D nach den Eckpunkten gezogenen Visierstrahlen wechselseitig einschliessen,

[1]) Dasselbe wurde ziemlich gleichzeitig, und zwar in vollster gegenseitiger Unabhängigkeit, zu Anfang des XVII. Jahrhunderts von dem Holländer W. Snellius und von dem Württemberger Schickhart zeichnerisch gelöst. Beide hätten also ein Anrecht darauf, als Namengeber geehrt zu werden, wogegen Pothenot auf die gleiche Konstruktion erst 1692, anlässlich der Kartierung des Flusses Eure, geführt wurde. Vgl. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Band, Stuttgart 1888, S. 251; v. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, 2. Band, ebenda 1890, S. 177; Günther, Handbuch der mathematischen Geographie, ebenda 1890, S. 560.

so kann die Lage des Punktes D rechnerisch oder konstruktiv ermittelt werden.[1]) Und wenn es sich um die Bestimmung der sogenannten Kernpunkte handelt, so leistet das sphärische Problem subsidiäre Dienste.[2]) Dasselbe ist aber auch dazu berufen, eine gewisse Rolle bei der geographischen Ortsbestimmung zu spielen, und demgemäss gewinnt es für die wissenschaftliche Geographie eine zweifache Bedeutung. Dieser Umstand wird es rechtfertigen, dass ihm in einer besonderen Ausführung näher getreten werden soll.

In der Sphärik kommt schon frühzeitig vor jenes Kugelviereck, welches durch Pol, Zenit und zwei Sternörter bestimmt ist. Die Griechen allerdings hatten keine Veranlassung, sich mit ihm zu beschäftigen, wohl aber wurden die Araber durch die von ihnen mit grösstem Eifer behandelten gnomonischen Fragen darauf geführt.[3]) Späterhin nötigte zur analytischen Untersuchung desselben sphärischen Viereckes das von den Nautikern viel erörterte Douwes'sche Problem,[4])

---

[1]) Finsterwalder, Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen, Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., II. Klasse, 22. Band, 2. Abteilung, S. 231.

[2]) Finsterwalder-Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raume, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., II. Klasse, 33. Band, S. 591 ff.

[3]) Die betreffenden Vorschriften finden sich in dem von Ibn Junis um das Jahr 1000 n. Chr. bearbeiteten „Hakemitischen" Tafeln (Caussin, Le livre de la grande table Hakémite, An XII = 1804). Ableitung und Beweis fehlen, und der von R. Wolf ausgegangene, an sich durch Eleganz ausgezeichnete Rekonstruktionsversuch (Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 3. Halbband, Zürich 1892, S. 78) trifft wohl kaum das Richtige. Es lassen sich nämlich die Formeln des Ibn Junis nach v. Braunmühl (Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie, Abhandl. d. Kaiserl. Leop.-Karol. Akademie, 71. Band, S. 24 ff.) ziemlich einfach durch die Orthogonalprojektion der Kugel gewinnen, also durch ein Verfahren, welches bereits im Altertum vielseitige Anwendung gefunden hatte und den arabischen Mathematikern näher als irgend ein anderes liegen musste.

[4]) Douwes, Verhandeling, om buiten den middag op zee de waare middagsbreedte te vinden, Haarlem 1755.

welches die geographische Breite aus zwei Höhen des nämlichen Sternes und der Zwischenzeit zwischen beiden Beobachtungen zu berechnen verlangt, allein auch da genügt eine quadratische Gleichung.[1]) Das Pothenot'sche Problem dagegen gestattet keine so einfache Auflösung.

Dasselbe ist bis jetzt erst ein paarmal in der Literatur aufgetreten. Als der erste hat es anscheinend Grunert[2]) vorgenommen, der aber auf praktische Verwendung gar keine Rücksicht nahm. Nächstdem suchte es Rümker[3]) für die Polhöhenbestimmung nutzbar zu machen, und Erwähnung wird seiner auch von Weyer[4]) getan. Rümkers Methode stimmt mit derjenigen Grunerts vollkommen überein. Übrigens ist seine Art der Einkleidung eine umständlichere, als es an und für sich geboten erscheint. Er setzt nämlich voraus, dass von drei ihrer Lage nach bekannten Fixsternen gleichzeitig die Azimutaldifferenzen gemessen worden seien, und berechnet sodann deren Zenitdistanzen. Alsdann aber muss erst noch ein

---

[1]) Die Benennung ist auch diesmal nicht die geschichtlich korrekte, denn Maupertius (Astronomie nautique, Paris 1751, S. 41 ff.) hatte schon vorher eine freilich umständliche Lösung der Douwes' Namen tragenden Aufgabe erbracht. Vgl. auch Mendoza, Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'astronomie nautique, London 1797.

[2]) Grunert, Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel, Archiv d. Math. u. Phys., 7. Teil, S. 104 ff.

[3]) Rümker, Handbuch der Schiffahrtskunde, Hamburg 1850, S. 162 ff.

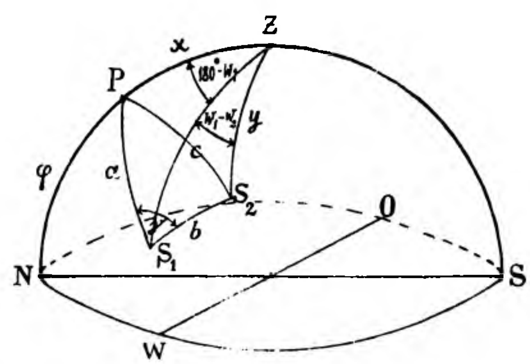
[4]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, Allgemeine Enzyklopädie der Physik (von G. Karsten), 1. Band, Leipzig 1869, S. 738; Vorlesungen über nautische Astronomie, Kiel 1871, S. 99). Wenn man die Angaben dieses Autors über verwandte ältere Arbeiten nachliest, so muss man eigentlich auf den Gedanken kommen, jenes Problem der Kugelgeometrie besitze tatsächlich eine ältere Vorgeschichte. Aus dem XVIII. Jahrhundert werden D. Bernoulli, Hermann, L. Euler, Krafft, F. C. Maier und Pézenas, aus dem XX. werden J. J. v. Littrow, Brünnow, Boehm in dieser Hinsicht namhaft gemacht. Sieht man aber genauer zu, so überzeugt man sich, dass alle die Aufgaben, mit denen sich die Genannten befassen, weit einfacherer Natur sind. Bei keiner dieser Arten der Breitenbestimmung ist die Schlussgleichung eine höhere als eine quadratische; ja bei richtiger Behandlung reicht man sogar, wie u. a. D. Bernoulli (Comm. Acad. Imp. Petrop., 4. Band, 1735) zeigt, mit einer linearen Gleichung aus.

weiteres Dreieck Zenit-Pol-Stern in Angriff genommen werden. Einfacher jedoch und natürlicher wird die Problemstellung die folgende sein:

Im nämlichen Zeitpunkte sind von zwei Sternen, deren Aequatorkoordinaten man kennt, die Azimutalwinkel gemessen worden. Alsdann ist das Pothenot'sche Problem der Sphärik anzuwenden auf das Viereck, welches jene beiden Sterne mit Pol und Zenit bestimmen.

In Fig. 1 bezeichne S den Südpunkt, W den Westpunkt, N den Nordpunkt, O den Ostpunkt des Horizontes, P den

Fig. 1.



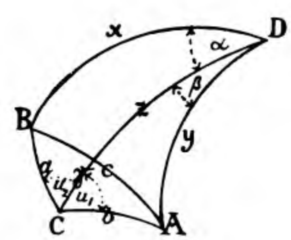
Pol, Z den Scheitelpunkt. S_1 und S_2 sollen die beiden erwähnten Sterne sein, und dann kennt man die Poldistanzen PS_1 und PS_2, sowie die Rektaszensionsdifferenz $\sphericalangle S_1 P S_2$. Das Dreieck $PS_1 S_2$ ist vollständig bekannt, somit auch die Seite $S_1 S_2$. Durch unmittelbare Beachtung hat man gefunden die Azimute $w_1 = \sphericalangle SZS_1$ und $w_2 = \sphericalangle SZS_2$; demnach ist auch $\sphericalangle S_1 ZP = 180^0 - w_1$ und $\sphericalangle S_2 Z S_1 = w_1 - w_2$ ermittelt. Im Viereck $PZS_2 S_1$ kennt man die Seiten PS_1 und $S_1 S_2$, die eine Diagonale PS_2 und die beiden Winkel $(180^0 - w_1)$ und $(w_1 - w_2)$, welche die andere Diagonale mit den beiden unbekannten Seiten ZS_2 und PZ einschliesst. Diese letztere ist das Komplement der Polhöhe φ.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man in der Praxis von diesem Verfahren häufiger Gebrauch machen werde, ist keine grosse, obwohl Rümker (a. a. O) ein Beispiel durchrechnet. Einmal ist hinderlich, dass zwei Beobachter vorausgesetzt werden, und weiterhin fallen, wie sich zeigen wird, die Schlussformeln viel zu kompliziert aus, um eine leichte Handhabung zu ermöglichen. Abgesehen davon wäre der Vorteil erreicht, den Refraktionsfehler gänzlich ausschalten zu können, falls nicht die doch nur sehr selten bemerkbare Lateralrefraktion sich geltend machen sollte.[1]) Die hier gegebene Art der Behandlung will lediglich als eine solche angesehen werden, die ein geometrisches Interesse darbietet. Grunert und Rümker bedienen sich eines Kunstgriffes, der zunächst zu übersichtlicheren Formeln zu führen scheint, in unserem Falle hingegen, wenn die Berechnung der Seite PZ direkt angestrebt wird, keinen Vorteil gewährt. Unsere Absicht ist es, eine Gleichung aufzustellen, in welcher φ als einzige Unbekannte vorkommt. Dazu bedarf es zwar einiger nicht ganz einfachen Eliminationen, aber unter dem mathematischen Gesichtspunkte lässt sich das Ziel in durchaus befriedigender Weise erreichen.

Um ganz unabhängig von jeder astronomisch-geographischen oder geodätischen Voraussetzung vorzugehen, legen wir das beliebig gewählte sphärische Viereck $ACBD$ (Fig. 2) zu grunde. In ihm kennen wir Seite $BC = a$, Seite $AC = b$, Diagonale $AB = c$, mithin auch $\sphericalangle ACB = \gamma$ gleich

$\arccos[(\cos c - \cos a \cos b) : \sin a \sin b]$.

Fig. 2.



Wenn ferner noch die Diagonale CD gezogen wird, so sind $\sphericalangle BDC = \alpha$ und $\sphericalangle CDA = \beta$ gegeben. Gesucht wird Seite $BD = x$.

Die Gleichungen, auf welche man sich geführt sieht, wenn man den nächstliegenden Weg zur Berechnung der gesuchten Werte beschreitet, gestalten sich bei beiden Raumausdehnungen des Pothenot'schen Problemes gleich unhandlich. Setzen wir noch $AD = y$, $CD = z$, so liefert der Kosinussatz ohneweiters drei Bestimmungsgleichungen für die drei Gleichungen x, y, z; ebenso, wie dies zutrifft, wenn man in dem vorbesprochenen Tetraëder nach Finsterwalder-Scheufele mit a, b, c die Seiten des Basisdreieckes, mit α, β, γ die diesen an der Spitze gegenüberliegenden Winkel, endlich mit x, y, z die Sehstrahlen so bezeichnet, dass a mit x und z, b mit z und y, c mit y und x je ein Seitendreieck bestimmt, und sodann den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie zur Anwendung bringt. Wir stellen die beiden Tripel von Gleichungen nebeneinander, wie folgt:[1])

I. Kugelfläche.

$$\begin{aligned}
\cos x \cos z + \sin x \sin z \cos \alpha &= \cos a, \\
\cos z \cos y + \sin z \sin y \cos \beta &= \cos b, \\
\cos y \cos x + \sin y \sin x \cos (\alpha + \beta) &= \cos c.
\end{aligned}$$

II. Tetraëder.

$$\begin{aligned}
x^2 + z^2 - 2\,x\,z \cos \alpha &= a^2, \\
z^2 + y^2 - 2\,z\,y \cos \beta &= b^2, \\
y^2 + x^2 - 2\,y\,x \cos \gamma &= c^2.
\end{aligned}$$

[1]) Es musste hier eine unwesentliche Änderung der (a. a. O.) gewählten Bezeichnungsweise platzgreifen, um den Parallelismus zwischen den beiden Systemen recht klar hervortreten zu lassen. Diese letzteren müssen, wenn der vierte Eckpunkt in die Basisebene fällt, und wenn andererseits der Radius der Kugel unendlich gross wird, zur Identität gelangen. Wirklich wird bei ersterer Voraussetzung $\gamma = \alpha + \beta$; die goniometrischen Funktionen aber kann man durch ihre Reihen ausdrücken und von diesen nur die ersten Glieder beibehalten. Nehmen wir also etwa die dritte Gleichung von System I heraus und verfahren mit ihr in diesem Sinne, so erhalten wir:

$$\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + y\,x \cos \gamma = 1 - \frac{c^2}{2},$$

$$2 - y^2 - x^2 + \tfrac{1}{2}\, y^2 x^2 + 2\,y\,x \cos \gamma = 2 - c^2.$$

Da $y^2 x^2$ einer tieferen Grössenordnung angehört, so fällt dieses Produkt ausser betracht; und man ist folglich zu Gleichung 3 von System I gekommen. Solchergestalt lassen sich überhaupt in allen Fällen die beiden Ausdehnungen eines planimetrischen Problemes auf den Raum als in ihrem inneren Wesen übereinstimmend nachweisen.

Im zweiten Falle würde eine Gleichung sechsten Grades zu lösen sein. Weit schlimmer jedoch, als bei System II, würde sich schon die Wegschaffung auch nur einer Unbekannten bei System I gestalten; ein noch weiteres Vorgehen wäre geradezu untunlich. Man wird vielmehr bestrebt sein müssen, andere unbekannte Grössen einzuführen.

Als solche empfehlen sich Seite $BD = x$, Seite $AD = y$, $\sphericalangle ACD = u_1$ und $\sphericalangle DCB = u_2$. Die vier Bedingungsgleichungen sind jetzt die nachstehenden:

$$\text{I)} \qquad \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos(\alpha + \beta) = \cos c,$$

$$\text{II)} \qquad u_1 + u_2 = \gamma,$$

$$\text{III)} \qquad \frac{\sin x}{\sin u_2} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \equiv \frac{1}{m},$$

$$\text{IV)} \qquad \frac{\sin y}{\sin u_1} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \equiv \frac{1}{n}.$$

Es gilt, aus denselben die drei Grössen y, u_1, u_2 zu eliminieren. Das geschieht, indem man u_2 aus III), u_1 aus IV) isoliert und beide Werte in II) einsetzt, indem dann nur zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y übrig bleiben. Zunächst ist

$$\sin u_2 = m \sin x, \quad \sin u_1 = n \sin y;$$

aus Gleichung II) folgt

$$\cos u_2 \cos u_1 - \sin u_2 \sin u_1 = \cos \gamma,$$

und so erhält man weiter:

$$\cos u_2 \cos u_1 = \cos \gamma + m n \sin x \sin y,$$

$$(1 - m^2 \sin^2 x)(1 - n^2 \sin^2 y) = (\cos \gamma + m n \sin x \sin y)^2,$$

$$1 - m^2 \sin^2 x - n^2 \sin^2 y = \cos^2 \gamma + 2 m n \cos \gamma \sin x \sin y.$$

Ordnet man, indem man $\sin x = \xi$, $\sin y = \eta$ setzt, die letztere Gleichung um, so nimmt sie die folgende einfachere Gestalt an:

$$\text{V)} \qquad m^2 \xi^2 + 2 m n \cos \gamma\, \xi \eta + n^2 \eta^2 = \sin^2 \gamma.$$

Die Gleichung I) können wir ähnlich umgestalten:

$$\cos x \cos y = \cos c - \sin x \sin y \cos(\alpha + \beta),$$
$$(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) = [\cos c - \xi \eta \cos(\alpha + \beta)]^2,$$

$$\text{VI)} \quad \xi^2 \eta^2 \sin^2(\alpha + \beta) + 2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \xi \eta - \xi^2 - \eta^2 = -\sin^2 c.$$

Nunmehr besteht keine Schwierigkeit mehr, η mit Hilfe der Sylvester'schen Determinante zu beseitigen, indem wir zuvor beide Gleichungen nach Potenzen von η ordnen. So findet sich als neues Paar:

$$\eta^2 [1 - \xi^2 \sin^2(\alpha + \beta)] - \eta \cdot 2 \xi \cos c \cos(\alpha + \beta) + (\xi^2 - \sin^2 c) = 0,$$
$$\eta^2 \cdot n^2 + \eta \cdot 2 \xi m n \cos \gamma + (\xi^2 m^2 - \sin^2 \gamma) = 0.$$

Die Elimination von η liefert die Schlussgleichung

$$\text{VII)} \quad \begin{vmatrix} 1 - \xi^2 \sin^2(\alpha+\beta) & -2\xi \cos c \cos(\alpha+\beta) & \xi^2 - \sin^2 c & 0 \\ 0 & 1 - \xi^2 \sin^2(\alpha+\beta) & -2\xi \cos c \cos(\alpha+\beta) & \xi^2 - \sin^2 c \\ n^2 & 2 \xi m n \cos \gamma & \xi^2 m^2 - \sin^2 \gamma & 0 \\ 0 & n^2 & 2 \xi m n \cos \gamma & \xi^2 m^2 - \sin^2 \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnet man die Determinante aus und beachtet, dass $\xi = \sin x = \sin(90^0 - \varphi) = \cos \varphi$ ist, so stellt sich die Schlussgleichung in expliziter Form folgendermassen dar:

$$\begin{aligned} \text{VIII)} \quad & \cos^8 \varphi \, m^4 \sin^2 \gamma \sin^4(\alpha + \beta) \\ & - 2 \cos^6 \varphi \, (m^4 \sin^2(\alpha+\beta) + 2 m^3 n \cos c \cos \gamma \sin^2(\alpha+\beta) \cos(\alpha+\beta) \\ & \qquad + 2 m^2 n^2 \cos^2 \gamma \sin^2(\alpha + \beta) + m^2 \sin^2 \gamma \sin^2(\alpha + \beta) \\ & \qquad - 2 m n^3 \cos c \sin^2 c \cos \gamma \cos(\alpha + \beta)) \\ & + \cos^4 \varphi \, (m^4 + 4 m^3 n \cos c \cos \gamma \cos(\alpha + \beta) + 4 m^2 n^2 \cos^2 \gamma \\ & \qquad + 4 m^2 n^2 \cos^2(\alpha + \beta) + m^2 n^2 \sin^2 c \sin^2(\alpha + \beta) \\ & \qquad + 4 m^2 \sin^2 \gamma \sin^2(\alpha+\beta) + 4 m n^3 \sin^2 c \cos c \cos \gamma \cos(\alpha+\beta) \\ & \qquad + 4 m n \cos c \sin n^2 \gamma \cos \gamma \sin^2(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \\ & \qquad + \sin^2 \gamma \sin^2(\alpha + \beta) - n^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- 2\cos^2\varphi\,(+ m^2 \sin^2\gamma - 2\, m^2 n^2 \sin^2 c \cos^2\gamma \\
&\qquad + 2\, m n^3 \sin^2 c \cos c \cos\gamma \cos(\alpha+\beta) \\
&\qquad + 2\, m n \cos c \sin^2\gamma \cos\gamma \cos(\alpha+\beta) - n^4 \sin^2 c \\
&\qquad + 2\, n^2 \cos^2 c \sin^2\gamma \cos^2(\alpha+\beta) + 2 \sin^4\gamma \sin^2(\alpha+\beta)) \\
&+ (\sin^4\gamma - n^4 \sin^4 c) = 0.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung achten Grades ausschliesslich gerade Potenzen der Unbekannten $\cos\varphi$ aufweist, so reduziert sie sich sofort auf eine biquadratische, deren weitere Behandlung keine sachlichen Schwierigkeiten darbietet. Zuletzt ist $\alpha = 180^0 - w_1$, $\beta = w_1 - w_2$ zu setzen. Es ist zu bemerken, dass die Gleichung um nichts verwickelter als diejenige ist, welche Grunert und Rümker für die Hilfsgrösse tang $\frac{1}{2}(u_1 - u_2)$ ableiten; kennt man letztere, so hat erst wieder ein recht umständlicher Kalkul zur Bestimmung von $x = 90^0 - \varphi$ einzusetzen. Unsere Gleichung VIII) andererseits ergibt unmittelbar die geographische Breite als Funktion der äquatorialen Koordinaten jener beiden Sterne, deren Azimute gemessen worden waren, und damit zugleich die relativ einfachste Auflösung für das Pothenot'sche Problem auf der Sphäre.

Werke der menschlichen Erkenntnis sein und seine Befriedigung in dem Bewusstsein finden seinen Teil zur Mehrung der idealen Güter der Menschheit beigetragen zu haben. Dass er nicht nur ein einseitiger Naturforscher war, sondern von Jugend an einen regen Sinn für alles Gute und Schöne dieser Erde besass, erfuhr ich aus einem Briefe, den er mir nach seiner Wahl zum korrespondierenden Mitgliede unserer Akademie schrieb; er sagt darin, er habe als Knabe von 15 Jahren seine Verwandten mütterlicherseits in Regensburg und München besucht, „wobei alle die Herrlichkeiten, mit welchen König Ludwig I. von Bayern diese Städte ausgestattet hatte, in die leicht empfängliche Seele des Jünglings fielen, um immer lebendig zu bleiben."

Berichtigung

zu Prof. Günthers Abh. „Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche."

S. 117, Z. 7 v. u. muss es statt XX heissen XIX.
S. 117, Z. 19 v. o. lies Maupertuis statt Maupertius.
S. 119, Z. 10 v. o. ist zu streichen [1]).
S. 122, Z. 9 v. u. ist zu streichen $\sin^2 \gamma$.