Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1935. Heft I

Januar-April-Sitzung

München 1935
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Mit 4 Figuren.

Vorgelegt von H. Tietze in der Sitzung vom 2. Februar 1935

Einleitung.

0, 1. In der Theorie der reellen Bogen und Kurven ergibt sich bei näherem Zusehen die Möglichkeit verschiedener Definitionen z. B. des Index; insbesondere einer solchen, welche gegenüber der zumeist üblichen insofern etwas erweitert ist, als bei ihr nicht mehr *alle* Geraden der Ebene herangezogen werden, vielmehr von einer gewissen, nirgends dichten Teilmenge von Geraden abgesehen wird. Eine genauere Untersuchung der Bogen und Kurven unter Zugrundelegung der erweiterten Definition ist z. B. dadurch gerechtfertigt, daß man hierbei neben den Kurven vom Maximalindex im üblichen Sinne andere, neue Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne erhält.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Untersuchungen in der eben angedeuteten Richtung, wobei auch insofern ein etwas allgemeinerer Standpunkt als üblich eingenommen wird, als nicht nur Kurven sondern auch *Bogen*[1] zur Betrachtung herangezogen werden.

0, 2. Im einzelnen handelt es sich um folgendes: Es werden zunächst (§ 1) Bemerkungen allgemeinerer Natur zusammengestellt,

[1] Mit Ausnahme zweier Arbeiten von Herrn Rosenthal (Über Gebilde mit einzigem Ordnungsindex, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, 1922, S. 221 ff. und: Über die Nichtexistenz von Kontinuen in gewissen Mengen mit einziger Ordnungszahl, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1934, 13. Abh.) wurden unseres Wissens Gebilde vom Maximalindex oder allgemein von vorgegebenem Index bis jetzt nur für den Fall von *Kurven*, nicht aber von Bogen (vgl. indes S. 135/136 der in Fußnote 20 genannten Arbeit) oder von allgemeineren Punktmengen betrachtet. — Daß hierbei schon die Bogen in gewissem Sinne grundsätzlich Neues liefern können gegenüber den Kurven, erhellt z. B. aus der Tatsache, daß es Bogen von der (beliebig vorgeschriebenen) Ordnung n gibt, welche *nicht* Teilbogen von Kurven der gleichen Ordnung sind.

die sich beim Übergang zum Ordnungs- und Indexbegriff im weiteren Sinne ergeben. Sodann wird (§ 2) gezeigt, daß der Index eines beliebigen ebenen Bogens der Ordnung n („Ordnung" und „Index" auch im erweiterten Sinne verstanden) nicht größer sein kann als $(n-2)$. Daran anschließend werden (§ 3) Bogen (bzw. Kurven) konstruiert, welche die Ordnung n und den Index j besitzen, wobei n und j beliebig und *unabhängig voneinander* vorgeschrieben sind, wobei aber $j \leqq n-2$ (bzw. noch $j \equiv 0\ (n)$). Schließlich folgt (§ 4) die Kennzeichnung der stückweise konvexen Bogen vom Maximalindex im erweiterten Sinne durch eine Forderung, welche als die natürliche Verallgemeinerung der im Falle des Maximalindex im engeren Sinne üblichen Forderung anzusehen ist, daß eine Kurve vom Maximalindex keine mehrfache Tangente besitzen soll. Für den Fall $n=4$ sind die einteiligen Kurven vom Maximalindex im erweiterten Sinne bereits von Herrn Juel betrachtet und vollständig klassifiziert worden.[2] Hingegen scheint über die mehrteiligen Kurven 4. Ordnung vom Maximalindex im weiteren Sinne bisher nichts bekannt zu sein; wir zeigen hier (§ 5), daß diese Kurven stückweise konvex sind, d. h. daß die Umgebung einer jeden ihrer Stellen als Summe endlich vieler konvexer Bogen darstellbar ist.

§ 1. Ordnung und Index im engeren und im weiteren Sinne.

1, 1. Operationsbereich ist die *projektive Ebene* R_2, welche wir, was bekannterweise möglich ist, als kompakten Raum auffassen werden. Unter Bogen bzw. Kurven verstehen wir im folgenden eindeutige, stetige *keine Teilstrecke enthaltende* Streckenbilder bzw. Kreisbilder in der projektiven Ebene R_2. *Soweit nichts anderes ausdrücklich bemerkt wird, gelten die über Bogen gemachten Ausführungen gleichzeitig auch für Kurven.* Eine Gerade s heißt *Sekante* von $\mathfrak{B}$, wenn alle auf s gelegenen Stellen von $\mathfrak{B}$

---

[2] Juel, C., Om ikke-analytiske Kurver, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. R., naturvidensk. og mathem. Afd. I (1906), Nr. 6, S. 301 ff. Der Begriff des Maximalindex (im erweiterten Sinne) wird a. a. O. von Herrn Juel noch nicht verwendet. Herr Rosenthal, welchem ich den Hinweis auf diese Juelsche Arbeit verdanke, hat unabhängig von Herrn Juel und auf anderem Wege die Juelschen einschlägigen Ergebnisse wiedergefunden.

Schnittstellen[3] sind. Die Mächtigkeit der Menge dieser Schnittstellen heißt *Ordnung der Sekante* (bezüglich $\mathfrak{B}$). Die *Ordnung* bzw. der *Index im weiteren Sinne* (abgekürzt: *i. w. S.*) *von* $\mathfrak{B}$ sind dann gleich der maximalen bzw. minimalen Ordnung aller möglichen Sekanten. Es wird also bei der Definition von Ordnung und Index von $\mathfrak{B}$ nicht die Menge *aller* Geraden der Ebene R_2 zum Vergleich herangezogen, sondern nur eine Teilmenge, nämlich die der Sekanten von $\mathfrak{B}$. Hat $\mathfrak{B}$ endliche Ordnung, so ist diese Teilmenge dicht im Raume aller Geraden, während die Menge der Nicht-Sekanten dort nirgends dicht liegt;[4] dabei wird *im Falle endlicher oder auch beschränkter Ordnung noch gefordert, daß auch jede Nicht-Sekante nur endlich viele Stellen mit* $\mathfrak{B}$ *gemeinsam hat.*

Eine vielfach übliche Definition von Ordnung und Index, die wir, im Gegensatz zur obigen, als die *im engeren Sinne* (abgekürzt *i. e. S.*) bezeichnen wollen, zieht auch die Nichtsekanten heran. Um das an einem einfachen Beispiel zu erläutern: Es handle sich etwa um einen einfachen stückweise konvexen einmal stetig differenzierbaren[5] Bogen $\mathfrak{B}$ und um eine Gerade g,

---

[3] Ein auf dem Bogen $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt P der Ebene kann dabei mehreren Punkten der Urbildstrecke entsprechen. P, aufgefaßt als Bild eines *bestimmten* seiner Urbilder, heißt *Stelle* von $\mathfrak{B}$. Als *Vielfachheit* des Punktes P auf $\mathfrak{B}$ bezeichnet man die Mächtigkeit der in P vereinigt liegenden Stellen. Man beachte für das Folgende auch, daß die Urbilder eines jeden Punktes P nirgends dicht auf den Urbildstrecken liegen sollen. — Bezüglich der Begriffe Schnitt- und Stützstelle vgl. z. B. Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal, 164 (1931), S. 53. Der Begriff der Sekante ist dort anders definiert.

[4] Das folgt aus bekannten Sätzen, vgl. Fußnote 3, a. a. O., Nr. 1, 2; Zusatz 3. — Im Falle eines Bogens beschränkter Ordnung ließen sich übrigens bei der Definition der Ordnung auch die Nichtsekanten einbeziehen gemäß des „Reduktionssatzes", demzufolge in beliebiger Nachbarschaft einer *jeden* Geraden g, welche mit $\mathfrak{B}$ überhaupt Stellen, etwa n, gemeinsam hat, Sekanten liegen, welche mindestens n Schnittstellen tragen; dabei würden dann z. B. Stützstellen auf g nur einfach zu zählen sein.

Dieser Rückgriff auf den Reduktionssatz ist an sich nicht nötig, sobald man den Ordnungsbegriff, wie wir es hier tun, allgemein faßt, d. h. die *Vernachlässigung bestimmter, nirgends dichter Geradenmengen bei der Bestimmung der Ordnung gestattet.* Dieser Standpunkt empfiehlt sich unter Umständen bei komplizierteren Fragen, z. B. in Räumen von höherer Dimension.

[5] Ein Bogen $\mathfrak{B}$ (oder eine Kurve) heißt *n-mal stetig differenzierbar*, wenn für die Umgebung jeder seiner Stellen eine Darstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

welche im Punkte P Wendetangente und im Punkte Q gewöhnliche Tangente (Stützgerade) an $\mathfrak{B}$ ist. Dann pflegt man zur Bestimmung der Ordnung von $\mathfrak{B}$ den Punkt P für 3 und den Punkt Q für 2 Punkte gezählt in Anschlag zu bringen. Demzufolge

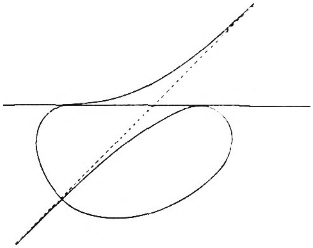

Fig. 1

besitzt die in *Figur 1* abgebildete Kurve die Ordnung 5 im engeren Sinne, hingegen die Ordnung 3 im weiteren Sinne. — Allgemein wird zur *Definition von Ordnung bzw. Index eines Bogens bzw. einer Kurve i. e. S.* verabredet, daß jede auf einer Geraden g gelegene Stelle P von $\mathfrak{B}$ einzeln für so viele Stellen zu zählen ist, als die maximale Mächtigkeit des Durchschnittes der *Umgebung* von P auf $\mathfrak{B}$ mit allen zu g hinreichend benachbarten Sekanten beträgt.[6]

1, 2. Das in Figur 1 (Nr. 1, 1) angegebene Beispiel beweist, daß die Ordnung im engeren Sinne von der Ordnung im weiteren Sinne verschieden sein kann; Entsprechendes gilt dann auch für den Index.

Dieses Beispiel bietet aber auch noch in anderer Richtung Interesse, nämlich als Kurve vom Maximalindex. Ein Bogen $\mathfrak{B}$ (oder eine Kurve) von n-ter Ordnung heißt dabei vom *Maximalindex*, wenn sein Index $(n - 2)$ beträgt.[7] Die Bezeichnung „Ma-

mit n-mal stetig differenzierbaren φ und ψ existiert. Ein Bogen (oder eine Kurve) heißt *stückweise konvex*, wenn eine einseitige Umgebung jeder seiner Stellen ein Konvexbogen ist.

[6] Vgl. Juel, C., Über Flächen vom Maximalindex, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Meddel. VI, 5, 1924, S. 5/6. — Es handelt sich also um die *Lokalisation* des Ordnungsbegriffes *bezüglich einer Stelle und bezüglich einer durch diese Stelle gehenden Geraden.* (Betr. den Begriff der Nachbarschaft einer Geraden, vgl. auch Fußnote 27.)

[7] Juel, C., Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Kegel-

ximalindex" ist dadurch begründet, daß — wie wir noch zeigen werden (§ 2) — der Index eines jeden Bogens der Ordnung n (i. e. oder) i. w. S. nicht größer ist als $(n-2)$ und daß (vgl. § 3) der Index $(n-2)$ für jedes n von geeigneten Bogen auch wirklich erreicht wird. Die Theorie der ebenen Gebilde von gegebenem Index ist bislang fast ausschließlich[1] für Kurven entwickelt worden,[8a b] und zwar nur für den Fall des Maximalindex und für sogenannte „*Elementarkurven*", d. h. für Kurven mit folgenden drei Eigenschaften: *Erstens* ist auf der Kurve überall eine stetige Tangente vorhanden, *zweitens* besitzt die Kurve nur *endlich viele Doppelpunkte* und *drittens* ist die Kurve *stückweise konvex*, mithin darstellbar als Summe von endlichen vielen Bogen zweiter Ordnung.[9] Darüber hinaus wurde *viertens* der *Ordnungs- und Indexbegriff im engeren Sinne* (vgl. Nr. 1, 1) zugrunde gelegt. Wir wollen hier auch Bogen zulassen und einen diesen vier Forderungen genügenden Bogen vom Maximalindex als „*Elementarbogen vom Maximalindex im engeren Sinne*" bezeichnen. Aus Viertens folgt *insbesondere*, daß keine *mehrfache Tangente* vorhanden sein darf, d. h. keine Gerade, welche in mehr als einer Stelle Tangente an $\mathfrak{B}$ ist. Und daraus folgt schon die Forderung Drittens (stückweise Konvexität), und zwar auch dann, wenn die Forderungen *Erstens* und *Zweitens* nicht erfüllt sind;[10 11] wie denn diese letzteren

fläche zweiter Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og mathem. Afd., 8. R., II, 5 (1917) S. 279 ff.

[8a] Vgl. die in der Arbeit Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven usw., Monatshefte f. Mathem. u. Phys. 40 (1933), Fußnote 1 und 2 angegebenen einschlägigen Arbeiten der Herren Juel, Mohrmann und Nagy.

[8b] Allgemeinere als Elementarkurven nur in meiner Arbeit: Zur Juelschen Theorie der reellen ebenen Kurven vierter Ordnung, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, Jahrg. 1925, S. 1 ff. Auch hier handelt es sich aber nur um den Ordnungs- bzw. Indexbegriff im engeren Sinne. Vgl. die Berichtigung in Fußnote 10 vorliegender Arbeit.

[9] Der Benennung „Elementarkurve" entsprechend werden wir jeden *Bogen*, welcher diesen drei (ersten) im Texte angegebenen Forderungen genügt, als *Elementarbogen* bezeichnen. — Man beachte, daß die dritte Forderung *keine* Folge der ersten und zweiten ist, wie einfache Beispiele zeigen.

[10] Vgl. Fußnote [8b]. Die dort zugrunde gelegte Definition von Ordnung und Index ist die im engeren Sinne. Die Definition (vgl. a. a. O., S. 2 oben) ist aber seinerzeit nicht vollständig angegeben worden und im Sinne der oben im Texte Nr. 1, 1 getroffenen Verabredung zu ergänzen, da man andernfalls

beiden Forderungen für die Theorie unwesentlich sind und leicht beseitigt werden können.

1, 3. Im folgenden soll nun, was nach dem Gesagten naheliegt, die Untersuchung auch auf *Bogen* vom Maximalindex ausgedehnt und dabei *einerseits* auf die Forderungen Erstens bis Drittens (Nr. 1, 2) verzichtet werden, es sollen also Ecken, Spitzen und Doppelpunkte in unbegrenzter Anzahl zugelassen sein, ferner Bogen, die nicht stückweise konvex sind; *andrerseits* aber, und vor allem, soll der (Ordnungs- und) Indexbegriff *im weiteren Sinne* (Nr. 1, 1) verwendet werden. Die so erhaltenen *Bogen (und Kurven)* seien als *vom Maximalindex im weiteren Sinne* bezeichnet.

Bei den *Bogen (und Kurven) vom Maximalindex im weiteren Sinne können nun mehrfache Tangenten auftreten.* Ein Beispiel hierfür bietet die bereits in Figur 1 (Nr. 1, 1) angeführte Kurve dritter Ordnung, welche vom Maximalindex i. w. S. ist und bei welcher die Wendetangente außer dem Wendepunkt noch einen zweiten

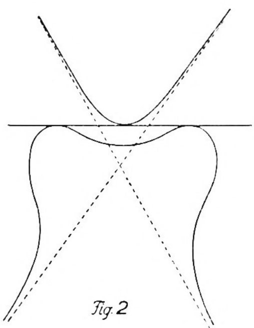
Fig. 2

Berührpunkt trägt. Ein zweites Beispiel ist in *Figur 2* angegeben; es ist das eine Kurve vierter Ordnung vom Maximalindex i. w. S. und mit dreifacher Tangente.[12]

nicht (vgl. auch die Untersuchungen oben im Text § 4) auf das Fehlen von Doppelstützgeraden bei Bogen beliebiger Ordnung vom Maximalindex schließen könnte.

[11] Man beachte, daß die Forderung des Fehlens mehrfacher Tangenten nur eine hinreichende, keineswegs aber eine notwendige Bedingung für stückweise Konvexität darstellt.

[12] Vgl. Fußnote 2, Juel, a. a. O., S. 302.

Zwischen den beiden soeben erwähnten Beispielen besteht indes ein grundlegender Unterschied: Die Kurve der Figur 1 kann durch beliebig kleine Abänderung in eine Kurve übergeführt werden, welche *keine* mehrfache Tangente mehr besitzt, aber trotzdem noch von dritter Ordnung und gleichzeitig vom Maximalindex bleibt. Wird hingegen die, etwa mit $\mathfrak{C}_4$ zu bezeichnende, Kurve der Figur 2 beliebig wenig so abgeändert, daß keine dreifache (sondern nur höchstens zweifache) Tangenten vorhanden sind, so wird sich — wie auch die Abänderung im übrigen vorgenommen ist — entweder die Kurvenordnung auf sechs erhöhen oder es wird sich der Index auf Null erniedrigen. M. a. W.: In beliebiger „Umgebung" unserer $\mathfrak{C}_4$ kommen *nur* solche Kurven *ohne* dreifache Tangenten vor, die entweder höhere Ordnung oder niedrigeren Index besitzen. Unsere $\mathfrak{C}_4$ ist also insbesondere auf keine Weise darstellbar als Limes von z. B. Kurven vierter Ordnung und vom Maximalindex im engeren Sinne. Man erkennt allgemein, daß eine Kurve $\mathfrak{C}$ vom Maximalindex im weiteren Sinne, welche Tangenten mit mehreren Stützstellen besitzt, nicht darstellbar ist als Limes von Kurven gleicher Ordnung wie $\mathfrak{C}$ und vom Maximalindex im engeren Sinne.

Daß die $\mathfrak{C}_4$ unserer Figur 2 etwas grundsätzlich Neues liefert gegenüber den Maximalindexkurven von vierter Ordnung im engeren Sinne kann man übrigens auch daraus entnehmen, daß diese $\mathfrak{C}_4$ keinen Doppelpunkt besitzt. Es muß nämlich *jede Kurve vom Maximalindex im engeren Sinne und höherer als dritter Ordnung Doppelpunkte besitzen.*[13] *Dieser Satz verliert also beim Übergang zum Ordnungs- bzw. Indexbegriffe im weiteren Sinne seine Gültigkeit*, was übrigens auch bei der Analyse seines Beweises plausibel wird.

Durch Übergang zum Ordnungs- und Indexbegriff im weiteren Sinne gelangt man also zu *„wesentlich neuen" Maximalindexkurven, welche sogar im großen von denjenigen im engeren Sinne sich unterscheiden (und welche übrigens sogar die drei ersten Forderungen der Nr. 1, 2 befriedigen).*

1, 4. Wir hatten in Nr. 1, 2 gesehen, daß im Falle eines Bogens vom Maximalindex die Forderung Drittens (stückweise Kon-

[13] Fußnote 6, Juel, a. a. O., S. 7.

vexität) bereits eine Folge der Indexdefinition im engeren Sinne ist. Legen wir nun, wie in Nr. 1, 3, den *Index*begriff im weiteren Sinne zugrunde, so erhebt sich die *Frage, ob auch jetzt noch jeder Bogen vom Maximalindex notwendig stückweise konvex ist.*

Die Antwort — und zwar im bejahenden Sinne — ist bis jetzt im Falle der Bogen vierter Ordnung i.w. S. bekannt.[14] Für beliebiges $n \geqq 5$ kennt man aber wenigstens (§ 4) eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung für stückweise Konvexität der Bogen vom Maximalindex i. w. S., eine Bedingung, welche als die natürliche Verallgemeinerung der Forderung des Fehlens von mehrfachen Tangenten bei Bogen vom Maximalindex i. e. S. (vgl. Nr. 1, 2) aufzufassen ist.

§ 2. (n — 2) als größter Index eines ebenen Bogens n-ter Ordnung.

2, 1. Wir wollen nun zeigen, daß der größtmögliche Index i. w. S. für ebene Bogen und Kurven der Ordnung n gleich $(n - 2)$ ist, d. h. daß der Index j eines *jeden* Bogens und einer *jeden* Kurve n-ter Ordnung nicht größer sein kann als $(n - 2)$, Ordnung und Index i.w. S. verstanden. Die Behauptung $j \leqq n - 2$ erscheint als ziemlich selbstverständlich bei *Kurven*, vor allem, wenn sie noch besonderen Glattheitsbedingungen genügen, etwa wenn es sich um Ordnung und Index i. e. S. handelt. Weniger selbstverständlich ist, daß die Behauptung gleichzeitig auch für *Bogen* gilt, zumal wenn man, wie hier, allgemein eindeutige stetige Strecken- bzw. Kreisbilder im Sinne von Nr. 1, 1 zugrunde legt und wenn man den Ordnungs- und Indexbegriff im weiteren Sinne nimmt.[15] In der Tat erscheinen zum Beweise der behaupteten Ungleichung $j \leqq n - 2$ in dieser Allgemeinheit etwas weitergehende Überlegungen nötig. Offenbar genügt es, folgendes zu zeigen:

Satz: Zu jeder Kurve $\mathfrak{C}$ *und zu jedem Bogen* $\mathfrak{C}$ *von n-ter*

---

[14] Vgl. oben im Text, Nr. 0, 1.

[15] Wir erinnern in diesem Zusammenhange an die zunächst paradox klingenden Beispiele von Punktmengen, welche Kontinua enthalten und deren „Ordnung" gleich ihrem „Index" ist. Vgl. Fußnote 1, Rosenthal, a. a. O. — Die Frage nach dem Maximalindex ist unseres Wissens bisher nur für Kurven, nicht für Bogen, aufgeworfen worden.

Ordnung i. w. S. lassen sich Sekanten angeben, deren Ordnung (bezüglich $\mathfrak{C}$) nicht größer ist als $(n - 2)$.

Zusatz: Das gleiche gilt unter anderem auch für *mehrteilige Kurven*, d. h. für Summen aus eindeutigen stetigen Kreisbildern.

Beweis: Wir brauchen lediglich zwei Sekanten von $\mathfrak{C}$ zu konstruieren, deren Ordnungen sich um mindestens zwei unterscheiden; da nämlich die Ordnung einer jeden Sekante höchstens gleich n ist, gibt es dann sicher Sekanten, deren Ordnung nicht größer als $(n - 2)$ ist, wie behauptet. Zur Konstruktion zweier solcher Sekanten beachten wir, daß auf $\mathfrak{C}$ die konvexen Teilbogen überall dicht liegen, weil nämlich $\mathfrak{C}$ von beschränkter Ordnung ist.[16] Es sei $\mathfrak{K}$ ein solcher konvexer Teilbogen; diesen können und wollen wir von vornherein so wählen, daß keine seiner Stützgeraden einen der etwa vorhandenen Endpunkte von $\mathfrak{C}$ enthält. Darüber hinaus läßt sich folgendes behaupten:

2, 2. Wir können $\mathfrak{K}$ so wählen, daß $\mathfrak{K}$ *nur solche mehrfachen Punkte von $\mathfrak{C}$ enthält, für welche die Umgebungen der zugehörigen Stellen auf $\mathfrak{C}$ ganz auf $\mathfrak{K}$ liegen.*

Andernfalls lägen nämlich auf jedem $\mathfrak{K}$ mehrfache Punkte überall dicht, deren Umgebungen auf $\mathfrak{C}$ nicht ganz zu $\mathfrak{K}$ gehören. Dies ist aber mit der Annahme endlicher Ordnung von $\mathfrak{C}$ unvereinbar, wie man durch folgende, bekannte Schlußweise einsieht: Es seien F und H zwei innere Punkte von $\mathfrak{K}$, und insbesondere sei H ein *mehrfacher Punkt* der zuletzt genannten Art. Die Verbindungsgerade g von F und H kann wegen der vorausgesetzten Konvexität von $\mathfrak{K}$ keine Punkte außer F und H mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben. H ist also insbesondere Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{K}$. Liegt nun die Umgebung einer der zu H gehörigen Stellen von $\mathfrak{C}$ nicht ganz auf $\mathfrak{K}$, so ist H Endpunkt eines Teilbogens von $\mathfrak{C}$, welcher in beliebiger Nähe von H Teilbogen $\mathfrak{T}_1$ aufweist, die fremd sind zu $\mathfrak{K}$. Es gibt somit durch F gehende, zu g beliebig benachbarte Geraden g_1, welche mit $\mathfrak{C}$ sowohl einen auf $\mathfrak{K}$ gelegenen mehrfachen Punkt H_1 der genannten Art als auch eine nicht auf $\mathfrak{K}$ gelegene Schnittstelle mit einem solchen Teilbogen $\mathfrak{T}_1$ gemeinsam haben. Setzt man jetzt H_1 und g_1 an Stelle von H und g und wiederholt die eben angestellten Überlegungen, so erhält man eine

[16] Vgl. Fußnote 3, a. a. O., S. 60.

Gerade g_2, welche mit $\mathfrak{C}$ mindestens drei verschiedene Stellen gemeinsam hat, darunter einen, auf $\mathfrak{K}$ gelegenen mehrfachen Punkt, dessen Umgebung nicht ganz auf $\mathfrak{K}$ liegt. Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt zu Geraden, welche mit $\mathfrak{C}$ unbegrenzt viele Stellen gemeinsam haben, was nicht möglich ist.

2, 3. Es sei $\mathfrak{K}$ gemäß Nr. 2, 2 gewählt. Wir betrachten irgendeinen Punkt P von $\mathfrak{K}$.

Besitzt $\mathfrak{K}$ Ecken und ist P eine solche Ecke (*Fall a*), so sei t die Trägergerade einer der Halbtangenten an $\mathfrak{K}$ in P. Dann gibt es zu beliebig vorgeschriebener Nachbarschaft[27] von t Sektoren S, welche von lauter Stützgeraden s an $\mathfrak{K}$ in P gebildet werden und folgende Eigenschaft besitzen: Alle Geraden s von S gehören der vorgeschriebenen Nachbarschaft von t an; keine der Geraden s trägt eine Stützstelle mit $\mathfrak{C}$, die nicht nach P fällt (t braucht nicht zu S zu gehören). Andernfalls lägen nämlich Stützgerade an $\mathfrak{K}$ in P, welche nicht zu $\mathfrak{K}$ gehörige Stützstellen mit $\mathfrak{C}$ besitzen, überall dicht in der Umgebung von t[17]; das würde aber zu Widersprüchen führen, wenn man den Satz von der Auflösung einer Stützstelle in mindestens zwei Schnittstellen heranzieht und das in Nr. 2, 2 bereits verwendete Schlußverfahren benützt.[29]

Besitzt dagegen $\mathfrak{K}$ keine Ecken, also stetige Tangenten in allen Punkten (*Fall b*), so folgt durch ähnliche Schlüsse: $\mathfrak{K}$ besitzt einen Teilbogen, dessen sämtliche Tangenten nur in $\mathfrak{K}$ liegende Stützstellen mit $\mathfrak{C}$ tragen.

In den beiden Fällen a) und b) *sind also die auf der jeweils betrachteten Stützgeraden gelegenen Stützstellen mit $\mathfrak{C}$ in einem einzigen Punkte von $\mathfrak{K}$ vereinigt; und es gibt immer einen Sektor bzw. ein Kontinuum von solchen Stützgeraden.*

2, 4. Wir können also von jetzt ab annehmen, daß eine Stelle von $\mathfrak{C}$, welche auf irgendeiner der in Nr. 2, 3 Fall a) bzw. b) betrachteten Stützgeraden s an $\mathfrak{K}$ liegt, *entweder* Schnittstelle auf s

---

[17] Wir nennen eine Menge von Stützgeraden an $\mathfrak{K}$ „*überall dicht*", wenn die Menge der zugehörigen Stützpunkte auf $\mathfrak{K}$ überall dicht liegt oder nur aus einem Punkte besteht, und wenn überdies unter den Stützgeraden der Menge mit gleichen oder doch beliebig benachbarten Stützpunkten solche vorhanden sind, deren Richtungen beliebig wenig voneinander abweichen.

ist und alsdann nicht in Punkte von $\mathfrak{K}$ fällt *oder* Stützstelle auf s ist und daß diese Stützstellen sämtlich in den gleichen Punkt von $\mathfrak{K}$ fallen und ganz auf $\mathfrak{K}$ gelegene Umgebungen besitzen. Nunmehr lassen sich unter den genannten Stützgeraden solche finden, für welche die genannten Schnittstellen sämtlich Stellen zweiter Ordnung auf $\mathfrak{C}$ sind. Da nämlich auf $\mathfrak{C}$ die konvexen Teilbogen überall dicht liegen,[16] so gibt es in beliebiger Nähe einer jeden Stützgeraden s andere Stützgeraden an $\mathfrak{K}$, deren (nicht in Punkte von $\mathfrak{K}$ fallende) Schnittstellen mit $\mathfrak{C}$ sämtlich im Innern konvexer Teilbogen von $\mathfrak{C}$ liegen, also Stellen zweiter Ordnung sind.

2, 5. Aus den Feststellungen in Nr. 2, 2–2, 4 folgt die Existenz eines konvexen Teilbogens $\mathfrak{K}$ und einer Stützgeraden s an $\mathfrak{K}$, so daß einerseits s mit $\mathfrak{C}$ höchstens solche Schnittstellen gemeinsam hat, welche von zweiter Ordnung auf $\mathfrak{C}$ sind und welche sämtlich in zu $\mathfrak{K}$ fremde Punkte fallen und daß andererseits nur solche Stützstellen auf s vorhanden sind, welche in einem einzigen Punkte P von $\mathfrak{K}$ vereinigt liegen und deren Umgebungen auf $\mathfrak{C}$ ganz zu $\mathfrak{K}$ gehören. Man sieht nun, daß (etwa durch Parallelverschiebung von s nach der einen oder der anderen Seite hin) Sekanten von $\mathfrak{C}$ sich ergeben, für welche die Anzahl der Schnittstellen um mindestens zwei verschieden ist.

Zusatz: Aus dem Beweise geht überdies hervor: Punkte P bzw. Stützgeraden s der in Rede stehenden Beschaffenheit finden sich in beliebiger Nähe einer *jeden* Stelle von $\mathfrak{C}$ bzw. in beliebiger Nachbarschaft einer der zur Stelle gehörigen Halbtangenten an $\mathfrak{C}$.

2, 6. Der hiermit für Bogen und Kurven in der Ebene bewiesene *Satz überträgt sich auf den Fall der Bogen und Kurven beschränkter Ordnung im dreidimensionalen Raum*; dabei sollen die betrachteten Bogen und Kurven keine Teilbogen enthalten, welche einer Ebene angehören.

In der Tat: Es sei $\mathfrak{C}$ ein Bogen bzw. eine Kurve n-ter Ordnung im R_3. Wir projizieren $\mathfrak{C}$ von einem Punkt Z des R_3 aus, welcher nicht zu $\mathfrak{C}$ gehört und nicht auf der Verbindungsgeraden der, etwa vorhandenen, Endpunkte von $\mathfrak{C}$ liegt, auf eine zu Z fremde

Ebene $\mathfrak{Z}$. Bei geeigneter Festsetzung der Vielfachheit der Punkte des Projektionsbildes von $\mathfrak{C}$ erhalten wir einen Bogen (bzw. eine Kurve) $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{Z}$ ohne Teilstrecken, welcher ein-eindeutiges Bild von $\mathfrak{C}$ ist und höchstens die Ordnung n besitzt. Da für $\mathfrak{C}'$ der behauptete Satz bereits bewiesen ist, gibt es also Geraden g' in $\mathfrak{Z}$, welche mit $\mathfrak{C}'$ nur Schnittstellen und deren höchstens $(n-2)$ gemeinsam haben. Die durch Z und g' bestimmte Ebene hat dann mit $\mathfrak{C}$ höchstens $(n-2)$ Stellen gemeinsam, die sämtlich Schnittstellen sein müssen, w. z. z. w.[18]

§ 3. Konstruktion von Bogen beliebiger Ordnung und von beliebigem Index.

3, 1. Wir zeigen jetzt, daß es *Bogen einer jeden Ordnung n und eines jeden Index j* (mit $j \leq n-2$) wirklich gibt; und zwar wollen wir im Falle $n \equiv j$ (2) diese Bogen *gleich so konstruieren,*[19] *daß sie Teilbogen von Kurven der Ordnung n sind, welche keine Teilstrecken enthalten und welche selbst vom Index j im engeren Sinne sind.*[20] Insbesondere werden wir (Kurven und) *Bogen vom Maximalindex sowohl im engeren als auch im weiteren Sinne angeben.*

Die im folgenden konstruierten Kurven und Bogen werden stückweise konvex und stetig differenzierbar sein, aber zunächst noch Ecken enthalten, also der Bedingung Erstens in Nr. 1, 2 noch nicht genügen. Diese Ecken können aber jeweils durch „Abrundung"[21] beseitigt werden, ohne daß sich der Index oder die Ordnung ändern. Wir werden diejenigen Ecken, in welchen die Abrundung vorgenommen werden soll, bei der Konstruktion gelegentlich bezeichnen, ohne aber auf Einzelheiten näher einzugehen.

---

[18] Entsprechend erkennt man natürlich, daß der Index j eines Bogens n-ter Ordnung im R_k höchstens $(n-2)$ ist ($k \geq 4$). Doch wird man für $k \geq 4$ eine weitergehende Aussage zu erwarten haben, nämlich die, daß — wenigstens im allgemeinen — der Index j höchstens gleich $(n-k)$ ist.

[19] Für eine *Kurve* muß immer $n \equiv j$ (2) sein.

[20] Vgl. Fußnote 15 der Arbeit: Über ordnungsfeste Erweiterung von ebenen Bogen und Kurven, Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 135.

[21] Juel, C., Einleitung in der Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og mathem. Afd., 7. R., XI, 2 (1914), S. 123 und 129.

3, 2. Wir beginnen mit Kurven und Bogen vom *Maximalindex im engeren Sinne.* Vorbild für die zu konstruierenden Kurven ist eine Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{C}_3$ mit einem Doppelpunkt D (und einem Wendepunkt). Nimmt man von $\mathfrak{C}_3$ den die uneigentliche Gerade treffenden, von D ausgehenden und in D mündenden Teil weg, so bleibt eine (beschränkte) Kurve $\mathfrak{C}_2$ von zweiter Ordnung übrig (welche als Teiloval in der $\mathfrak{C}_3$ enthalten ist). *Jede* Sekante s der $\mathfrak{C}_2$ ist *Maximalsekante* der $\mathfrak{C}_3$, d. h. s hat mit $\mathfrak{C}_3$ *drei* Schnittstellen gemeinsam. Nimmt man daher aus der $\mathfrak{C}_2$ einen offenen Teilbogen $\mathfrak{T}$ heraus, dessen abgeschlossene Hülle fremd ist zu D, so ist das Komplement $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{C}_3 \dot{-} \mathfrak{T}$ von der Ordnung drei und vom Index Eins; denn jede Sekante der $\mathfrak{C}_2$ hat mit dem $\mathfrak{B}_3$ mindestens eine Stelle gemeinsam und ebenso jede Sekante der $\mathfrak{C}_3$, welche nicht zugleich Sekante der $\mathfrak{C}_2$ ist.

3, 3. Für eine beliebig vorgegebene Ordnung n führt folgende Konstruktion zu *Kurven vom Maximalindex*: *Falls* $n \equiv 0\ (2)$, beginnen wir mit $n = 4$, da $n = 2$ trivial ist. Und zwar betrachten wir in bekannter Weise die Summe aus einer Ellipse $\mathfrak{E}^{(1)}$ mit einer Hyperbel $\mathfrak{H}^{(1)}$. Um uns im folgenden kürzer ausdrücken zu können, bezeichnen wir als „*Inneres*“ H_i einer Hyperbel $\mathfrak{H}$ den offenen Kern der Menge derjenigen *eigentlichen* Punkte, durch welche keine zu $\mathfrak{H}$ fremde Geraden gehen. H_i zerfällt in zwei fremde Gebiete, die beiden „*Komponenten*“ von H_i. Mit anderen Worten: H_i ist die Menge aller eigentlichen Punkte, durch deren jeden nur Sekanten von $\mathfrak{H}$ gehen, und zwar Sekanten von genau zweiter Ordnung bezüglich $\mathfrak{H}$. Entsprechend wird das Innere E_i einer Ellipse $\mathfrak{E}$ definiert.

3, 4. Wir gehen also aus von der Summe $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{E}^{(1)} \dotplus \mathfrak{H}^{(1)}$ einer Ellipse $\mathfrak{E}^{(1)}$ und einer Hyperbel $\mathfrak{H}^{(1)}$. Und zwar wählen wir $\mathfrak{S}_4$ so, daß der Durchschnitt $E_i^{(1)} \frown H_i^{(1)}$ sich darstellen läßt als Summe zweier, nicht leerer, fremder Gebiete $G_1^{(1)}$ und $G_2^{(1)}$, welche zu *verschiedenen* Komponenten von $H_i^{(1)}$ gehören. *Durch jeden Punkt von* $G_1^{(1)}$ *gehen an* $\mathfrak{S}_4$ *nur Sekanten und diese sind sämtlich von vierter Ordnung bezüglich* $\mathfrak{S}_4$. Jede andere Sekante von $\mathfrak{S}_4$ ist von mindestens zweiter Ordnung. Daher ist $\mathfrak{S}_4$ von vierter Ordnung und vom Maximalindex zwei. Es wird auch leicht bestätigt, daß $\mathfrak{S}_4$ als eindeutiges, stetiges Kreisbild darstellbar, also auch wirklich eine Kurve ist. Eine solche Darstellung kann so gewählt werden, daß die hierbei auftretenden Ecken der Kurve zur Begrenzung von $G_2^{(1)}$ gehören; in diesen Ecken kann dann die nötige Abrundung vorgenommen werden.

3, 5. Nun bilden wir mit einer neuen Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ die Summe $\mathfrak{S}_6 = \mathfrak{S}_4 \dot{+} \mathfrak{H}^{(2)}$. Dabei soll $\mathfrak{H}^{(2)}$ so gewählt werden, daß in $G_1^{(1)} \frown H_i^{(2)} = G_1^{(2)} \dot{+} G_2^{(2)}$ die $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ fremde, nicht leere Gebiete sind, welche zu verschiedenen Komponenten von $H_i^{(2)}$ gehören. Aus später ersichtlichen Gründen (vgl. Nr. 3, 9) soll $\mathfrak{H}^{(2)}$ überdies so angenommen werden (was möglich ist), daß jedes der beiden Gebiete $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ auf seiner Begrenzung einen Teilbogen von $\mathfrak{E}^{(1)}$ enthält. *Durch jeden Punkt von $G_1^{(2)}$ gehen an $\mathfrak{S}_6$ nur Sekanten und diese sind sämtlich von sechster Ordnung bezüglich* $\mathfrak{S}_6$, so daß $\mathfrak{S}_6$ selbst von sechster Ordnung ist. Durch jeden Punkt von $G_1^{(1)}$ gehen an $\mathfrak{S}_4$ nur Sekanten und diese sind also, soweit sie zugleich Sekanten an $\mathfrak{S}_6$ sind, von mindestens vierter Ordnung bezüglich $\mathfrak{S}_6$. *Da nun jede Sekante nullter Ordnung bezüglich $\mathfrak{H}^{(2)}$ Punkte mit $G_1^{(1)}$ gemeinsam hat*, so besitzt sie, soweit sie Sekante auch an $\mathfrak{S}_6$ ist, mindestens die Ordnung vier bezüglich $\mathfrak{S}_6$. Schließlich ist jede Sekante zweiter Ordnung bezüglich $\mathfrak{H}^{(2)}$ auch von mindestens zweiter Ordnung bezüglich $\mathfrak{S}_4$, *weil $\mathfrak{S}_4$ den Index zwei besitzt.* Mithin ist $\mathfrak{S}_6$ vom Maximalindex vier. Die Abrundung werde in einer auf der Begrenzung von $G_2^{(2)}$ liegenden Ecke vorgenommen.

3, 6. Man sieht, wie die Konstruktion von $\mathfrak{S}_8, \ldots$ schrittweise erfolgt und daß sich dabei alle Schlüsse unverändert wiederholen; die Konstruktion kann übrigens so eingerichtet werden, daß weder $\mathfrak{E}^{(1)}$ mit irgendeiner $\mathfrak{H}^{(\nu)}$, noch daß irgend zwei $\mathfrak{H}^{(\nu)}$ untereinander gemeinsame Tangenten besitzen ($\nu = 1, 2, \ldots$).

3, 7. Will man *Kurven einer beliebig vorgegebenen geraden Ordnung $n = 2r$ und eines beliebig vorgegebenen geraden Index $j = 2s$ $(r > s)$* erhalten, so konstruiere man durch passende Zusammenfügung von $(r - s)$ Ellipsen (der Durchschnitt ihrer Innern soll nicht leer sein) zunächst eine Kurve von der Ordnung

$2(r-s)$ und vom Index Null. Durch passende Hinzufügung von s Hyperbeln (vgl. Nr. 3, 3–3,6) erhält man dann die gewünschte Kurve.

3, 8. Um entsprechend *Kurven ungerader Ordnung* $n = 2r + 1$ vom Maximalindex bzw. *von beliebig vorgegebenem ungeradem Index* $j = 2s + 1$ zu erhalten, ersetzen wir in $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{E}^{(1)} \dotplus \mathfrak{H}^{(1)}$ die Ellipse $\mathfrak{E}^{(1)}$ durch eine Kurve $\mathfrak{C}_3$ von dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, indem wir an Stelle von $E_i^{(1)}$ das Innere des in Nr. 3, 2 definierten Teilovals $\mathfrak{C}_2$ der $\mathfrak{C}_3$ treten lassen. Alle übrigen Schlüsse bleiben im wesentlichen unverändert.

3, 9. Um nun schließlich zu den gewünschten *Bogen vorgegebener Ordnung* n *und* — zunächst — *vom Maximalindex im engeren Sinne zu gelangen*, nehmen wir aus $\mathfrak{E}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ einen offenen Teilbogen $\mathfrak{T}$ weg, welcher zur Begrenzung von $G_1^{(n)}$ gehört und dessen abgeschlossene Hülle keinesfalls den Doppelpunkt D der $\mathfrak{C}_3$ enthält. Die Ordnung von $\mathfrak{S}_n$ wird durch Wegnahme eines hinreichend kleinen $\mathfrak{T}$ sicher nicht erniedrigt. Aber auch der Index bleibt erhalten. Denn jede Sekante s von $\mathfrak{T}$ enthält Punkte von $G_1^{(n)}$, hat also mit der $\mathfrak{S}_n$ genau n Punkte gemeinsam. Da überdies $\mathfrak{T}$ von zweiter Ordnung ist, so gehen durch Wegnahme von $\mathfrak{T}$ höchstens zwei Schnittpunkte von s mit $\mathfrak{S}_n$ verloren, so daß s bezüglich $(\mathfrak{S}_n - \mathfrak{T})$ mindestens die Ordnung $(n-2)$ besitzt.

Allgemeiner erhalten wir in der gleichen Weise *Bogen einer beliebigen Ordnung* n *und eines beliebigen Index* j *mit* $j \equiv n\ (2)$, *welche in einer Kurve von gleicher Ordnung und gleichem Index enthalten sind.* Wir brauchen nur eine zu n und j gehörige, gemäß Nr. 3, 7 bzw. Nr. 3, 8 konstruierte Kurve zu betrachten und wieder aus der zu $\mathfrak{E}^{(1)}$ gehörigen Begrenzung einen hinreichend kleinen offenen Teilbogen $\mathfrak{T}$ geeignet herauszunehmen.

3, 10. Es sind jetzt noch *Bogen* von beliebig vorgegebener Ordnung n und *beliebig vorgegebenem Index* j zu konstruieren. Da der Fall $n \equiv j\ (2)$ bereits erledigt ist, kann $n \not\equiv j\ (2)$ angenommen werden, also (wegen $n - j \geqq 2$) auch $n \geqq 3$, $n - j \geqq 3$.

Zunächst sei die vorgeschriebene *Ordnung* n ungerade. Wir setzen dann $n = 2t + 3$, $j = 2s$, $t \geqq s$. Grundlage der Konstruktion bildet ein Bogen $\mathfrak{B}_3$ der Ordnung drei mit Doppelpunkt und vom Index Null, welcher durch Wegnahme eines geeigneten, nicht zum Teiloval $\mathfrak{E}_2$ (vgl. Nr. 3,2) gehörigen offenen Teilbogens gewonnen wird. Wenn $s = t$ ist, fügen wir zu $\mathfrak{B}_3$ in geeigneter Weise t Hyperbeln hinzu (vgl. die Konstruktion in Nr. 3, 3–3, 6 sowie 3, 8), wodurch der gewünschte Bogen entsteht. Ist $t > s$, so fügen wir zunächst $(t - s)$ Ellipsen zu $\mathfrak{B}_3$ hinzu derart, daß der Durchschnitt der Innern aller Ellipsen nicht leer ist und ganz im Innern von $\mathfrak{E}_2$ liegt. Alsdann werden noch s Hyperbeln in der oben angedeuteten Weise hinzugefügt.

Ist schließlich die vorgeschriebene *Ordnung n gerade*, so setzen wir $n = 2t + 4$, $j = 2s + 1$. Grundlage der Konstruktion ist dann ein Bogen der Ordnung vier und des Index Eins; dieser kann aus der in Nr. 3, 4 konstruierten Kurve gewonnen werden, indem man einen geeigneten, außerhalb $\mathfrak{E}^{(1)}$ gelegenen offenen Hyperbelbogen wegnimmt. Der weitere Verlauf der Konstruktion ist der gleiche wie im Falle $n \equiv 1\ (2)$.

3, 11. Um ferner *Kurven und Bogen vom Maximalindex im weiteren Sinne* zu erhalten, können wir so vorgehen. An Stelle der in Nr. 3, 5 als Ausgangspunkt gewählten $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{E}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(1)}$

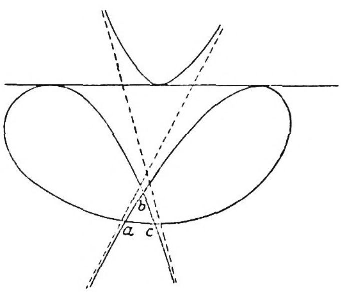

Fig. 3

legen wir der Konstruktion die in *Figur 3* angegebene Kurve $\mathfrak{E}_4$ vierter Ordnung vom Maximalindex i. w. S. zugrunde.[22] Und zwar lassen wir bei den Konstruktionen die Rolle von $G_1^{(1)}$ (vgl. Nr. 3, 4) durch das von drei Konvexbogen begrenzte offene „Dreieck" $D = abc$ übernehmen. Durch *jeden* Punkt von D

[22] Vgl. Fußnote 2, Juel, a. a. O., S. 302.

gehen nämlich an $\mathfrak{C}_4$ nur *Sekanten* und diese sind sämtlich von vierter Ordnung. Entfernt man daher z. B. aus dem Bogen $\widehat{ab}$ von $\mathfrak{C}_4$ einen kleinen offenen Teilbogen, so entsteht aus der Kurve $\mathfrak{C}_4$ ein *Bogen* vierter Ordnung vom Maximalindex i. w. S.; entsprechend erfolgt die Konstruktion von Kurven und Bogen beliebig hoher gerader Ordnung und vom Maximalindex i. w. S. durch Hinzufügung passender Hyperbeln wie in Nr. 3, 5 und 3, 6. Um endlich zu Kurven (und Bogen) beliebig hoher ungerader Ordnung und vom Maximalindex i. w. S. zu gelangen, konstruieren wir uns zunächst eine solche Kurve von fünfter Ordnung aus der eben gebrauchten $\mathfrak{C}_4$. Dies geschieht durch „Einhängen" eines Bogens dritter Ordnung, welcher mit *jeder* Geraden mindestens einen Punkt gemeinsam hat und insbesondere

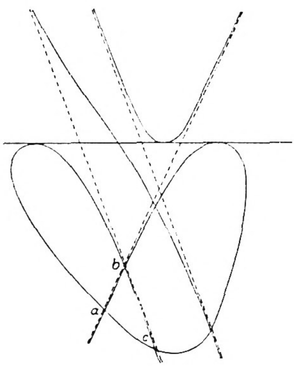

Fig. 4

mit jeder Maximalsekante der $\mathfrak{C}_4$ *genau* einen (vgl. *Figur 4*). Wieder gehen jetzt durch jeden inneren Punkt des „Dreiecks" *abc* nur Sekanten, und zwar nur solche von fünfter Ordnung. Die weitere Konstruktion verläuft entsprechend wie in den Fällen gerader Ordnung

3, 12. Wir ergänzen den Nachweis der Existenz von Bogen vom Maximalindex noch durch die Feststellung, daß es *Kurven vom Maximalindex gibt, in welchen keine Teilbogen vom Maximalindex enthalten sind.* Es ist dies *sozusagen ein Gegenstück zu* der früher[23] nachgewiesenen Existenz von *Bogen vom Maximal-*

[23] Vgl. Fußnote 20, a. a. O., Nr. 5.

index, welche in keiner Kurve der gleichen Ordnung (ohne Teilstrecken) enthalten sind.

Ein Beispiel bieten die Kurven 3. Ordnung ohne Doppelpunkt und ohne Teilstrecken. In der Tat: Einerseits ist jede solche Kurve vom Index Eins, also vom Maximalindex. Und andererseits ist jeder echte Teilbogen einer solchen Kurve vom Index Null; oder etwas schärfer:

Jeder Bogen $\mathfrak{B}$ *von dritter Ordnung vom Maximalindex i.w.S., welcher nicht-trivial*[24] *ordnungsfest zu einer Kurve erweiterbar ist, muß einen Doppelpunkt besitzen.*[25]

Der *Beweis* kann ohne Heranziehung feinerer Eigenschaften der Bogen dritter Ordnung etwa so geführt werden: Angenommen, es sei $\mathfrak{B}$ vom Index Eins. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $\mathfrak{B}$ nur *einen* uneigentlichen Punkt besitzt und daß dieser nicht auf der Verbindungsgeraden g der beiden Endpunkte A und B von $\mathfrak{B}$ liegt. A und B sind dann beide eigentliche Punkte. Nun muß auf g noch ein von A und B verschiedener, innerer Punkt C von $\mathfrak{B}$ liegen, weil andernfalls $\mathfrak{B}$ vom Index Null wäre; C ist ebenfalls eigentlicher Punkt. Einer der Bogen $\widehat{AC}$, $\widehat{CB}$ muß beschränkt sein; es sei dies der Bogen $\widehat{AC}$. Erster Fall: Es werde g in C von $\mathfrak{B}$ *geschnitten*. Dann tritt $\mathfrak{B}$ erst nach Durchgang durch den uneigentlichen Punkt wieder auf die ursprüngliche „Seite" von g über, auf welcher auch $\widehat{AC}$ liegt. Somit muß B außerhalb der beschränkten Strecke AC liegen, falls $\mathfrak{B}$ keinen Doppelpunkt besitzt. Da der beschränkte Bogen $\widehat{AC}$ außer A und C keinen Punkt mit g gemeinsam hat, kann man eine Gerade s durch B konstruieren, welche den Bogen $\widehat{AC}$ in einem inneren Punkte D stützt. Die Stützgerade s kann außer D und B keinen Punkt mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben. Da überdies B Endpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, gibt es zu s benachbarte Gerade, welche mit $\mathfrak{B}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Daher wäre der Bogen $\mathfrak{B}$, falls er keinen Doppelpunkt besitzt, doch vom Index Null. — Zweiter Fall: Es werde $\mathfrak{B}$ in C von g gestützt. Alsdann tritt $\mathfrak{B}$ erst nach Durchgang durchs Uneigentliche auf die andere Seite von g über, auf welcher Seite $\mathfrak{B}$ dann bis B verbleibt und

---

[24] Vgl. Fußnote 20, a. a. O., Nr. 2, Anfang.

[25] Haben wir also eine $\mathfrak{C}_3$ *mit* Doppelpunkt und wählen wir auf ihr irgendeinen doppelpunktfreien Teilbogen, so hat dieser den Index Null.

auf welcher der Bogen $\widehat{AC}$ *nicht* liegt. Nun kann B nicht außerhalb der beschränkten Strecke AC liegen; denn sonst wäre $\mathfrak{B}$ vom Index Null, was man ähnlich wie oben einsieht. Liegt aber B im Innern der beschränkten Strecke AC, so ist $\mathfrak{B}$ nur in trivialer Weise zu einer *Kurve* dritter Ordnung erweiterbar.

§ 4. Stückweise konvexe Bogen vom Maximalindex im weiteren Sinne.

4, 1. Wie in Nr. 0, 2 bereits bemerkt, soll im folgenden eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung angegeben werden dafür, daß ein Bogen (eine Kurve) vom Maximalindex im weiteren Sinne stückweise konvex[5] ist. Von einem solchen Bogen ist es ja durchaus nicht von vornherein zu erwarten, daß er stückweise konvex sei, und zwar wegen der Möglichkeit des Auftretens mehrfacher Tangenten (vgl. Nr. 1, 3). Die nähere Untersuchung der bei solchen mehrfachen Tangenten auftretenden Möglichkeiten wird daher der natürliche Ausgangspunkt zur Gewinnung der oben erwähnten Bedingungen sein. Dabei muß der Begriff der mehrfachen Tangente passend verallgemeinert werden für den hier zugelassenen Fall von Bogen, die nicht notwendig Elementarbogen sind, also insbesondere nicht notwendig in jedem Punkte eine Tangente besitzen. Eine solche Verallgemeinerung erhalten wir im Begriffe der „mehrfachen Stützgeraden", zu deren Definition wir folgendes bemerken: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann bei Betrachtung irgendeiner vorgelegten Geraden t angenommen werden, daß t mit unserem Bogen $\mathfrak{C}$ lediglich *eigentliche* Punkte gemeinsam hat; man braucht nur eine von t verschiedene Gerade als uneigentlich auszuzeichnen, welche mit t einen nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkt gemeinsam hat. Nun denken wir uns t irgendwie „*orientiert*", d. h. mit einem Durchlaufungssinne versehen, und beziehen, nach Wegnahme der uneigentlichen Geraden aus der Ebene, auf diese Orientierung in bekannter Weise eine Festsetzung, welche „*Seite*" von t als „positive" und welche als „negative" bezeichnet werden soll; ebenso eine Festsetzung darüber, welcher von zwei Punkten auf t als „*oberhalb*" bzw. „*unterhalb*" des anderen gelegen zu bezeichnen ist. Nach Wahl der uneigentlichen Geraden, nach vorgenommener Orientierung von t usw. heiße t „*normiert*". Eine, im (eigentlichen) Punkte P der normierten Geraden g gelegene *Stütz*stelle Π von $\mathfrak{C}$ heiße „*positiv*" („von positivem Vorzeichen") oder „*negativ*", je nachdem die Umgebung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Pi; \mathfrak{C})$ ganz auf der positiven oder ganz auf der negativen Seite von t liegt. Bezüglich der *Zählung von Stützstellen*, welche in den gleichen *Punkt* der betrachteten Geraden zusammenfallen, soll für die Nr. 4, 1—4, 6 folgendes *verabredet* werden: Liegen in einem Punkte P von t im ganzen p_P positive und n_P negative Stütz*stellen* von $\mathfrak{C}$ auf t vereinigt, so werden diese Stellen zusammen für Null oder für $(p_P - n_P)$ positive oder für $(n_P - p_P)$ negative, verschiedene Stützstellen gezählt, je nachdem $(p_P - n_P)$ Null oder positiv oder negativ ist; Beispiel: Ist $p_P - n_P = 1$, so werden die zu P gehörigen Stützstellen insgesamt als nur eine, und zwar positive in Anschlag gebracht. Dem *Punkte P* selber schreiben wir dann eine entsprechende (Stütz-) *Vielfachheit im positiven oder negativen Sinne zu*, nennen also z. B. P einen *$(p_P - n_P)$-fachen positiven Stützpunkt*, falls $p_P - n_P > 0$ ist. Eine normierte Gerade t soll nun *mehrfache Stützgerade* heißen, wenn die Summe der absoluten Beträge der Vielfachheiten der auf ihr liegenden Stützpunkte größer als Eins ist. Man beachte noch, daß — der getroffenen Verabredung zufolge — positive und negative Stützpunkte auf jeder mehrfachen Stützgeraden getrennt liegen. Die bei dieser Art der Zählung nicht berücksichtigten Stützstellen lassen sich zu Paaren, im gleichen Punkte vereinigt liegender, Stützstellen entgegengesetzten Vorzeichens zusammenfassen. Bei passender Abänderung der Durchlaufung derjenigen Teilbogen von $\mathfrak{C}$, welche in diesen Stützstellen zusammenstoßen, erhält man (statt besagter Stützstellen) 2σ Schnittstellen, wenn σ Paare der erwähnten Art vorhanden sind.[26] Wir *verabreden* daher weiter, daß *die in Rede stehenden, nicht berücksichtigten σ Stützstellenpaare als 2σ Schnittstellen von t mit $\mathfrak{C}$ zu zählen sind.*

4, 2. Da unser Bogen $\mathfrak{C}$ von der beschränkten Ordnung h sein soll, so liegen in beliebiger Nachbarschaft[27] einer jeden mehr-

[26] Vgl. Fußnote 8a, a. a. O., S. 18/19.

[27] Unter einer (vorgegebenen) „Nachbarschaft" einer Geraden g verstehen

fachen Stützgeraden t stets andere Geraden, welche mit $\mathfrak{C}$ nur Schnittstellen gemeinsam haben[29]; und zwar ist als Anzahl dieser Schnittstellen nur h, $(h-1)$ oder $(h-2)$ möglich, wenn $\mathfrak{C}$ vom Maximalindex i. w. S. sein soll. Um einen Überblick zu gewinnen, nehmen wir zunächst $\mathfrak{C}$ speziell als *Elementar*bogen an, d. h. als *stetig differenzierbare* Summe von endlich vielen Konvexbogen mit nur endlich vielen mehrfachen Punkten. Liegen dann auf t weder Wendestellen noch Spitzen, so haben die besagten Nachbargeraden mit der (konvexen) Umgebung einer Stützstelle höchstens zwei, mit der (konvexen) Umgebung einer Schnittstelle genau eine Stelle gemeinsam. Liegen überdies keine der beiden Endstellen von $\mathfrak{C}$ auf t, und ist $\mathfrak{C}$ vom Maximalindex i. w. S., so müssen (wie sich weiter unten zeigen wird) alle Stützpunkte auf t nur einfache sein, es müssen sich die Stützpunkte verschiedenen Vorzeichens auf der orientierten Geraden t gegenseitig trennen und die Anzahlen der positiven und der negativen Stützpunkte müssen sich um Eins unterscheiden. Liegen aber Spitzen oder Wendestellen von $\mathfrak{C}$ auf t, so gibt es unter Umständen in beliebiger Nachbarschaft[27] von t noch Gerade, welche mit beliebig vorgegebenen Umgebungen einer solchen Stelle mehr als zwei Stellen gemeinsam haben. Der eben beschriebene Sachverhalt bleibt nun — mit entsprechender Modifikation — auch für den Fall bestehen, daß $\mathfrak{C}$ kein Elementarbogen ist. In der Tat haben wir den

Hilfssatz: Vor.: 1. Es sei t eine (normierte) mehrfache Stützgerade des Bogens (oder der Kurve) $\mathfrak{C}$, *auf welcher höchstens eine Endstelle von* $\mathfrak{C}$ *liegt (falls* $\mathfrak{C}$ *ein Bogen ist). Ferner soll* $\mathfrak{C}$ *von der Ordnung h sein. 2. Jede zu t benachbarte Sekante soll nur h oder* $(h-1)$ *oder* $(h-2)$ *Schnittstellen tragen.*

Beh.: I. Entweder sind dann die auf t gelegenen Stützpunkte alle nur einfach und die „positiven" und „negativen" Stützpunkte trennen sich gegenseitig; überdies unterscheiden sich die Anzahl der positiven und die Anzahl der negativen Stützpunkte um genau Eins voneinander.

II. Oder die Behauptung I gilt nicht. Dann hat jede beliebig

wir hier etwa die Menge aller Geraden, welche fremd sind zu einer vorgegebenen Hyperbel mit der Nebenachse g.

kleine Umgebung mindestens einer der auf t gelegenen Stellen von $\mathfrak{C}$ mit geeignet gewählten Geraden aus einer beliebigen Nachbarschaft von t mehr als zwei Stellen bzw. mehr als eine Stelle gemeinsam, je nachdem die fragliche Stelle eine innere oder eine Endstelle auf $\mathfrak{C}$ ist. Die Aussage ist unabhängig von der Willkür, mit welcher die Normierung von t noch behaftet ist.

Beweis: A) Auf der, im Sinne von Nr. 4, 1 normierten, mehrfachen Stützgeraden t seien $P_1, \ldots, P_p$ die positiven, ferner $N_1, \ldots, N_n$ die negativen Stützpunkte, ein jeder so oft angeschrieben, als es seiner Vielfachheit im Sinne von Nr. 4, 1 entspricht; dabei seien die $P_1, \ldots, P_p$ sowie die $N_1, \ldots, N_n$ so geordnet, wie sie entsprechend der Orientierung von t aufeinanderfolgen. Jeder der Punkte $P_1, \ldots P_p$ ist verschieden von jedem der Punkte $N_1, \ldots, N_n$.

B) Zum Beweise des Hilfssatzes verfolgen wir zunächst in ihren Konsequenzen die nachstehende, der Kürze wegen als *Annahme A* bezeichnete, Hypothese: Es sollen gewisse, im folgenden jeweils noch näher angegebene und in hinreichender, ebenfalls anzugebender, Nachbarschaft von t gelegene Gerade die *Eigenschaft E* besitzen, d. h. besagte Gerade sollen mit der Umgebung einer jeden auf t gelegenen Stütz- bzw. Schnitt- bzw. Endstelle auf $\mathfrak{C}$ höchstens zwei Stellen bzw. genau eine bzw. höchstens eine Stelle gemeinsam haben. Ist etwa $p \geqq n$ und kommt den zu t hinreichend benachbarten *Parallelen* die Eigenschaft E zu, so kann zunächst behauptet werden, daß $n + 1 \geqq p$. Denn andernfalls würde eine, auf der positiven Seite von t gezogene, zu t hinreichend benachbarte und passend gewählte *Parallele* t^+ von t mindestens drei Schnittstellen auf $\mathfrak{C}$ mehr besitzen, als eine passende Parallele t^- auf der negativen Seite von t. In der Tat liefern die p positiven Stützstellen auf t^+ genau $2p$ gemeinsame Stellen von $\mathfrak{C}$ mit t^+, die n negativen Stützstellen hingegen keine, während die (einzige) etwa auf t gelegene Endstelle zu höchstens einer gemeinsamen Stelle Anlaß gibt; bezeichnet noch s die Anzahl der Schnittstellen[28] von t mit $\mathfrak{C}$, so wird (falls t^+ die Eigenschaft E besitzt) die Anzahl p^+ der auf t^+ gelegenen Stellen von $\mathfrak{C}$ nicht kleiner sein als $(2p + s)$. Entsprechend ergibt sich die Anzahl p^- der auf t^- gelegenen Stellen von $\mathfrak{C}$

[28] Vgl. die Verabredung in Nr. 4, 1.

als höchstens gleich $(2n + s + 1)$; dabei bezeichnet t^- eine geeignete, auf der negativen Seite von t verlaufende, Parallele von t. Aus $p > n + 1$, also $p \geqq n + 2$, folgt aber: $p^+ \geqq 2p + s \geqq 2n + 4 + s$ und wegen $2n + s + 1 \geqq p^-$ schließlich: $p^+ - p^- \geqq 3$. Wählen wir also die Parallelen t^+ und t^- als zu t hinreichend benachbarte *Sekanten* von $\mathfrak{C}$, was immer möglich ist,[29] so kommen wir unter der Annahme $p > n + 1$ zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung 2.

O. B. d. A. können und werden wir daher — unter Festhalten an der Annahme A — von jetzt ab $n \leqq p \leqq n + 1$ voraussetzen. Wir werden im folgenden sogar sehen, daß dann $p = n + 1$ ist. Zuvor zeigen wir aber, daß alle Stützpunkte genau einfach sein müssen und daß Stützpunkte gleichen Vorzeichens, welche auf t benachbart sind, auf t getrennt werden von genau einem Stützpunkt des entgegengesetzten Vorzeichens. In der Tat: Es seien auf t im Sinne der Zählung gemäß Nr. 4, 1 etwa λ positive Stützstellen vorhanden ($\lambda \geqq 2$), deren zugehörige Punkte $P_1^*, \ldots, P_\lambda^*$ unter Umständen auch sämtlich oder zum Teil zusammenfallen können, jedenfalls aber durch keinen negativen Stützpunkt getrennt werden sollen. Wir bezeichnen dann mit p_o, p_u bzw. n_o, n_u die Anzahl der positiven bzw. negativen Stützstellen, deren zugehörige Punkte auf t (im Sinne der Festsetzung in Nr. 4, 1) oberhalb oder unterhalb der $P_1^*, \ldots, P_\lambda^*$ liegen. Es sei $n + p = m$, also

(a) $$p_u + p_o + n_u + n_o + \lambda = m, \qquad \text{mit } \lambda \geqq 2.$$

Ist etwa

(1) $$p_o + n_u \geqq p_u + n_o,$$

so folgt aus (a), daß

(2) $$2(p_u + n_o) \leqq m - \lambda$$

und weiter

(3) $$2(p_o + n_u + \lambda) \geqq m + \lambda.$$

Nun sei wieder s die Anzahl aller Schnittstellen von $\mathfrak{C}$ auf t. Ferner sei ein, nicht zu $\mathfrak{C}$ gehöriger, Punkt Q von t unterhalb von P_1^* derart gewählt, daß auf t zwischen P_1^* und Q keine Punkte von $\mathfrak{C}$ liegen. Man *drehe alsdann* t hinreichend wenig um Q, so daß P_1^*

[29] Vgl. Fußnote 3, a. a. O., z. B. S. 55, 3. Zusatz.

in einen Punkt auf der „negativen" Seite der gedrehten Geraden übergeht. Gilt nun die Eigenschaft E für die zu t hinreichend benachbarten Geraden des Büschels mit dem Zentrum Q, so hat die *um Q gedrehte Gerade* t^+ mit $\mathfrak{C}$ genau $(2(p_o + n_u) + 2\lambda + s)$ Stellen gemeinsam, oder um Eins mehr, falls nämlich eine auf t gelegene Endstelle in eine Schnittstelle auf t^+ übergeht, also wegen (3) nicht weniger als $(m + \lambda + s)$ Stellen. Dreht man aber t um Q hinreichend wenig im entgegengesetzten Sinne, so hat die so entstehende Gerade t^- genau $2(p_u + n_o) + s$ Stellen mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam oder um Eins mehr, falls nämlich durch eine auf t gelegene Endstelle noch eine Schnittstelle auf t^- geliefert wird, also wegen (2) nicht mehr als $(m - \lambda + 1 + s)$. Mithin unterscheiden sich die Anzahlen der Stellen, welche t^+ und t^- mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam haben, um mindestens $2\lambda - 1 \geqq 3$. Dies widerspricht der im Hilfssatze gemachten Voraussetzung.

Die in (1) gemachte Voraussetzung erkennt man als für den Beweis unwesentlich.

C) Ist also für alle, zu t hinreichend benachbarten Parallelen und um Q gedrehten Geraden die in B) eingangs gemachte Annahme A erfüllt, so müssen alle Stützpunkte einfach sein und benachbarte Stützpunkte gleichen Vorzeichens müssen durch einen Stützpunkt von dazu entgegengesetztem Vorzeichen getrennt werden. Andererseits zieht aber das Nichtbestehen der Eigenschaft E für die soeben genannten Geradenkategorien nach sich, *entweder* daß auf t eine *Stütz*stelle Π von $\mathfrak{C}$ *oder* daß auf t eine *Schnitt*stelle T von $\mathfrak{C}$ *oder* daß auf t eine *End*stelle E existiert von folgender Beschaffenheit: *Es gibt gewisse Geradenbüschel B, deren Zentra auf t liegen, aber nicht in den gleichen Punkt wie* Π *oder* T *oder* E *fallen und welche zu t beliebig benachbarte Geraden t' enthalten, die mit einer beliebig kleinen Umgebung von* Π *oder von* T *auf* $\mathfrak{C}$ *mehr als zwei Stellen gemeinsam haben oder mit einer Umgebung von* E *auf* $\mathfrak{C}$ *mindestens zwei Stellen.* Dazu ist noch folgendes zu bemerken: Für den Fall einer Schnittstelle T folgt aus dem Nichtbestehen der Eigenschaft E zwar zunächst nur, daß die Nachbargeraden t' mit der Umgebung von T mindestens *zwei* Stellen gemeinsam haben. Da aber T *Schnitt*stelle sein sollte, so liegen alsdann auf geeignet gewählten t' sogar mindestens drei Stellen von $\mathfrak{C}$; denn *jede* zu t hinreichend benachbarte Gerade hat mit der Umgebung einer auf t gelegenen Schnittstelle eine *ungerade* Anzahl von Schnittstellen gemeinsam (abgesehen von etwa noch vorhandenen Stützstellen).

Damit ist die Beh. II sowie ein Teil der Beh. I des Hilfssatzes bewiesen.

D) Zum vollen Beweise unseres Hilfssatzes ist nur noch zu zeigen, daß — unter der in B) gemachten Annahme A — die Anzahlen der positiven und negativen (einfachen) Stützpunkte sich um genau Eins unterscheiden. In der Tat: Es seien $P_1, \ldots, P_p$ die positiven Stützpunkte und $N_1, \ldots, N_n$ die negativen. O. B. d. A. kann $p \geqq n$ angenommen werden. Die Anzahl der auf t gelegenen Schnittstellen mit $\mathfrak{C}$ sei s, außerdem liegt — zufolge der im Hilfssatze gemachten Voraussetzung — höchstens *eine* Endstelle auf t. Zufolge B) ist entweder $p = n + 1$ oder $p = n$. Im letzteren Falle liegen alle Stützpunkte zwischen P_1 und N_p oder zwischen N_1 und P_p; es genügt den ersteren Fall zu betrachten. P_p und N_p sind unmittelbar benachbart auf t. Wir wählen auf t einen Punkt R zwischen P_p und N_p und *drehen* t um R so, daß die gedrehte Gerade t' keine Punkte mit der Umgebung von N_p auf $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat. Dann trifft t' keine Umgebung eines der $P_1, \ldots, P_p$, dagegen die Umgebungen der $N_1, \ldots, N_{p-1}$ (falls $p = 1$, entfällt diese letzte Aussage). Ist nun die Eigenschaft E für t' erfüllt, so liegen auf t' genau $2(p-1) + s$ Stellen von $\mathfrak{C}$ oder $2(p-1) + s + 1$, letzteres, wenn die etwa auf t gelegene Endstelle eine Stelle auf t' beisteuert. Dreht man andererseits t um R so, daß die gedrehte Gerade t'' Punkte mit der Umgebung von N_p gemeinsam hat, so werden von t'' auch die Umgebungen aller $P_1, \ldots, P_p$ getroffen, aber nicht die Umgebungen der $N_1, \ldots, N_{p-1}$. Mithin trägt t'', falls ihr die Eigenschaft E zukommt, mindestens $2(p+1) + s$ Stellen von $\mathfrak{C}$. Wählen wir, was möglich ist, t'' und t' als *Sekanten*, so trägt die eine mindestens $n'' = 2p + s + 2$ und die andere höchstens $n' = 2p + s - 1$ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}$. Daher wäre $n'' - n' \geqq 3$, was der im Hilfssatz gemachten Voraussetzung widerstreitet.

4, 3. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz folgt jetzt die gewünschte Kennzeichnung der stückweise konvexen Bogen vom

Maximalindex i. w. S. Um dieses Kriterium bequem formulieren zu können, bezeichnen wir jede (im Sinne der Nr. 4, 1) *mehrfache Stützgerade* an $\mathfrak{C}$ als *regulär*, wenn sie die in Behauptung I des Hilfssatzes (Nr. 4, 2) genannten Eigenschaften besitzt; alle anderen mehrfachen Stützgeraden sollen *irregulär* genannt werden. Übrigens können und werden wir uns von jetzt ab stets auf den Fall beschränken, daß *die jeweils betrachteten Stützgeraden keine Endstelle von* $\mathfrak{C}$ enthalten. Zufolge Behauptung II liegt dann auf jeder irregulären mehrfachen Stützgeraden t des Hilfssatzes mindestens eine innere Stelle Π von $\mathfrak{C}$, deren Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\Pi\,;\,\mathfrak{C})$ auf $\mathfrak{C}$ sicher nicht konvex ist. Es kann aber $\mathfrak{U}$ nicht einmal stückweise konvex sein. Andernfalls wäre nämlich $\mathfrak{U}$ darstellbar als Summe zweier Konvexbogen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, welche in dem zu Π gehörigen Punkte P zusammenstoßen und wobei $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit t nur den Punkt P gemeinsam haben. Und nun müßte (wie aus den Überlegungen in Nr. 4, 2, C) hervorgeht) auf der durch P gehenden Geraden t ein von P verschiedener Punkt Q existieren von folgender Eigenschaft: Es gibt zu t *beliebig benachbarte* Geraden t', welche dem Büschel mit dem Zentrum Q angehören und welche mit $\mathfrak{U}$ mehr als zwei Stellen gemeinsam haben. Das ist aber nicht möglich. Weil nämlich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ konvex sind und mit t je nur den Endpunkt gemeinsam haben, werden sie von jeder zu t hinreichend benachbarten, durch Q gehenden Geraden t' je in höchstens einem Punkte getroffen. Folglich hat t' mit $\mathfrak{U}$ höchstens zwei Punkte gemeinsam. Wir haben damit bewiesen:

1. Satz: Auf jeder irregulären, mehrfachen Stützgeraden t liegt mindestens eine Stelle von $\mathfrak{C}$, deren Umgebung nicht stückweise konvex ist. Dabei soll $\mathfrak{C}$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes der Nr. 4, 2 genügen; ferner sollen auf t keine Endstellen liegen.

Für Bogen vom Maximalindex i. w. S. gilt aber, *weil für solche Bogen die Voraussetzung 2 des Hilfssatzes (Nr. 4, 2) erfüllt ist*, auch das Umgekehrte:

2. Satz: Ist $\mathfrak{C}$ ein Bogen oder eine Kurve vom Maximalindex i. w. S. und ist $\mathfrak{C}$ nicht stückweise konvex, so müssen mehrfache irreguläre Stützgeraden vorhanden sein.

Beweis: Es sei Π eine Stelle von $\mathfrak{C}$, deren einseitige Umgebung $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{C}$ nicht (stückweise) konvex ist. Nach früher Bewiesenem[30] existieren dann *an diese Umgebung* $\mathfrak{U}$ unendlich viele (verschiedene) mehrfache Stützgeraden $t_1, t_2, \ldots$, die zugleich Stützgeraden an die konvexe abgeschlossene Hülle H von $\mathfrak{U}$ sind. Die t_ν können so gewählt werden, daß ihre Stützpunkte mit $\mathfrak{U}$ für $\nu \to \infty$ gegen Π konvergieren und daß die t_ν selber mit $\nu \to \infty$ gegen die Trägergerade der Halbtangente an $\mathfrak{U}$ in Π konvergieren. Nur auf endlich vielen t_ν liegen Endstellen von $\mathfrak{C}$; wir nehmen daher im folgenden stets an, daß t_ν von solchen Endstellen frei ist. Der Beweis unseres Satzes ergibt sich nun so:

A) Es wird gezeigt (Nr. 4, 4):

Vor.: Es sei t_ν eine mehrfache Stützgerade an $\mathfrak{U}$ und zugleich Stützgerade an die konvexe abgeschlossene Hülle H von $\mathfrak{U}$. Ferner sei t_ν reguläre mehrfache Stützgerade an $\mathfrak{C}$ oder es sei t_ν überhaupt keine mehrfache Stützgerade an $\mathfrak{C}$ (im Sinne von Nr. 4, 1).

Beh.: Auf t_ν existiert ein Randpunkt Q von H, welcher im Innern eines Teilbogens $\mathfrak{T}_\nu$ von $\mathfrak{C}$ liegt und wobei — von Q abgesehen — $\mathfrak{T}_\nu$ ganz auf der zu H fremden Seite von t_ν verläuft. $\mathfrak{T}_\nu$ ist also, abgesehen höchstens von Q, fremd zu $\overline{\mathfrak{U}}$.

B) Es wird gezeigt (Nr. 4, 5):

Gilt für unendlich viele t_ν (vgl. oben) die Behauptung von A), *so gibt es (mindestens) einen nicht stückweise konvexen, von $\mathfrak{U}$ verschiedenen Teilbogen $\mathfrak{U}_1$ von $\mathfrak{C}$, dessen eine Endstelle Π_1 in den gleichen Punkt P fällt wie die Endstelle Π von $\mathfrak{U}$ und welcher in Π_1 die gleiche Halbtangente[31] h besitzt wie $\mathfrak{U}$. Überdies ver-*

---

[30] Vgl. Fußnote 8b, a. a. O., S. 3 und S. 6, Zeile 1 von oben ff. Dort ist allerdings der angezogene Hilfssatz nur für den Fall eines *einfachen* Bogens bewiesen; er gilt indes — mit entsprechender Modifikation — auch für den Fall des Auftretens beliebig vieler mehrfacher Punkte. — Die *Umgebung* $\mathfrak{U}$, auf welche der in Rede stehende Hilfssatz jeweils angewendet wird, ist immer als hinreichend klein und so anzunehmen, daß die Anfangs- und die Endstelle von $\mathfrak{U}$ beide auf der Begrenzung der konvexen Hülle von $\mathfrak{U}$ liegen.

[31] Die einseitigen Tangenten existieren (eindeutig) in jedem Punkte eines Bogens endlicher Ordnung. Folglich fallen die einseitigen Tangenten in P an $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{H}$ zusammen. Und die in Rede stehenden Stützgeraden konvergieren gegen die Tangente in P an $\mathfrak{H}$.

läuft $\mathfrak{U}_1$ *nicht ganz innerhalb der konvexen Hülle von* $\mathfrak{U}$, *aber auf der gleichen Seite der Trägergeraden von* h *wie* $\mathfrak{U}$.

C) Jetzt kann der Beweis von Satz 2 indirekt so beendet werden: Es sei die Behauptung von Satz 2 falsch, so daß, weil Nr. 4, 2 anwendbar ist, alle (etwa vorhandenen) mehrfachen Stützgeraden von $\mathfrak{C}$ regulär sind. Dann gilt die (Voraussetzung und) Behauptung von A) für alle t_ν von $\mathfrak{U}$. Daher existiert der in B) genannte Teilbogen $\mathfrak{U}_1$. Für $\mathfrak{U}_1$ gilt aber wieder A). Daher läßt sich B) wieder auf $\mathfrak{U}_1$ anwenden usw. Man erhält so eine Folge unendlich vieler Teilbogen $\mathfrak{U}_\nu$ von $\mathfrak{C}$, deren jeder nicht ganz in der konvexen Hülle des vorhergehenden liegt, welche alle den Punkt P als gemeinsamen Endpunkt und welche in P eine gemeinsame Halbtangente h besitzen. Da überdies die $\mathfrak{U}_\nu$ alle auf der gleichen Seite der Trägergeraden von h verlaufen, so müssen alle $\mathfrak{U}_\nu$ verschieden sein. Dann könnte aber $\mathfrak{C}$ nicht von endlicher Ordnung sein. Damit ist Satz 2 bewiesen.

4, 4. Um die *Behauptung* A) *der Nr. 4, 3* zu *beweisen*, bemerken wir: Es sei $t = t_\nu$ so normiert, daß $\mathfrak{U}$ auf der negativen Seite von t liegt. Bezüglich der Punkte R, in welchen $\mathfrak{U}$ von t gestützt wird, sind dann nur folgende Fälle möglich:

a) *entweder* fallen in mindestens einen der Punkte R, etwa in den Punkt R_1, noch positive Stützstellen von t mit $\mathfrak{C} \dot{-} \overline{\mathfrak{U}}$. Da R_1 Randpunkt von H sein muß, ist in diesem Falle die Behauptung A) richtig.

b) *oder:* Fall a) liegt *nicht* vor. Dann sind die R sämtlich Stützpunkte auf t sogar *an* $\mathfrak{C}$, und zwar von negativem Vorzeichen. Gäbe es nur *einen* solchen Stützpunkt R, so müßte R ein Punkt von $\mathfrak{U}$ sein, dessen Vielfachheit bezüglich $\mathfrak{U}$ mindestens gleich 2 ist. Daher wäre t mehrfache Stützgerade an $\mathfrak{C}$. Diese Stützgerade müßte aber nach der Voraussetzung in A) regulär sein, könnte also insbesondere nur *einfache* Stützpunkte tragen, womit wir einen Widerspruch haben. Es muß also mindestens zwei verschiedene negative Stützpunkte R geben. Dann ist aber t mehrfache Stützgerade (im Sinne von Nr. 4, 1), und zwar nach Voraussetzung wieder eine reguläre. Die Punkte R sind daher lauter einfache negative Stützpunkte und zwischen je zwei auf t benachbarten liegt ein einfacher positiver Stützpunkt Q. Nun gehört aber Q

dem Rande von H an und zugleich einem Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$, welcher zu $\overline{\mathfrak{U}}$ fremd ist und — abgesehen von Q — ganz auf der positiven Seite von t verläuft, also zugleich außerhalb von H. Es ist also Q ein Punkt von der in der Behauptung von A) genannten Art.

4, 5. Zum *Beweis der Behauptung* B) *von Nr. 4, 3* bemerken wir: Aus den, nach Annahme existierenden unendlich vielen t_ν kann eine Folge (t_ν) herausgegriffen werden, deren t_ν gegen die Trägergerade der Halbtangente an $\mathfrak{U}$ in P konvergieren.[31] Es sei (t_ν) eine solche Folge von Stützgeraden an H, deren jede also einen Stützpunkt Q mit $\mathfrak{C}$ trägt, welcher innerer Punkt eines — abgesehen höchstens von Q — zu $\overline{\mathfrak{U}}$ fremden, außerhalb H gelegenen Teilbogens $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$ ist. Es sei Q_ν ein solcher Punkt auf t_ν. Mit $\nu \to \infty$ konvergieren die Q_ν gegen P. Nach Annahme gehört Q_ν einem Teilbogen $\mathfrak{T}_\nu$ von $\mathfrak{C}$ an; $\mathfrak{T}_\nu$ ist fremd zu P und so klein wählbar, daß $\mathfrak{T}_\nu$ keine *Stellen* mit $\overline{\mathfrak{U}}$ gemeinsam hat und daß für fast alle ν sämtliche Punkte von $\mathfrak{T}_\nu$ beliebig nahe bei P liegen. Es seien nun $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_q$ die sämtlichen, in P vereinigt liegenden Stellen von $\mathfrak{C}$; ferner seien $\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'_1, \ldots, \mathfrak{U}'_q$ gegebene volle Umgebungen von $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_q$ auf $\mathfrak{C}$, deren abgeschlossene Hüllen stellenfremd sind. Dann müssen in mindestens einer der $\mathfrak{U}', \ldots, \mathfrak{U}'_q$ unendlich viele der $\mathfrak{T}_\nu$ enthalten sein. Andernfalls würden nämlich fast alle $\mathfrak{T}_\nu$ mit einem zu $\mathfrak{U}' \dotplus \mathfrak{U}'_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{U}'_q$ fremden abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{T}^*$ von $\mathfrak{C}$ Stellen gemeinsam haben; und da die $\mathfrak{T}_\nu$ sich gegen P häufen, so müßte auch eine mit P vereinigt liegende Stelle zu $\mathfrak{T}^*$ gehören, was mit der getroffenen Wahl der $\mathfrak{U}', \ldots, \mathfrak{U}'_q$ unvereinbar ist. Es gibt also mindestens einen (nicht ganz zu H gehörigen) Teilbogen $\mathfrak{U}_1$ von $\mathfrak{C}$, dessen eine Endstelle Π_1 nach P fällt und welcher unendlich viele der $\mathfrak{T}_\nu$ enthält. Da jeder $\mathfrak{T}_\nu$ Punkte mit dem Rand von H gemeinsam hat, aber auf der anderen Seite von t_ν wie H verläuft, so können nicht unendlich viele der $\mathfrak{T}_\nu$ auf einem oder auch nur auf endlich vielen konvexen Bogen liegen. Mithin ist jede beliebig kleine Umgebung von Π_1 nicht stückweise konvex. $\mathfrak{U}_1$ hat überdies in Π_1 die gleiche Halbtangente[31] h wie $\mathfrak{U}$ in Π und verläuft übrigens in der Nähe von Π_1 auf der gleichen Seite der Trägergeraden von h wie $\mathfrak{U}$. In der Tat sind bei jeder Kurve endlicher Ordnung an jeder Stelle die einseitigen Halbtangenten vorhanden, also insbesondere die Halbtangenten in Π an $\mathfrak{U}$ und in Π_1 an $\mathfrak{U}_1$. Da aber in beliebiger Nähe von Π_1 noch Punkte von $\mathfrak{U}_1$ auf der konvexen Hülle von $\mathfrak{U}$ liegen, so fällt die Halbtangente an $\mathfrak{U}_1$ in Π_1 zusammen mit der Halbtangente in P an den zugehörigen Begrenzungsbogen von H und folglich auch mit der Halbtangente in Π an $\mathfrak{U}$. Daß die einseitige Umgebung $\mathfrak{U}$ einer Stelle Π auf $\mathfrak{C}$ ganz auf der einen Seite der Trägergeraden der Halbtangente an diese Umgebung in Π verläuft, folgt aus der Annahme, daß $\mathfrak{C}$ endliche Ordnung besitzen soll. Da nun zu P beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{U}$ sowohl als von $\mathfrak{U}_1$ auf der gleichen Seite der Trägergeraden von h liegen, so verlaufen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ beide ganz auf der gleichen Seite von h. Damit ist auch die Behauptung B) bewiesen.

4, 6. Fassen wir den 1. und 2. Satz der Nr. 4, 3 zusammen, so ergibt sich schließlich das gewünschte Kriterium:

Ein Bogen oder eine Kurve von der Ordnung n und vom Maximalindex ist dann und nur dann stückweise konvex, wenn alle etwa vorhandenen mehrfachen Stützgerade regulär sind.

Zusatz 1. Aus dem Beweise des Satzes 2 der Nr. 4, 3 folgt noch: Ist *eine* mehrfache irreguläre Stützgerade vorhanden, so unendlich viele.

Zusatz 2. Das Kriterium gilt *auch für Summen vom Maximalindex aus endlich vielen Kurven oder Bogen.*

§ 5. Stückweise Konvexität der (mehrteiligen) Kurven vierter Ordnung vom Maximalindex im weiteren Sinne.

5, 1. Wir behandeln zum Schlusse noch den Spezialfall der Kurven *vierter* Ordnung vom Maximalindex i. w. S. Für die *einteiligen* Kurven (und Bogen) läßt sich sehr einfach[32] erkennen,

[32] Ich hatte ursprünglich diese stückweise Konvexität[5] durch ähnliche Überlegungen bewiesen, wie sie in § 4 angestellt sind. Nach Einsichtnahme in mein Manuskript bemerkte aber Herr Rosenthal, daß sich der Beweis unmittelbar (weil höchstens *eine* mehrfache Stützgerade möglich ist) ergibt und klassifizierte im Anschluß daran sämtliche einteilige Kurven vierter Ordnung vom Maximalindex i. w. S. (vgl. Fußnote 2).

daß sie stückweise konvex sind. Für die *mehrteiligen*[33] Kurven $\mathfrak{M}_4$ kann man die stückweise Konvexität etwa folgendermaßen erkennen.

Eine mehrteilige Kurve ist erklärt als Summe von (verschiedenen) eindeutigen stetigen Kreisbildern; diese einzelnen Summanden heißen die *Zweige* der Kurve. Eine $\mathfrak{M}_4$ kann nicht mehr als vier Zweige besitzen, deren keiner zu einer beschränkten Kurve projektiv äquivalent ist. Im übrigen besitzt die $\mathfrak{M}_4$ höchstens abzählbar viele Zweige. Man entnimmt dies der allgemeinen Feststellung: *Eine ebene Kurve $\mathfrak{C}$ von höchstens abzählbarer (also insbesondere endlicher oder beschränkter) Ordnung besitzt höchstens abzählbar viele Zweige.* Dabei sei die Ordnung bezüglich der Sekanten definiert, außerdem sei wieder gefordert, daß auch jede Nicht-Sekante höchstens abzählbar viele (bzw. endlich viele) Stellen mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat. — Zum Beweise bemerkt man, daß im projektiven R_2 die abzählbar vielen Geraden g, deren drei Koordinaten (bezüglich eines festen Koordinatensystems) in rationalem Verhältnisse zueinander stehen, überall dicht liegen. Jeder Zweig von $\mathfrak{C}$ hat also mit (mindestens) einer dieser Geraden g Stellen gemeinsam. Besäße nun $\mathfrak{C}$ überabzählbar viele Zweige, so hätte mindestens eine der Geraden g, etwa g_0, mit überabzählbar vielen Zweigen Stellen gemeinsam. Daher müßten auf g_0 überabzählbar viele Stellen von $\mathfrak{C}$ liegen, was nicht möglich ist.

Schließlich beachte man, daß *höchstens ein Punkt einer $\mathfrak{M}_4$ die Vielfachheit drei besitzen und daß, falls ein solcher Punkt vorhanden ist, überhaupt kein anderer mehrfacher Punkt auf der $\mathfrak{M}_4$ auftreten kann.*

5, 2. Den Beweis für die stückweise Konvexität der $\mathfrak{M}_4$ führen wir indirekt. Wir machen also die Annahme, es existiere auf einem der Zweige, etwa auf $\mathfrak{Z}_1$, eine Stelle Π, deren einseitige Umgebung $\mathfrak{U}$ nicht konvex sei; wir nehmen $\mathfrak{U}$ als fremd zur uneigentlichen Geraden an. Da höchstens *ein* dreifacher Punkt auftritt, kann und soll $\mathfrak{U}$ so klein gewählt werden, daß $\mathfrak{U}$ in seinem Innern keinen dreifachen Punkt der $\mathfrak{M}_4$ enthält. Es sei H die

[33] Bezüglich der mehrteiligen Kurven vierter Ordnung vom Maximalindex im *engeren* Sinne vgl. insbesondere Fußnote 6, Juel, a. a. O., S. 7—10.

konvexe Hülle von $\mathfrak{U}$ und es sei s eine Stützgerade an H, welche zugleich mehrfache Stützgerade an $\mathfrak{U}$ ist.[34]

Kein Stützpunkt S von s mit $\mathfrak{U}$ kann zu zwei oder mehr Stützstellen des *gleichen* Vorzeichens (bezüglich s) von s mit $\mathfrak{M}_4$ gehören. Wären nämlich in S zwei solche Stützstellen vereinigt, so würden wegen des Fehlens dreifacher Punkte auf $\mathfrak{U}$ keine weiteren Stellen von $\mathfrak{M}_4$ nach S fallen; ferner könnte s keine von S verschiedenen Punkte Q mit $\mathfrak{M}_4$ gemeinsam haben, da sonst durch Q gewisse Nachbargerade von s liefen, welche mit der $\mathfrak{M}_4$ mindestens fünf Punkte gemeinsam hätten. Würden also nach S mehrere Stützstellen mit $\mathfrak{M}_4$ vom gleichen Vorzeichen fallen, so enthielte s keine weiteren Stellen von $\mathfrak{M}_4$ und folglich würde es Nachbargeraden von s geben, welche fremd sind zu $\mathfrak{M}_4$. Dann aber wäre $\mathfrak{M}_4$ nicht vom Maximalindex. Es fällt also nach S nur *eine* Stelle insbesondere von $\mathfrak{U}$, nämlich die Stützstelle mit $\mathfrak{U}$. Da s eine mehrfache Stützgerade an $\mathfrak{U}$ sein sollte, so liegen auf s mindestens zwei verschiedene Stützpunkte mit $\mathfrak{U}$. Und weil $\mathfrak{U}$ von (höchstens) vierter Ordnung sein muß, so kann es auch nicht mehr als zwei solche Stützpunkte geben. *Auf s liegen also genau zwei verschiedene Stützpunkte S_1, S_2 mit* $\mathfrak{U}$.

Auf s kann ferner keine Schnittstelle mit $\mathfrak{M}_4$ liegen, weil es sonst Nachbargeraden von s geben würde, die mit $\mathfrak{M}_4$ mindestens fünf Stellen gemeinsam hätten. Aus dem gleichen Grunde liegt keine Stelle von $\mathfrak{M}_4$ auf s außerhalb der beschränkten, abgeschlossenen, von S_1 und S_2 begrenzten Strecke s_{12}. Andrerseits muß aber auf s_{12} noch eine Stelle von $\mathfrak{M}_4$ liegen, da $\mathfrak{M}_4$ vom Maximalindex sein soll; und da besagte Stelle keine Schnittstelle sein kann, muß sie Stützstelle sein, und zwar vom entgegengesetzten Vorzeichen wie die in S_1 und S_2 gelegenen Stellen von $\mathfrak{U}$. Man erkennt weiter, daß auch nicht mehr als eine derartige Stützstelle vorhanden sein kann. Zusammengefaßt: *Auf s liegt außer den beiden, in verschiedene Punkte fallenden, das gleiche Vorzeichen besitzenden Stützstellen S_1, S_2 mit $\mathfrak{U}$ noch genau eine weitere nicht zu $\mathfrak{U}$ gehörige Stelle S_3 von $\mathfrak{M}_4$. Dabei liegt S_3 auf s_{12} und ist Stützstelle von s mit $\mathfrak{M}_4$ vom entgegengesetzten Vorzeichen auf s wie S_1 und S_2. Die Möglichkeit, daß z. B. S_1 und*

[34] Solcher Stützgeraden gibt es unendlich viele. Jede hat mindestens zwei Stützstellen mit dem Innern von $\mathfrak{U}$ gemeinsam. Vgl. Fußnote 30.

S_3 *in den gleichen Punkt fallen, ist zugelassen.* Die *Punkte*, in welche S_1, S_2, S_3 fallen, bezeichnen wir im folgenden der Kürze wegen ebenfalls mit S_1, S_2, S_3.

5, 3. Da $\mathfrak{U}$ als nicht-stückweisekonvex angenommen wurde (Nr. 5, 2), so gibt es unendlich viele mehrfache Stützgeraden s von $\mathfrak{U}$, welche zugleich Stützgeraden an H sind;[30] aus diesen kann und soll eine *gegen die Trägergerade der Halbtangente* h *in* Π *an* $\mathfrak{U}$ *konvergierende Teilfolge* (s_ν) so ausgewählt werden, daß *erstens* keine zwei dieser Stützgeraden auf $\mathfrak{U}$ gelegene Stützpunkte S_1 oder S_2 gemeinsam haben und daß *zweitens* die Verbindungsgerade irgend zweier, zu *verschiedenen* Stützgeraden gehöriger, auf $\mathfrak{U}$ gelegener Stützpunkte S_1, S_2 niemals Stützgerade an $\mathfrak{U}$ ist.

Wir zeigen jetzt: Im Rahmen der bereits aufgezählten Forderungen läßt sich (s_ν) überdies so wählen, daß *alle* S_3 *dem gleichen Zweige* $*\mathfrak{Z}$ *von* $\mathfrak{M}_4$ *angehören*; dabei kann $*\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}_1$ verschieden sein oder $*\mathfrak{Z}$ kann mit $\mathfrak{Z}_1$ übereinstimmen. In der Tat: Es seien s und s' zwei Stützgeraden aus (s_ν) und S_1, S_2, S_3 bzw. S'_1, S'_2, S'_3 ihre Stützpunkte. Die Verbindungsgerade v von S_3 und S'_3 hat dann mit $\mathfrak{M}_4$, außer S_3 und S'_3 noch mindestens zwei untereinander, und von S_3, S'_3 verschiedene (zu $\mathfrak{U}$ gehörige) Stellen gemeinsam; denn zufolge der zweiten, an (s_ν) gestellten Forderung wird $\mathfrak{U}$ von v geschnitten und überdies liegen Anfangs- und Endstelle von $\mathfrak{U}$ auf der *gleichen* Seite von v. Es gehöre nun S_3 zum Zweige $\mathfrak{Z}_3$, ferner S'_3 zum Zweige $\mathfrak{Z}'_3$. Sind jetzt $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_3$ und $\mathfrak{Z}'_3$ alle untereinander verschieden, so kann weder $\mathfrak{Z}_3$ noch $\mathfrak{Z}'_3$ zu einer beschränkten Kurve projektiv äquivalent sein. In der Tat müßte andernfalls v mit $\mathfrak{Z}_3$ oder mit $\mathfrak{Z}'_3$ mindestens eine Stützstelle oder zwei Schnittstellen gemeinsam haben, die sämtlich weder auf $\mathfrak{Z}_1$ noch auf $\mathfrak{Z}'_3$ bzw. $\mathfrak{Z}_3$ liegen. Dann hätte aber eine zu v hinreichend benachbarte, passend gewählte Gerade mindestens fünf Stellen mit $\mathfrak{M}_4$ gemeinsam gegen die Voraussetzung. Es muß somit, falls nicht $\mathfrak{Z}_3$ und $\mathfrak{Z}'_3$ identisch sind, mindestens einer der Zweige $\mathfrak{Z}_3$, $\mathfrak{Z}'_3$ entweder mit $\mathfrak{Z}_1$ oder mit einem derjenigen Zweige identisch sein, die sich *nicht* ganz ins Endliche projizieren lassen. Da es nicht mehr als vier Zweige der letzteren Art gibt, so ist, falls $\mathfrak{Z}_3$ und $\mathfrak{Z}'_3$ verschieden sind, mindestens einer der Zweige $\mathfrak{Z}_3$, $\mathfrak{Z}'_3$ identisch mit einem unter k festen Zweige ($k < 6$). Man kann also jedenfalls aus (s_ν) eine Teilfolge herausheben, für welche alle S_3 zum *gleichen* Zweige $^*\mathfrak{Z}$ gehören; da jede Auswahlfolge aus (s_ν) die oben gestellten beiden Forderungen Erstens und Zweitens ebenfalls erfüllt, ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Man erkennt nun wie in Nr. 4, 5, daß $\mathfrak{Z}$ einen (nicht-stückweise konvexen) Teilbogen $\mathfrak{U}_1$ enthält, dessen Endstelle in den gleichen Punkt P fällt wie Π usw. Damit haben wir aber im wesentlichen die gleiche Sachlage (wie bei einer einteiligen Kurve[35] oder auch) wie in Nr. 4, 5 bzw. in Nr. 4, 3; C). Wir kommen also mit unserer Annahme zu einem Widerspruch. Daher muß $\mathfrak{M}_4$ stückweise konvex sein. Folglich gilt der

Satz: Jede ein- oder mehrteilige Kurve $\mathfrak{M}_4$ von vierter Ordnung und vom Maximalindex im weiteren Sinne ist stückweise konvex, d. h. die Umgebung einer jeden Stelle von $\mathfrak{M}_4$ ist als Summe höchstens zweier Konvexbogen darstellbar.

---

[35] Da nämlich $\mathfrak{Z}_1$ und $^*\mathfrak{Z}$ jedenfalls den Punkt P gemeinsam haben, kann man beide zu einem einzigen Zweige $\mathfrak{Z}^*$ vereinigen, falls nicht schon $\mathfrak{Z}_1$ und $^*\mathfrak{Z}$ identisch sind. $\mathfrak{Z}^*$ hätte aber mehrere Stützgeraden der in Rede stehenden Art. Vgl. die Beweisandeutung in Fußnote 32.