Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1934. Heft I

Januar-März-Sitzung

München 1934
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte.

Von Georg Aumann in München.

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung vom 3. Februar 1934.

Mit 3 Figuren.

Übersicht.

Einleitung.

1. Der Begriff „Mittel" 45
2. Eine brauchbare Definition des Punktmittels 47
3. Analytische Mittelwerte 48

Erstes Kapitel: Allgemeines über analytische Mittel.

4. Definition des analytischen Mittels 49
5. Das Bildmittel 50
6. Taylorsche Entwicklung 52
7. Ein Hilfssatz aus der Algebra 52
8. Beziehung zu den reellen Mitteln 55
9. Der einfache Gebietszusammenhang 56
10. Einteilung der analytischen Mittel 59

Zweites Kapitel:
Die zu einem analytischen Mittel gehörige Konvexität.

11. Die M-konvexen Mengen 60
12. Das Schwarzsche Lemma 63
13. Die M-konvexe Hülle 64

Drittes Kapitel: Über die Struktur der M-konvexen Mengen.

14. Das Strukturproblem 67
15., 16. Eine Hilfskonstruktion 68
17. Ein Hilfssatz aus der Topologie 73
18. Der einfache Zusammenhang 74
19., 20., 21. Die quasiarithmetischen Mittel 75
22. Schlußbemerkung 81

Einleitung.

1. Der Begriff „Mittel". Bei der Aufstellung eines zweckmäßig allgemeinen Begriffs des „Mittelwertes" von n reellen Zahlen ($n \geqq 2$) wird man wohl stets das arithmetische Mittel von n Zahlen zum Vorbild nehmen. Von den vielen Eigenschaften dieses Mittels wird man einige auswählen, die einerseits typisch genug sind, um das zu beschreiben, was der geläufigen Vorstellung von einem „Mittelwert" entspricht, die aber andererseits den Kreis der Betrachtung so wenig einschränken, daß der durch diese Eigenschaften abgesteckte Mittelwertbegriff invariant ist gegenüber einer hinreichend allgemeinen Klasse von Abbildungen. Diesen Weg habe ich in meiner ersten Arbeit über Mittelwerte beschritten und dabei folgende Definition eingeführt:[1]

Sei ein beliebiges reelles Intervall J der x-Geraden vorgegeben. Die reellwertige Funktion $M(x_1, \ldots, x_n)$ ($n \geqq 2$) heißt ein (reelles) Mittel in J, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Variieren $x_1, \ldots, x_n$ in J, dann ist M eine eindeutige, stetige und symmetrische Funktion seiner Argumente.

(II) Zu jedem beschränkten abgeschlossenen Teilintervall A von J gibt es eine positive Konstante ρ, sodaß

$$x_* + \rho\,(x^* - x_*) \leqq M(x_1, \ldots, x_n) \leqq x^* - \rho\,(x^* - x_*),$$

wobei x^* und x_* das Maximum und das Minimum der in A beliebig variierenden $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten.

(III) Für $\varepsilon > 0$ ist $M(x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_n) \geqq M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Diese Definition besitzt außer anderen wichtigen Eigenschaften die, daß sie invariant ist hinsichtlich der Gruppe aller jener topologischen Abbildungen von reellen Intervallen aufeinander, bei welchen der absolute Betrag des Differenzenquotienten der zugehörigen Abbildungsfunktion eine positive untere und obere Schranke besitzt. Damit ist folgendes gemeint: Ist $\xi = \varphi(x)$ eine solche Funktion, die das Intervall J der x-Geraden auf das Intervall J' der ξ-Geraden abbildet, und $x = f(\xi)$ ihre Umkehrung, dann ist die transformierte Funktion von M,

$$N(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi\big(M(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n))\big),$$

im obigen Sinn wieder ein Mittel im Intervall J'.

Bei den Versuchen, eine entsprechende Theorie im reellen k-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{x} = (x^1; \ldots; x^k)$ aufzubauen, ist man

---

[1] Diese Definition unterscheidet sich nur ganz unwesentlich von der in meiner Arbeit „Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente, I", Math. Ann. 109 (1933), S. 235.

gezwungen, andersartige Definitionseigenschaften heranzuziehen, sofern man nicht verzichtet, nur jene Fälle zu betrachten, bei welchen der „Mittelpunkt" $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ in einem „räumlichen Intervall" definiert wird, wobei die $\varkappa$-te Koordinate von $\mathfrak{M}$ ein reelles Mittel der $\varkappa$-ten Koordinaten der n Punkte ist, und als Abbildungen nur solche zugelassen werden, welche, kurz gesagt, räumliche Intervalle wieder in solche transformierten, d. h. Abbildungen, für die jede Koordinate des Bildraumes Funktion einer einzigen Koordinate des Urbildraumes ist. Die Schwierigkeit, die hier bei Definitionsversuchen entgegentritt, liegt vor allem darin, daß die lineare Ordnung, wie sie uns auf der Zahlengeraden zur Verfügung steht, und die es ermöglicht durch Ungleichungen zu definieren, in höheren Dimensionen wegfällt. Um eine allgemeine Mitteltheorie für höhere Dimensionen zu begründen, müssen wir uns um andere Definitionseigenschaften umsehen; natürlich werden wir sie wieder vom arithmetischen Mittel abschauen.

2. Eine brauchbare Definition des Punktmittels. Um die bereits erwähnte Abbildungsinvarianz herbeizuführen, steckt man den Abbildungsbegriff gleich vom Anfang an in die Definition. Folgende Definition ist naheliegend:

Sei G ein Gebiet des k-dimensionalen Raumes $\mathfrak{x} = (x^1; \ldots; x^k)$. Die Punktfunktion

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{M}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = (m^1; \ldots; m^k),$$

wobei allgemein die Koordinate $m^\varkappa$ eine reelle Funktion aller nk Koordinaten der n Punkte $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ ist, heißt ein *Punktmittel im Gebiet* G, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ist eine eindeutige, stetige und symmetrische Punktfunktion der in G frei veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$;

(b) der Punkt $\mathfrak{M}$ liegt stets in G, insbesondere ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$;

(c) hält man $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ fest, dann liefert die Punktfunktion $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{x}_n)$ als Funktion von $\mathfrak{x}_n$ allein eine topologische Abbildung von G.[2]

[2] Für $k=1$ umfaßt übrigen von den beiden durch (I), (II), (III) bzw. durch (a), (b), (c) definierten Mittelbegriffen keiner den anderen.

Es ist klar, daß diese Definition invariant ist gegenüber jeder topologischen Abbildung von G. Die Frage, ob sich auf diese Definition, oder auf eine eingeschränkte Form derselben, indem man von den durch $\mathfrak{M}$ gemäß (c) verursachten topologischen Abbildungen noch weitere Regularitätseigenschaften fordert, eine brauchbare und interessante Theorie aufbauen läßt, beantwortet nur ein Versuch. Allgemeine Untersuchungen habe ich hierüber noch nicht angestellt. Für den Fall $k = 2$ jedoch ergibt sich in Verbindung mit der Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen eine äußerst interessante Theorie.

3. Analytische Mittelwerte. Die Betrachtungen sind verlegt in die anschauliche komplexe z-Ebene. Dem Punktesatz $z_1, \ldots, z_n$ wird als „Mittelpunkt" zugeordnet der Punkt

$$z = M(z_1, \ldots, z_n).$$

$M(z_1, \ldots, z_n)$ ist eine analytische Funktion der n komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$. Gerade die Forderung (b) erweist sich als ungemein wirksam für analytische Mittelwerte. Es ist überraschend, welche starken Aussagen bereits auf Grund der doch recht harmlos anmutenden Forderungen (a) und (b) gemacht werden können. Z. B. wird sich zeigen, daß das Definitionsgebiet eines analytischen Mittels immer einfach zusammenhängend ist. Andererseits ist für ein analytisches Mittel jeder genügend kleine Kreis als Definitionsgebiet verwendbar. Ähnlich wie man mit Hilfe des arithmetischen Mittels $\dfrac{\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_n}{n}$ die im gewöhnlichen Sinn konvexen abgeschlossenen Punktmengen des k-dimensionalen Raumes definieren kann, indem sie nämlich identisch sind mit den abgeschlossenen Punktmengen, welche mit jedem Punktesatz $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ auch den Schwerpunkt $\dfrac{\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_n}{n}$ enthalten, so läßt sich jedem analytischen Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ eine M-Konvexität zuordnen. Dem Studium dieser Konvexität sind das zweite und dritte Kapitel dieser Arbeit gewidmet. Im dritten Kapitel wird das Strukturproblem aufgeworfen und in Angriff genommen, das Problem, aus der Struktur der Konvexität auf die Eigenschaften des erzeugenden analytischen Mittels rückzuschließen. Für die quasiarithmetischen Mittel, d. h. die aus dem arithmetischen Mittel $\frac{z_1 + \cdots + z_n}{n}$ durch eine konforme Abbildung entstehenden analytischen Mittel, werden wir dieses Problem in befriedigender Weise lösen können. Es wird uns eine rein topologische Charakterisierung der quasiarithmetischen Mittel gelingen, und zwar werden wir zeigen, daß es für ein solches Mittel charakteristisch ist, daß die „M-konvexe Hülle" eines Punktepaares höchstens eindimensional ist; de facto ist diese M-konvexe Hülle für ein quasiarithmetisches Mittel ein analytischer Kurvenbogen, was für das arithmetische Mittel, wo die konvexe Hülle eines Punktepaars die Verbindungsstrecke der beiden Punkte ist, genügend bekannt ist. Die Tatsache, daß für alle nicht quasiarithmetischen Mittel die konvexe Hülle eines Punktepaars, als ebene Punktmenge aufgefaßt, im allgemeinen innere Punkte enthält, ist recht merkwürdig und dürfte noch zu sehr interessanten Untersuchungen Anlaß geben.

Die genauere Einteilung der Arbeit ist dem an den Anfang gestellten ausführlichen Inhaltsverzeichnis zu entnehmen.

Erstes Kapitel:
Allgemeines über analytische Mittel.

4. Definition des analytischen Mittels. Ich nenne die Funktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ $(n \geqq 2)$ im schlichten Gebiet G der z-Ebene ein analytisches Mittel (abgekürzt: a. M.), wenn

(A) $M(z_1, \ldots, z_n)$ im Polyzylinder

$$z_\nu \dot{\in} G \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

eine eindeutige, regulär analytische, in allen ihren Argumenten symmetrische Funktion ist;

(B) $M(z_1, \ldots, z_n)$ nur Werte aus G annimmt, insbesondere $M(z, \ldots, z) = z$ ist.

Erfüllt das analytische Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ außerdem noch die folgende Eigenschaft:

(C) Die Funktion $z' = f(z) = M(z_1, \ldots, z_{n-1}, z)$ vermittelt für jedes System von Werten $z_\nu \subset G$, $\nu = 1, \ldots, n-1$ eine schlichte Abbildung von G,

so nennen wir M ein schlichtes analytisches Mittel.

Folgende Beispiele zeigen, daß es schlichte a. M. gibt:

1. $M = \dfrac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$, G (wegen (B)) irgendein konvexes Gebiet der Ebene; speziell darf G auch die ganze Ebene sein.[3]

2. $M = \sqrt{\dfrac{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}{3}}$; G ist das durch $-\alpha < \varphi < \alpha$, $0 < r < R$, $z = re^{i\varphi}$ gekennzeichnete Gebiet. Damit diese Funktion ein schlichtes a. M. darstellt, muß wegen (B) und (C) der Winkel α durch $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3}$ eingeschränkt werden.

Ein analytisches, nicht schlichtes Mittel haben wir in

$$M(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{3}{2}(z_1 - z_2)^2$$

vor uns, wenn G die ganze Ebene ist.[3]

Die Loslösung der Eigenschaft (C) von (A) und (B), entgegen dem Vorschlag in der Einleitung, wird sich noch als recht zweckmäßig herausstellen. Wir werden nämlich in der Folge noch erfahren, daß die Eigenschaften (A) und (B) zusammen bereits das Typische des „Mittelwerts" hinreichend charakterisieren, während (C) nur eine Forderung über das Verhalten im Großen zum Ausdruck bringt.

5. Das Bildmittel. Durch die analytische Funktion $w = g(z)$ mit der Umkehrung $z = h(w)$ werde das Gebiet G umkehrbar eindeutig auf das schlichte Gebiet H der w-Ebene abgebildet. Es folgt dann unmittelbar, daß die Funktion

$$(5{,}1) \qquad N(w_1, \ldots, w_n) = g\Big(M\big(h(w_1), \ldots, h(w_n)\big)\Big)$$

[3] Für die in dieser Arbeit zu betrachtenden Gebiete gehört der Punkt $z = \infty$ niemals zum Gebiet.

ein analytisches bzw. schlichtes analytisches Mittel im Gebiet H vorstellt (im Sinne von **4**), je nachdem M ein analytisches bzw. schlichtes analytisches Mittel in G ist. $N(w_1, \ldots, w_n)$ heißt das Bildmittel des Mittels $M(z_1, \ldots, z_n)$ vermöge der Abbildung $w = g(z)$.

Das Bildmittel

$$(5,2) \qquad g\left(\frac{h(w_1) + \ldots + h(w_n)}{n}\right)$$

des arithmetischen Mittels nennen wir quasiarithmetisch; als Grundgebiet eines quasiarithmetischen Mittels ist das schlichte Bild eines konvexen Gebietes der z-Ebene vermöge der Abbildung $w = g(z)$ zu nehmen. Wir werden noch sehen, welche ausgezeichnete Stellung die quasiarithmetischen Mittel in der ganzen Theorie einnehmen. Von ganz wenigen Mitteln abgesehen, sind die meisten bekannten Mittel quasiarithmetisch; so z. B. das geometrische Mittel, das harmonische Mittel, das quadratische Mittel

$$\sqrt{\frac{1}{n}(z_1^2 + \ldots + z_n^2)}, \text{ usw.}$$

Offensichtlich gelten die Sätze:

> Jedes quasiarithmetische Mittel ist ein schlichtes analytisches Mittel. Das Bildmittel eines quasiarithmetischen Mittels ist wieder ein solches.

Daß aber nicht jedes schlichte a. M. quasiarithmetisch ist, erkennt man an dem in **4** als zweites Beispiel angeführten Mittel. Angenommen, dieses Mittel wäre quasiarithmetisch; dann gibt es eine nicht identisch konstante analytische Funktion $h(w)$ mit

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{3}(w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2)}\right) = \frac{h(w_1) + h(w_2)}{2}.$$

Aus dem identischen Verschwinden der zweiten gemischten partiellen Ableitung der linken Seite dieser Identität folgt unmittelbar, daß $h(w)$ konstant ist, im Widerspruch mit der oben gemachten Annahme.

6. Taylorsche Entwicklung. Wir entwickeln $M(z_1, \ldots, z_n)$ an der Stelle $z_1 = \ldots = z_n = a$. Wegen der Symmetrie folgt:

$$M(a+\xi_1, \ldots, a+\xi_n) = \mu_0 + \mu_1(\xi_1 + \ldots + \xi_n) + P_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \ldots + P_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \ldots,$$

wobei $P_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ ein symmetrisches homogenes Polynom k-ten Grades ist. Für $\xi_1 = \ldots = \xi_n = \xi$ ergibt sich nach (B):

$$a + \xi = \mu_0 + \mu_1 n\xi + P_2(\xi, \ldots, \xi) + \ldots + P_k(\xi, \ldots, \xi) + \ldots,$$

also $\mu_0 = a$, $\mu_1 = \frac{1}{n}$ und

$$P_k(\xi, \ldots, \xi) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{6,1}$$

Die Entwicklung lautet dann:

$$M(a+\xi_1, \ldots, a+\xi_n) = a + \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} + \mathfrak{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{6,2}$$

worin zur Abkürzung $P_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) + P_3(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \ldots = \mathfrak{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ gesetzt wurde. Insbesondere folgt aus (6,2):

$$\left[\frac{\partial M}{\partial z_\nu}\right]_{z_1 = \ldots = z_n = a} = \frac{1}{n}. \tag{6,3}$$

7. Um über $\mathfrak{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ Genaueres aussagen zu können, brauchen wir einen Hilfssatz aus der Algebra:

Hilfssatz: Es sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ ein symmetrisches Polynom, für welches das Polynom $P(x, \ldots, x)$ identisch verschwindet. Dann gilt die Darstellung:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} (x_\lambda - x_\mu)^2 \, Q(x_\lambda, x_\mu; x_1, \ldots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n),$$

wobei $Q(y_1, y_2; z_1, \ldots, z_{n-2})$ ein Polynom bedeutet, das in y_1, y_2 und in $z_1, \ldots, z_{n-2}$ symmetrisch ist.

Beweis. Es genügt den Satz für den Fall zu beweisen, daß P homogen vom Grad k ist. Nun ist ein homogenes Polynom eine Linearkombination von Potenzproduktsummen des betreffenden Grades:

$$P = \alpha\, s_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + \beta\, s_{\mu_1 \dots \mu_n} + \dots,$$

wobei
$$s_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} + \dots,$$
$$s_{\mu_1 \dots \mu_n} = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} + \dots, \dots,$$

$$(7,1) \qquad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mu_1 + \dots + \mu_n = \dots = k.$$

Bezeichnet man mit $\sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ die Anzahl der Glieder von $s_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$, d. h. den Wert, den $s_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ für $x_1 = \dots = x_n = 1$ annimmt, so gilt nach der Voraussetzung über $P(x_1, \dots, x_n)$:

$$\alpha\, \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + \beta\, \sigma_{\mu_1 \dots \mu_n} + \dots = 0.$$

Daher ist mit $s_{k0 \dots 0} = x_1^k + \dots + x_n^k$, $\sigma_{k0 \dots 0} = n$:

$$n\,P = \alpha \left(\sigma_{k0 \dots 0}\, s_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_n}\, s_{k0 \dots 0}\right)$$
$$+ \beta \left(\sigma_{k0 \dots 0}\, s_{\mu_1 \dots \mu_n} - \sigma_{\mu_1 \dots \mu_n}\, s_{k0 \dots 0}\right) + \dots .$$

Hieraus ersehen wir, daß wir unseren Satz allgemein bewiesen haben werden, wenn er für

$$p\,(x_1, \dots, x_n) = n\, s_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_n} (x_1^k + \dots + x_n^k)$$

bewiesen ist. Um dies zu bewerkstelligen, zeigen wir zunächst, daß

$$(7,2) \qquad p\,(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda < \mu} (x_\lambda - x_\mu)\, p_{\lambda\mu}\,(x_1, \dots, x_n)$$

gesetzt werden darf, wo die $p_{\lambda\mu}$ gewisse Polynome sind. Es ist nämlich:

$$p = \left[n\, x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} - (x_1^k + \dots + x_n^k)\right] + \dots,$$

wo die letzten Punkte jene Ausdrücke andeuten sollen, die man erhält, wenn man auf den in eckigen Klammern gesetzten Ausdruck jene Permutationen anwendet, welche $s_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ aus $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ erzeugen. Weiter ist nach (7,1)

$$p = \left[x_1^{\lambda_1} (x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} - x_1^{\lambda_2 + \dots + \lambda_n}) + \dots\right.$$
$$\left. + x_n^{\lambda_n} (x_1^{\lambda_1} \dots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} - x_n^{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}})\right] + \dots;$$

demnach wird die Gleichung (7,2) bewiesen sein, wenn eine Gleichung der Form

$$(7,3)\qquad x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}-x_1^{\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = (x_2-x_1)\,q_2(x_1,\ldots,x_n)+\cdots+(x_n-x_1)\,q_n(x_1,\ldots,x_n)$$

nachgewiesen ist. Für den Fall $n=2$ hat man

$$(7,4)\qquad x_2^{\lambda_2}-x_1^{\lambda_2}=(x_2-x_1)\,(x_2^{\lambda_2-1}+\cdots+x_1^{\lambda_2-1}).$$

Allgemein gilt:

$$x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}-x_1^{\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = (x_2^{\lambda_2}-x_1^{\lambda_2})\,x_3^{\lambda_3}\ldots x_n^{\lambda_n}+x_1^{\lambda_2}\,(x_3^{\lambda_3}\ldots x_n^{\lambda_n}-x_1^{\lambda_3+\cdots+\lambda_n}),$$

woraus sich mit Hilfe von (7,4) die Gültigkeit von (7,3) durch vollständige Induktion ergibt.

Von (7,2) aus gelangt man aber unter Verwendung der Symmetrie leicht zu einer Darstellung, wie sie im Hilfssatz behauptet wird. Unterwirft man die Gleichung (7,2) sämtlichen Permutationen, so bleibt die linke Seite unverändert wegen der Symmetrie von p. Die entstehenden $n!$ Gleichungen summiert man und dividiert durch $n!$. Es folgt:

$$(7,2^*)\qquad p\,(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\lambda<\mu}(x_\lambda-x_\mu)\,\overset{*}{p}_{\lambda\mu}\,(x_1,\ldots,x_n).$$

Hier ist z. B.

$$(7,5)\qquad \overset{*}{p}_{12}=\frac{1}{n!}\sum_{\lambda<\mu}\left(\sum p_{\lambda\mu}\begin{pmatrix}\ldots\lambda\ldots\mu\ldots\\ \ldots1\ldots2\ldots\end{pmatrix}-\sum p_{\lambda\mu}\begin{pmatrix}\ldots\lambda\ldots\mu\ldots\\ \ldots2\ldots1\ldots\end{pmatrix}\right),$$

wobei das zweite Summenzeichen die Summation über diejenigen $p_{\lambda\mu}$ angibt, die man aus $p_{\lambda\mu}\,(x_1,\ldots,x_n)$ erhält, wenn man darin die $x_1,\ldots,x_n$ auf allen möglichen Arten so permutiert, daß an der λ-ten Argumentstelle x_1, an der μ-ten x_2 zu stehen kommt. Ähnliches gilt für das dritte Summenzeichen. Deshalb ist

$$\overset{*}{p}_{12}\,(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=-\overset{*}{p}_{12}\,(x_2,x_1,x_3,\ldots,x_n),\ \text{also}$$
$$\overset{*}{p}_{12}\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1-x_2)\,q_{12}\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

und allgemein

$$p^*_{\lambda\mu} = (x_\lambda - x_\mu)\, q_{\lambda\mu}(x_1, \ldots, x_n).$$

Weiter folgt aus (7,5), daß $q_{\lambda\mu}$ in x_λ, x_μ und in $x_1, \ldots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ symmetrisch ist, und daß es ein Polynom $\varphi(y_1, y_2; z_1, \ldots, z_{n-2})$ gibt, das in y_1, y_2 und $z_1, \ldots, z_{n-2}$ symmetrisch ist, sodaß

$$q_{\lambda\mu} = \varphi(x_\lambda, x_\mu; x_1, \ldots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$$

gilt. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.[4]

Wenden wir jetzt diesen Hilfssatz auf die Polynome $P_\varkappa$ in **6** an, so erhalten wir für die in der Potenzreihenentwicklung (6,2) auftretende mit $\mathfrak{P}$ abgekürzte Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \tag{7,6}$$

$$\sum_{\lambda<\mu} (\xi_\lambda - \xi_\mu)^2\, \mathfrak{Q}(\xi_\lambda, \xi_\mu; \xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1}, \xi_{\lambda+1}, \ldots, \xi_{\mu-1}, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_n),$$

wobei $\mathfrak{Q}(u_1, u_2; v_1, \ldots, v_{n-2})$ eine reguläre Potenzreihe bedeutet, welche in u_1, u_2 für sich und in $v_1, \ldots, v_{n-2}$ unter sich symmetrisch ist.

8. Beziehung zu den reellen Mitteln. Es gilt

Satz 1. Enthält das Gebiet G das reelle Intervall J und nimmt für alle möglichen Werte von $z_1, \ldots, z_n$ aus J das in G schlichte analytische Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ nur reelle Werte an, dann ist M ein reelles Mittel auf J (im Sinne von **1**).

Beweis. Sei A ein beschränktes abgeschlossenes Teilintervall von J. Ich betrachte dort den Differenzenquotienten

$$F = \begin{cases} \dfrac{M(z_1, z_2, \ldots, z_n) - M(z_1', z_2, \ldots, z_n)}{z_1 - z_1'} & \text{für } z_1 \neq z_1', \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial z_1} & \text{für } z_1 = z_1' \end{cases}$$

für alle $z_1', z_1, z_2, \ldots, z_n$ aus A. Da A beschränkt und abgeschlossen ist, so wird

[4] Vielleicht läßt sich unter Verwendung des Hilbertschen Nullstellensatzes ein kürzerer Beweis unseres Hilfssatzes gewinnen.

$$\underset{(z)\,\{\,A}{\text{unt. Gr.}}\,|F|$$

irgendwo auf A angenommen und muß wegen der Schlichtheit von $M(z_1, \ldots, z_n)$ bezüglich z_1 dann positiv sein. Da F reell ist, so hat es auf A also stets dasselbe Vorzeichen; aus (6, 3) folgt nun, daß F auf A positiv ist, genauer, daß

$$F \geqq \sigma > 0. \tag{8,1}$$

Damit ist bereits die Eigenschaft (III) (s. **1**) nachgewiesen. Aus (8,1) kann man nun ganz leicht das Bestehen von (II) nachweisen. Wir setzen $z_1 \leqq z_2 \leqq \ldots \leqq z_n$, $z_1 < z_n$. Mit $z_1' = z_n$ wird aus (8,1) unmittelbar

$$M(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leqq M(z_n, z_2, \ldots, z_n) - \sigma(z_n - z_1).$$

Weiter besagt (8, 1) zusammen mit der Symmetrie, daß die Funktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ hinsichtlich jedes ihrer Argumente monoton wachsend ist; daher gilt mit Benutzung von (B):

$$M(z_n, z_2, \ldots, z_n) \leqq M(z_n, z_n, \ldots, z_n) = z_n.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt

$$M(z_1, \ldots, z_n) \leqq z_n - \sigma(z_n - z_1),$$

womit das Bestehen der einen Ungleichung von (II) gezeigt ist, und zwar mit $\rho = \sigma$. Analog beweist man die andere Ungleichung. Schließlich erkennt man die Eigenschaft (I) als direkte Folge von (A), womit der Beweis von Satz 1 zu Ende ist.

9. Der einfache Gebietszusammenhang. Aus den Beispielen von **4** und den Überlegungen von **5** geht hervor, daß in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet schlichte a. M. existieren. Jedes solche Gebiet läßt sich nämlich schlicht und konform auf ein konvexes Gebiet abbilden, und in einem konvexen Gebiet gibt es ja mindestens ein schlichtes a. M., nämlich das arithmetische Mittel. Es drängt sich hier die Frage auf, ob denen nicht die zunächst als Bedingungen für M erscheinenden Forderungen (A), (B) und (C) implizit auch Bedingungen für G enthalten, und welches dann etwa notwendige und hinreichende Bedingungen dafür sind, daß in einem Gebiet G analytische und sogar schlichte a. M. existieren. Auf diese Frage gibt eine vollständige Antwort der

Satz 2. *Das schlichte Gebiet G der z-Ebene ist dann und nur dann Grundgebiet eines analytischen Mittels $M(z_1, \ldots, z_n)$, wenn es einfachen Zusammenhang besitzt.*

Beweis. Daß die Bedingung hinreicht und daß es, falls G einfach zusammenhängend ist, auch in G schlichte a. M. gibt, ist bereits durch obige Bemerkungen klargestellt. Die Notwendigkeit dieser Bedingung werden wir daran erkennen, daß es kein a. M. gibt, dessen Grundgebiet mehrfach zusammenhängend wäre.

Zunächst überzeugen wir uns davon in dem einfachsten Fall, wo G das Gebiet $|z| > 0$ ist. Angenommen, $M(z_1, \ldots, z_n)$ ist ein a. M. in G; nach (B) ist dann dort $|M(z_1, \ldots, z_n)| > 0$. Die universelle Überlagerungsfläche von G wird durch $z = e^u$ umkehrbar eindeutig auf die ganze u-Ebene abgebildet. Daher ist $M(e^{u_1}, \ldots, e^{u_n})$ eine in der ganzen u-Ebene eindeutige reguläre Funktion, welche nirgends verschwindet. Die Funktion

$$H(u_1, \ldots, u_n) = \log M(e^{u_1}, \ldots, e^{u_n}) \tag{9,1}$$

mit der Festsetzung $H(0, \ldots, 0) = 0$ ist für jedes einzelne Argument u_ν nach jedem Punkt der u-Ebene hin analytisch fortsetzbar. Nach dem Monodromiesatz ist sie also bei Festhaltung von $n-1$ ihrer Argumente für das n-te Argument eine ganze Funktion; dann ist sie aber nach einem bekannten Satz von Hartogs[5] eine ganze Funktion aller ihrer Argumente. Insbesondere ist nach (9, 1)

$$H(u, \ldots, u) \equiv u. \tag{9,2}$$

Weiter folgt aus (9,1)

$$H(u_1 + 2\pi i, u_2, \ldots, u_n) \equiv H(u_1, \ldots, u_n) + 2k\pi i,$$

[5] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen von einer Veränderlichen fortschreiten, Math. Ann. 62 (1906), S. 1, siehe Satz auf S. 19.

wobei k eine feste ganze Zahl bedeutet. Auf Grund der Symmetrie erhält man dann

$$H(u_1 + 2\pi i, \ldots, u_n + 2\pi i) = H(u_1, \ldots, u_n) + 2kn\pi i$$

und hieraus für $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$ unter Benutzung von (9,2)

$$u + 2\pi i = u + 2kn\pi i,$$

also

$$1 = kn,$$

was wegen $n \geqq 2$ einen Widerspruch darstellt.

Unsere Annahme, daß $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein Mittel in G ist, hat sich damit als falsch herausgestellt, d. h. es gilt: Im Gebiet $|z| > 0$ gibt es kein a. M.

Sei jetzt G ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei endlichen Randpunkten. Den Nachweis, daß auch in einem solchen Gebiet kein a. M. existieren kann, erbringe ich mit Hilfe des zuerst von C. Carathéodory bewiesenen Starrheitssatzes.[6] Er lautet:

Es sei G ein schlichtes mehrfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene, das den Punkt $z = 0$ in seinem Innern enthält und mindestens zwei endliche Punkte zu Randpunkten hat. Die Funktion $f(z)$ sei regulär und eindeutig in G; außerdem sei $f(0) = 0$ und es werde durch $z' = f(z)$ das Gebiet G auf eine Punktmenge abgebildet, die in G enthalten ist. Dann gibt es eine positive Zahl $\Omega < 1$, so daß jede Funktion $f(z)$, die die angegebenen Eigenschaften besitzt, eine topologische Selbstabbildung von G liefert, sobald

$$|f'(0)| > \Omega$$

ist.

Es gilt dann sogar $f'(0) = e^{2\pi i \frac{q}{p}}$, wobei p, q teilerfremde, positive ganze Zahlen bedeuten, und nur wenn $z = 0$ ein Symmetriepunkt von G ist, kann $p > 1$ und die er-

[6] Siehe G. Aumann und C. Carathéodory, Ein Satz über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete, Math. Ann. (1934).

wähnte topologische Selbstabbildung von der identischen Abbildung verschieden sein.

Nun zum Beweis unserer Behauptung. Sei z_0 irgendein innerer Punkt von G. Wir nehmen an, daß die Funktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ in G ein a. M. darstelle. Dann bilden wir die Funktionenfolge

$$M_1(z, z_0) = M(z, z, \ldots, z, z_0),$$

allgemein $M_k(z, z_0) = M_{k-1}\big(z, M_1(z, z_0)\big)$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Offenbar ist $M_k(z_0, z_0) = z_0$ und

$$(9,3) \qquad \alpha = \left[\frac{d}{dz} M_k(z, z_0)\right]_{z=z_0} = \frac{n^k - 1}{n^k};$$

dies folgt ja unmittelbar aus den Entwicklungen von **6**. Außerdem nimmt die Funktion $M_k(z, z_0)$ nur Werte aus G an. Zum Punkt z_0 von G gibt es nach dem Starrheitssatz eine Konstante $\Omega_0 < 1$; wählt man nun k so groß, daß

$$\frac{n^k - 1}{n^k} > \Omega_0$$

ist, so muß nach dem Starrheitssatz $|\alpha| = 1$ sein, was aber wegen $\frac{n^k - 1}{n^k} < 1$ mit (9,3) in Widerspruch steht. Damit ist die Annahme, es gibt in G ein Mittel, hinfällig; der Satz 2 ist somit restlos bewiesen.

10. Einteilung der analytischen Mittel. Auf Grund von Satz 2 haben wir unsere Betrachtungen auf einfach zusammenhängende Gebiete zu beschränken. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist entweder identisch mit der ganzen Ebene, oder konform äquivalent mit dem Innern des Einheitskreises. Ein Mittel ist daher entweder ein „ganzes Mittel", d. h. sein Grundgebiet G ist die ganze endliche Ebene, oder es ist das konforme Bild eines „Kreismittels", so wollen wir ein Mittel nennen, dessen Grundgebiet der Einheitskreis ist. Die Theorie der a. M. zerfällt damit in zwei Teile:

1. Theorie der ganzen Mittel,
2. Theorie der Kreismittel.

Man kann die allgemeine Form eines ganzen Mittels sofort anschreiben; nach (6,2) und (7,6) gilt:

$$(10,1)\qquad M(z_1, \ldots, z_n) = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$$
$$+ \sum_{\lambda < \mu} (z_\lambda - z_\mu)^2 Q(z_\lambda, z_\mu; z_1, \ldots, z_{\lambda-1}, z_{\lambda+1}, \ldots, z_{\mu-1}, z_{\mu+1}, \ldots, z_n),$$

wobei $Q(u_1, u_2; v_1, \ldots, v_{n-2})$ eine beliebige in u_1, u_2 und in $v_1, \ldots, v_{n-2}$ symmetrische ganze Funktion von n Veränderlichen ist.

Soll das Mittel (10,1) für jede einzelne Veränderliche in der ganzen Ebene schlicht sein, dann muß sie in jeder einzelnen Veränderlichen linear sein, d. h. es muß $Q = 0$ sein. Es gilt also der

Satz. Das arithmetische Mittel ist das einzige ganze Mittel, das zugleich schlicht ist.

Die Bearbeitung der fundamentalen Probleme über Kreismittel, wie z. B. des Koeffizientenproblems, des Schlichtheitsproblems usw., sei einer bald folgenden Arbeit vorbehalten; die noch folgenden beiden Kapitel dieser Arbeit sind den rein geometrischen Fragen gewidmet, zu denen die grundlegenden Definitionseigenschaften (A) und (B) von **4** Anlaß geben.

Zweites Kapitel:

Die zu einem analytischen Mittel gehörige Konvexität.

11. Die *M*-konvexen Mengen. Wenn man sich der einfachen geometrisch-anschaulichen Eigenschaften erinnert, die das Handhaben des arithmetischen Mittels so bequem machen, so kommt man dazu, auch bei der Behandlung der allgemeinen a. M. geometrische Betrachtungsweisen einzuführen. Der Begriff, um den sich die dabei ergebende „Geometrie der Mittel" gruppiert, ist die durch ein a. M. erzeugte Konvexität; diese M-Konvexität definieren wir folgendermaßen:

Sei $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein a. M. in G; die Teilmenge A von G heißt M-konvex, wenn mit dem Satz $z_1, \ldots, z_n$ von Punkten von A auch der Punkt $z = M(z_1, \ldots, z_n)$ zu A gehört.

Es gibt M-konvexe Mengen; jede aus einem einzigen Punkt bestehende Menge ist eine solche. Die Menge G ist selbst M-konvex nach (B). Wir werden uns aber gleich davon überzeugen, daß es bei vorgegebenem M außer den eben erwähnten Beispielen von M-konvexen Punktmengen, die ja doch als ausgeartete Fälle zu betrachten sind, stets noch andere M-konvexe Punktmengen gibt. Die Bezeichnung „konvex" wird dadurch gerechtfertigt, daß eine abgeschlossene $\frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$-konvexe Punktmenge nichts anderes ist als eine abgeschlossene, im elementargeometrischen Sinn konvexe Punktmenge. Bezeichnet man die leere Menge auch als M-konvex, so gilt offenbar der Satz:

Der Durchschnitt von beliebig vielen M-konvexen Mengen ist wieder M-konvex.

Aus der Taylorschen Entwicklung (6,2) ist zu ersehen, daß sich ein a. M. im Kleinen ungefähr verhält wie das arithmetische Mittel. Daher ist zu erwarten, daß die Beschaffenheit der Konvexität eines a. M. im Kleinen Ähnlichkeiten aufweist mit der des arithmetischen Mittels. Wenn auch prinzipielle Unterschiede vorhanden sein können (und bei nicht quasiarithmetischen Mitteln tatsächlich auch vorhanden sind, worüber wir uns noch im dritten Kapitel dieser Abhandlung zu unterhalten haben), so bestehen doch gewisse gemeinsame Eigenschaften. Die Wichtigste davon ist ausgedrückt im

Satz 3. Ist $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein in G analytisches Mittel, so gibt es um jeden inneren Punkt a von G als Mittelpunkt einen in G gelegenen Kreis mit der Eigenschaft, daß jede dem Innern dieses Kreises angehörige Kreisscheibe M-konvex ist.

Beweis. Wir haben die folgende Abschätzung des arithmetischen Mittels zu benutzen:

Ist $|z_\nu| \leqq r$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, dann gilt

$$\left|\frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}\right| \leqq r - \frac{\operatorname{Max}|z_\nu - z_{\nu'}|^2}{4\,n\,r}. \tag{11,1}$$

In der Tat, elementare Schwerpunktsbetrachtungen zeigen, daß für $|z_\nu| \leqq r$ und $\operatorname{Max}|z_\nu - z_{\nu'}| = 2\eta > 0$ die Funktion

$A = \left| \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} \right|$ ihr Maximum erreicht für das Wertesystem

$$z_1 = \zeta + i\eta,\ z_2 = \zeta - i\eta,\ z_3 = \ldots = z_n = r,$$
$$\zeta = \sqrt{r^2 - \eta^2}.$$

Dies ergibt den Maximalbetrag

$$A^* = \frac{2\zeta + (n-2)r}{n} = r - \frac{2}{n}\frac{\eta^2}{r+\zeta} \leqq r - \frac{\eta^2}{nr},$$

womit die obige Abschätzung bewiesen ist.

Sei nun $a = 0$. Dann gilt nach (6,2) und (7,6):

$$(11,2) \qquad M(z_1, \ldots, z_n) = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} + \sum_{\lambda < \mu} (z_\lambda - z_\mu)^2\, \mathfrak{Q}(z_\lambda, z_\mu; \ldots).$$

Wird $\underset{|z_\nu| \leqq R}{\operatorname{Max}} |\mathfrak{Q}(z_\lambda, z_\mu; \ldots)| = D(R)$ gesetzt, dann ist, $\lim\limits_{R \to 0} D(R) = |\mathfrak{Q}(0, 0; 0, \ldots)|$ und für $|z_\nu| \leqq R$ ergibt sich aus (11,2)

$$(11,3) \qquad \left| M(z_1 \ldots, z_n) - \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} \right| \leqq \binom{n}{2} D(R) \operatorname{Max} |z_\nu - z_{\nu'}|^2.$$

Da $D(R)$ mit $R \to 0$ monoton abnimmt, $\frac{1}{R}$ monoton zunimmt, so kann man ein $R_1 > 0$ derart wählen, daß

$$(11,4) \qquad \binom{n}{2} D(R_1) < \frac{1}{4nR_1}.$$

Stellt nun $|z - b| < r$ irgendeine Kreisscheibe im Innern von $|z| < R_1$ dar, so ist $r \leqq R_1$, also nach (11,1), (11,3) und (11,4) innerhalb dieser Kreisscheibe

$$\left| M(z_1, \ldots, z_n) - \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} \right| < \frac{\operatorname{Max} | z_\nu - z_{\nu'} |^2}{4 n r},$$

$$\left| \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} - b \right| < r - \frac{\operatorname{Max} | z_\nu - z_{\nu'} |^2}{4 n r},$$

woraus folgt

$$| M(z_1, \ldots, z_n) - b | < r.$$

Diese Ungleichung besagt, daß die Kreisscheibe $|z - b| < r$ eine M-konvexe Menge ist. Der Satz 3 ist damit bewiesen.

Es ist sicher, daß ganz allgemein bei beliebigen Ovalscheiben mit einer Begrenzungskurve, deren positiv gemessene Krümmung eine positive untere Schranke hat, entsprechende Sätze im Kleinen Geltung haben; es liegt nicht in meiner Absicht, näher darauf einzugehen.

12. Das Schwarzsche Lemma. Für Kreismittel läßt sich das Ergebnis von Satz 3 noch auf ganz andere Weise ableiten und dabei sogar noch verschärfen. Wir beweisen nämlich den

Satz 4. Ist $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein analytisches Mittel in $|z| < 1$, dann ist jede in diesem Kreis enthaltene Kreisscheibe M-konvex.

Beweis. Sind A und B zwei Punkte in dem durch $|z_\nu| < 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ charakterisierten komplex n-dimensionalen Gebiet $\mathfrak{G}$, so werde die Distanz der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Carathéodoryschen Metrik[7] durch $D_{\mathfrak{G}}(A, B)$ bezeichnet. Sind $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ die Koordinaten der beiden Punkte, dann ist

$$D_{\mathfrak{G}}(A, B) = \operatorname*{Max}_{\nu = 1, \ldots, n} E(a_\nu, b_\nu), \tag{12,1}$$

wobei $E(a, b)$ die nichteuklidische Entfernung der Punkte $z = a$ und $z = b$ in der Kreisscheibe $|z| < 1$ bedeutet. Für das Gebiet $\mathfrak{G}$ lautet dann das Schwarzsche Lemma:

Ist $f(Z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ eine in $\mathfrak{G}$ analytische Funktion und ist für jeden Punkt Z der absolute Betrag von $f(Z)$ kleiner als 1, so gilt für jedes Punktepaar A, B aus $\mathfrak{G}$:

$$E\big(f(A), f(B)\big) \leq D_{\mathfrak{G}}(A, B). \tag{12, 2}$$

---

[7] C. Carathéodory, Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 97 (1927), S. 76—98.

Wir wenden nun das an auf die Funktion $M(z_1, \ldots, z_n) = M(Z)$. Für A wählen wir den Punkt $(0, \ldots, 0)$, für B den Punkt $(b_1, \ldots, b_n)$, in dem $|M(z_1, \ldots, z_n)|$ für $|z_\nu| = r$, $0 < r < 1$, das Maximum annimmt. Dann ist nach (12,1), (12,2)

$$E(0, |M(B)|) = E(0, M(B)) \leqq D_{\mathfrak{G}}(A, B)$$
$$= \max_{\nu = 1, \ldots, n} E(0, b_\nu) = E(0, r),$$

also

$$|M(z_1, \ldots, z_n)| \leqq |M(b_1, \ldots, b_n)| \leqq r$$

für alle z_ν mit $|z_\nu| \leqq r$.

Damit ist zunächst die M-Konvexität für jede Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $z = 0$ nachgewiesen. Für jede andere Kreisscheibe folgt es aber dann durch Anwendung einer konformen Selbstabbildung von $|z| < 1$, durch die $M(z_1, \ldots, z_n)$ wieder in ein Kreismittel und der fragliche exzentrische Kreis in einen zu $|z| = 1$ konzentrischen übergeführt werden. Damit ist Satz 4 bewiesen. Man kann ihn, wie man ohne weiteres einsieht, noch in etwas anderer Weise ausdrücken:

Satz 4a. Jede in einer M-konvexen Kreisscheibe enthaltene Kreisscheibe ist ebenfalls M-konvex.

Hier ist für Kreismittel noch eine interessante geometrische Tatsache zu erwähnen; sie folgt unmittelbar aus Satz 4:

Seien in $|z| < 1$ die Punkte $z_1, \ldots, z_n$ vorgegeben. Man betrachte die Gesamtheit aller in $|z| < 1$ gelegenen Kreisscheiben $|z - b| < \rho$, welche die Punkte $z_1, \ldots, z_n$ enthalten. Der Durchschnitt aller dieser Kreisscheiben ist ein im gewöhnlichen Sinn konvexes Kreispolygon $K(z_1, \ldots, z_n)$ einschließlich seiner inneren Punkte (s. Figur 1, wo $n = 3$). Die nur von $z_1, \ldots, z_n$ abhängige Punktmenge $K(z_1, \ldots, z_n)$ enthält die Punkte $z_1, \ldots, z_n$ und ist für jedes Kreismittel M eine M-konvexe Menge. Daher liegt der Mittelwert $M(z_1, \ldots, z_n)$ eines jeden Kreismittels stets auf der Punktmenge $K(z_1, \ldots, z_n)$.

13. Die *M*-konvexe Hülle. Um mit M-konvexen Mengen besser operieren zu können, führen wir einen neuen Begriff ein, die

M-konvexe Hülle einer Punktmenge; wieder sei $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein a. M. in G. Wir definieren:

Unter der M-konvexen Hülle A_M der in G abgeschlossenen Teilmenge A von G verstehen wir die kleinste, A enthaltende, in G abgeschlossene, M-konvexe Teilmenge von G.

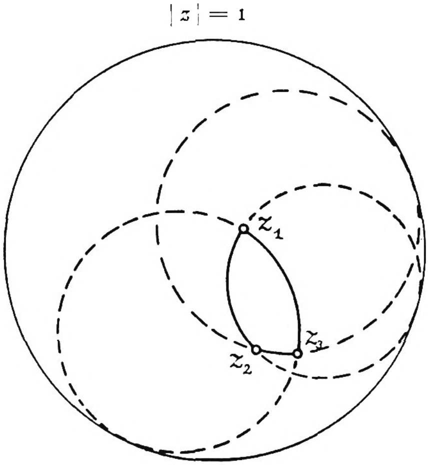

Fig. 1.

Sie existiert und läßt sich folgendermaßen herstellen. Wir bilden die Mengen $A^{(0)} = A$ und für $\lambda \geqq 0$

$$(13,1) \qquad A^{(\lambda+1)} = \sum_{z_1, \ldots, z_n \prec A^{(\lambda)}} \{M(z_1, \ldots, z_n)\}$$

d. h. die Vereinigungsmenge aller einpunktigen Mengen $\{M(z_1, \ldots, z_n)\}$, wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Punktmenge $A^{(\lambda)}$ durchlaufen. Offenbar ist $A^{(0)} \prec A^{(1)} \prec A^{(2)} \prec \ldots \prec G$ und daher

$$(13,2) \qquad G - \lim_{\lambda \to \infty} A^{(\lambda)} = L\,[8]$$

vorhanden. Ich behaupte nun, daß $A_M = L$. In der Tat, zunächst folgt unmittelbar, daß L in G abgeschlossen ist. Weiter ist L

[8] $G - \lim A^{(\lambda)}$ ist der Durchschnitt von G mit dem gewöhnlichen abgeschlossenen Limes der Mengenfolge $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots$ (siehe F. Hausdorff, Mengenlehre [1927], S. 146).

eine M-konvexe Menge; sind nämlich $z_1, \ldots, z_n$ Punkte von L, dann gibt es nach (13,2) zu jedem $\lambda \geqq 0$ je n Punkte $\xi_1^{(\lambda)}, \ldots, \xi_n^{(\lambda)}$ aus $A^{(\lambda)}$, so daß für $\nu = 1, \ldots, n$

$$z_\nu = \lim_{\lambda \to \infty} \xi_\nu^{(\lambda)}.$$

Daher ist wegen der Stetigkeit von $M(z_1, \ldots, z_n)$

$$M(z_1, \ldots, z_n) = \lim_{\lambda \to \infty} \xi^{(\lambda)} = \xi^*,$$

wobei $M(\xi_1^{(\lambda)}, \ldots, \xi_n^{(\lambda)}) = \xi^{(\lambda)}$ einen Punkt aus $A^{(\lambda+1)}$ bedeutet. Somit ist ξ^* nach (13,2) ein Punkt von L. Schließlich ergibt sich aus der Konstruktion der $A^{(\lambda)}$, daß A_M den Ungleichungen

$$A^{(\lambda)} \{ A_M$$

zu genügen hat. Nach all dem Vorausgehenden ist also

$$A_M \{ L \{ A_M;$$

das ist aber gerade die Behauptung von oben.

Durch die Mengenfunktion A_M wird die von M erzeugte Konvexität zur Genüge beschrieben; es wird daher vor allem darauf ankommen, die Eigenschaften der Funktion A_M zu studieren.

Aus dem Satz 4 ergibt sich für die M-konvexe Hülle eine bedeutsame Folgerung:

Satz 5. Ist $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein Kreismittel, so ist die M-konvexe Hülle jeder absolut-kompakten Menge wieder absolut-kompakt.

Ist nämlich A eine absolut-kompakte Menge von $|z| < 1$, d. h. beschränkt und (in bezug auf die Ebene!) abgeschlossen, dann ist sie enthalten in einer Kreisscheibe $|z| \leqq \rho < 1$. Nach Satz 4 ist auch die Menge A_M in dieser Kreisscheibe enthalten, als eine in $|z| < 1$ abgeschlossene Menge dann absolut-kompakt, w. z. z. w.

Die Aussage von Satz 5 gilt natürlich auch für jedes Bildmittel eines Kreismittels; dies ergibt mit Bezug auf Satz 2 den

Satz 5a. Besitzt das Grundgebiet G des analytischen Mittels $M(z_1, \ldots, z_n)$ einen endlichen Randpunkt, dann ist die M-konvexe Hülle A_M jeder absolut-kompakten Teilmenge A von G wieder absolut-kompakt.

Die Bedeutung dieses Satzes wird einem erst dann klar, wenn man sich davon überzeugt, daß für ganze Mittel (s. **10**) die Verhältnisse andere sind; dies zeigt das folgende Beispiel:

Für das ganze Mittel $M(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{3}{2}(z_1 - z_2)^2$ ist die M-konvexe Hülle A_M der aus den Punkten $z = 0$, $z = 1$ bestehenden Punktmenge A die nicht absolut-kompakte Menge der Punkte

$$z = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots.$$

In der Tat, es ist $M(m, m + 1) = m + 2$, und

$$M(m_1, m_2) = \frac{m_1 + m_2 + 3(m_1 - m_2)^2}{2}$$

eine ganze, nicht negative Zahl für ebensolche m_1, m_2.

Drittes Kapitel:

Über die Struktur der M-konvexen Mengen.

14. Das Strukturproblem. Es ist naheliegend zu versuchen, aus der topologischen Struktur der M-konvexen Mengen Rückschlüsse zu ziehen auf das erzeugende a. M. $M(z_1, \ldots, z_n)$. Man kann ruhig behaupten, daß dieses Problem in seiner ganzen Allgemeinheit zu den schwierigsten Problemen der Theorie der a. M. gehört. Dieses Hauptproblem der „Geometrie der a. M." könnte man etwa so formulieren: Vorgegeben ist im einfach zusammenhängenden Gebiet G der z-Ebene eine Mengenfunktion $\varphi(A)$, A eine beliebige in G abgeschlossene Teilmenge von G. Welches sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\varphi(A)$ identisch ist mit der Funktion A_M eines in G a. M. M? Wir sind noch weit von einer Antwort auf diese Frage entfernt. Es dürfte zweifellos richtig sein, daß durch die Funktion A_M das a. M. M eindeutig bestimmt ist; aber auch hierfür fehlt ein Beweis. Was allerdings die quasiarithmetischen Mittel anlangt, so bin ich in der Lage, für sie eine Lösung des Strukturproblems zu geben. Das wird die Hauptaufgabe dieses Kapitels sein.

15. Eine Hilfskonstruktion. Wir wollen zunächst einen allgemeinen Satz über die M-konvexen Mengen eines Kreismittels herleiten. Dabei werden wir von einer Hilfskonstruktion Gebrauch zu machen haben. Sei $M(z_1, \ldots, z_n)$ in $|z| < 1$ ein a. M., ein Kreismittel; a und b seien zwei Punkte in $|z| < 1$. Dann bilden wir die Punktmenge $\mathfrak{K}\,(a, b)$ auf folgende Weise:

$\mathfrak{K}\,(a, b)$ ist der abgeschlossene Limes der Mengenfolge

$$\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2,\ \mathfrak{K}_3,\ \ldots;$$

$\mathfrak{K}_\mu$ besteht aus endlich vielen Punkten. Um das Gesetz übersichtlich zu formulieren, werde ich die Punkte von $\mathfrak{K}_\mu$ in einer bestimmten Reihenfolge anführen:

$$\mathfrak{K}_\mu = \sum_{\lambda=0}^{n^\mu} \left\{ a\left(\frac{\lambda}{n^\mu}\right)\right\}. \tag{15,1}$$

Sind u, v irgend zwei Punkte aus $|z| < 1$, dann bezeichne ich mit $\mathfrak{R}\,(u, v)$ die Punktreihe

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \{M\,(u, \ldots, u, \underbrace{v, \ldots, v}_{\nu-\text{mal}})\}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{K}_0 = \{a\} + \{b\},$$

$$\mathfrak{K}_1 = \{a\} + \mathfrak{R}\,(a, b) + \{b\} = \sum_{\lambda=0}^{n} \{a\,(\tfrac{\lambda}{n})\},$$

$\mathfrak{K}_{\mu+1}$ entsteht aus $\mathfrak{K}_\mu$ durch Erweiterung, indem man zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten u, v der Reihe von $\mathfrak{K}_\mu$ die Reihe $\mathfrak{R}\,(u, v)$ einschiebt; dabei ist dann, wie man sich leicht überzeugt:

$$a\left(\frac{\lambda}{n^\mu}\right) = a\left(\frac{\lambda\, n^k}{n^{\mu+k}}\right),$$

womit die Bezeichnungsweise gerechtfertigt erscheint. Weiter ist

$$\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \ldots$$

und

$$\lim_{\mu \to \infty} \mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{K}\,(a, b).$$

Die Punktmenge $\mathfrak{K}_\mu$ und auch $\mathfrak{K}\,(a, b)$ liegen nach den Bemerkungen am Ende von **12** auf der Kreiszweiecksfläche $K\,(a, b)$, dessen Rand gebildet wird von den beiden Kreisen, die durch a und b gehen und den Kreis $|z| = 1$ berühren.

Nun behaupte ich, daß $\mathfrak{K}\,(a, b)$ ein Kontinuum ist. Zunächst weisen wir nach, daß der Maximalabstand

$$d_\mu = \operatorname*{Max}_{\lambda = 1, \ldots, n^\mu} \left| a\left(\frac{\lambda}{n^\mu}\right) - a\left(\frac{\lambda - 1}{n^\mu}\right) \right|$$

zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten von $\mathfrak{K}_\mu$ für $\mu \to \infty$ gegen Null konvergiert. Zu diesem Zweck betrachten wir den Ausdruck

$$(15{,}2) \quad \sigma = \operatorname*{unt.\,Gr.}_{u \neq v \subset K\,(a,b)} \left(\operatorname*{Max}_{\nu = 1, \ldots, n-1} \left| \frac{M\,(u, \ldots, u, \overbrace{v, \ldots, v}^{\nu-mal}) - u}{v - u} \right| \right).$$

Angenommen, $\sigma = 0$. Dann gibt es drei Folgen

$$(15{,}3) \qquad \{u_\lambda\},\ \{v_\lambda\},\ \{\nu_\lambda\}\ (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

mit $u_\lambda \neq v_\lambda$, sodaß

$$(15{,}4) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{M\,(u_\lambda, \ldots, u_\lambda, \overbrace{v_\lambda, \ldots, v_\lambda}^{\nu_\lambda}) - u_\lambda}{v_\lambda - u_\lambda} = 0.$$

Da die u_λ und v_λ in $K\,(a, b)$ liegen und die ν_λ ganze Zahlen sind, so kann man eine Indizesfolge ausfindig machen, für welche die zugehörigen Teilfolgen der Folgen (15,3) konvergieren. Der Einfachheit nehmen wir gleich an, daß es bereits die Folgen (15,3) selbst tun. Insbesondere können wir $\nu_\lambda = \nu_1 \geqq 1$ setzen. Nun behaupte ich, daß

$$v^* = \lim v_\lambda \neq \lim u_\lambda = u^*$$

ist. Wäre nämlich $v^* = u^*$, so würde dies nach (15,4) heißen:

$$\left[\frac{\partial}{\partial v} M(u, \ldots, u, \underbrace{v, \ldots, v}_{\nu_1})\right]_{u = v = u^*} = 0. \tag{15,5}$$

Andererseits folgt aus der Taylorschen Entwicklung (6,2) mit (7,6), daß

$$\left[\frac{\partial}{\partial v} M(u, \ldots, u, \underbrace{v, \ldots, v}_{\nu_1})\right]_{u = v = u^*} = \frac{\nu_1}{n} \geqq \frac{1}{n}$$

ist, was mit (15, 5) in Widerspruch steht. Daher ist $v^* \neq u^*$, also nach (15, 4)

$$M(u^*, \ldots, u^*, \underbrace{v^*, \ldots, v^*}_{\nu_1}) = u^*.$$

Das ist aber auch unmöglich; denn man kann durch $z = u^*$ einen Kreis C legen, der $z = v^*$ im Innern enthält und ganz im Innern von $|z| < 1$ liegt. Variieren $v_1, \ldots, v_{\nu_1}$ auf der zu C gehörigen Kreisscheibe, dann müssen die Werte der Funktion $M(u^*, \ldots, u^*, v_1, \ldots, v_{\nu_1})$ eine ganze Umgebung von u^* überdecken.[9] Das steht aber damit in Widerspruch, daß nach Satz 4 die abgeschlossene Kreisscheibe von C eine M-konvexe Menge ist. Damit ist die Annahme, $\sigma = 0$, widerlegt; es ist $\sigma > 0$. Wegen (6,3) ist aber $\sigma \leqq \frac{1}{n} < 1$.

Nun ergibt sich für $d_{\mu+1}$ sofort eine Abschätzung durch d_μ. Ist nämlich mit

$$a'' = a\left(\frac{\lambda_1 - 1}{n^{\mu+1}}\right),\quad b'' = a\left(\frac{\lambda_1}{n^{\mu+1}}\right)$$
$$d_{\mu+1} = |a'' - b''|,$$

so gehört wenigstens einer der Punkte a'', b'' einer Punktreihe $\mathfrak{R}(a', b')$ an, wobei $a' = a\left(\frac{\lambda_0 - 1}{n^\mu}\right)$, $b' = a\left(\frac{\lambda_0}{n^\mu}\right)$ gesetzt ist. Da die Punkte a'', b'' dem Kreiszweieck $K(a', b')$, dessen Öffnungs-

[9] $M(u^*, \ldots, u^*, v_1, \ldots, v_{\nu_1})$ kann nämlich nicht identisch konstant gleich u^* sein.

winkel nicht größer ist als der von $K(a, b)$ [die Punkte a', b' liegen ja auch in $K(a, b)$] angehören, so ist nach Definition von σ und $\mathfrak{R}(u, v)$

$$d_{\mu+1} = | a'' - b'' | \leqq \omega \, | a' - b' | \leqq \omega \, d_{\mu}. \tag{15,6}$$

Die Größe ω ergibt sich dabei auf folgende Weise (s. Figur 2): Man zeichnet zu $K(a, b)$ ein ähnliches Kreiszweieck K' mit den Ecken $z = 0$ und $z = 1$. Um den Punkt 0 schlägt man einen

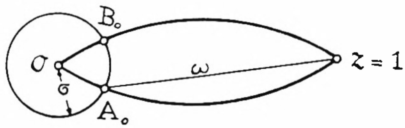

Fig. 2.

Kreis mit dem Radius σ; dieser Kreis scheidet den Rand von K' in den Punkten A_0 und B_0; dann ist der Abstand des Punktes A_0 vom Punkt $z = 1$ gleich ω. Offenbar ist

$$\omega < 1.$$

Aus (15,6) folgt $d_{\mu} \leqq \omega^{\mu} d_0$ und hieraus

$$\lim_{\mu \to \infty} d_{\mu} = 0. \tag{15,7}$$

Die abgeschlossene und beschränkte Punktmenge $\mathfrak{K}(a, b)$ enthält also die d_{μ}-Kette[10] $\mathfrak{K}_{\mu}$; wegen (15,7) ist daher[10] $\mathfrak{K}(a, b)$ zusammenhängend, also ein Kontinuum, w. z. b. w.

16. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{K}(a, b)$ bei festem a stetig mit b variiert, d. h., daß für $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} b_{\varkappa} = b$

$$\lim_{b_{\varkappa} \to b} \mathfrak{K}(a, b_{\varkappa}) = \mathfrak{K}(a, b).$$

In der Tat, sei 1. z ein Punkt von $\mathfrak{K}(a, b)$. Dann ist zu zeigen, daß in jede beliebige Umgebung von z fast alle $\mathfrak{K}(a, b_{\varkappa})$

[10] F. Hausdorff, Mengenlehre (1927), S. 158, 159, Satz XIV.

Punkte schicken. Nach Definition gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein μ_0, so daß der Punkt $a(\rho_0)$ von $\mathfrak{K}_{\mu_0}$, $\rho_0 = \dfrac{\lambda_0}{n^{\mu_0}}$ gesetzt, um weniger als $\dfrac{\varepsilon}{2}$ von z entfernt ist: $a(\rho_0) = \Phi_{\varrho_0}(b)$. Die Funktion $\Phi_{\varrho_0}(b)$ ist als eine Funktion, welche durch μ_0-malige Ineinanderschachtelung von M entsteht, stetig, d. h. $|\Phi_{\varrho_0}(b') - \Phi_{\varrho_0}(b)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $|b' - b| < \eta$. Sobald $\varkappa > \varkappa_0$ ist, gilt aber $|b_\varkappa - b| < \eta$, und dann ist

$$|z - \Phi_{\varrho_0}(b_\varkappa)| < \varepsilon;$$

dabei ist $\Phi_{\varrho_0}(b_\varkappa)$ ein Punkt von $\mathfrak{K}(a, b_\varkappa)$, w. z. z. w.

Sei jetzt 2. z ein Punkt von $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \mathfrak{K}(a, b_\varkappa)$; wir haben zu zeigen, daß dann z auch Punkt von $\mathfrak{K}(a, b)$ ist. Es gibt eine Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$, $\big(z_\varkappa$ ist Punkt von $\mathfrak{K}(a, b_\varkappa)\big)$ mit $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} z_\varkappa = z$. Man kann $z_\varkappa$ ersetzen durch einen Punkt $\xi_\varkappa$ der Kette $\mathfrak{K}^{(\varkappa)}_{\mu_\varkappa}$, die zu $\mathfrak{K}(a, b_\varkappa)$ gehört, und dabei immer annehmen, daß

$$|z_\varkappa - \xi_\varkappa| < \frac{1}{\varkappa} \text{ und } \mu_{\varkappa+1} \geqq \mu_\varkappa$$

ist. Dann gilt $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \xi_\varkappa = z$. In der Kette $\mathfrak{K}^{(\varkappa)}_{\mu_\varkappa}$ habe $\xi_\varkappa$ die Nummer $\lambda_\varkappa$, d. h. $\xi_\varkappa = a_\varkappa(\rho_\varkappa)$ mit $\rho_\varkappa = \dfrac{\lambda_\varkappa}{n^{\mu_\varkappa}}$. Dann ist $0 \leqq \rho_\varkappa \leqq 1$.

Man kann eine Teilfolge ausgreifen, für welche die Folge der zugehörigen ρ konvergiert. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß bereits die Folge

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$$

konvergiert und $\lim \rho_\varkappa = \sigma$ ist. Nun lassen sich zwei nicht negative Zahlen $\sigma_1 = \dfrac{k}{n^m}$, $\sigma_2 = \dfrac{k+1}{n^m} \leqq 1$ derart bestimmen, daß

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \text{ ist.}$$ [11]

[11] Wenn $\sigma = 0$ ist, dann ist $\sigma_1 = 0$ und statt der obigen Umgleichung $0 \leqq \sigma < \sigma_2$ zu setzen. Entsprechendes gilt für $\sigma = 1$.

Für die Punkte

$$a_\varkappa(\sigma_1) = \Phi_{\sigma_1}(b_\varkappa),$$
$$a_\varkappa(\sigma_2) = \Phi_{\sigma_2}(b_\varkappa)$$

von $\mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)}$, $\mu \geqq m$, ist dann

$$\lim_{\varkappa \to \infty} a_\varkappa(\sigma_1) = \Phi_{\sigma_1}(b),$$
$$\lim_{\varkappa \to \infty} a_\varkappa(\sigma_2) = \Phi_{\sigma_2}(b);$$

außerdem ist der Punkt $\xi_\varkappa = a_\varkappa(\rho_\varkappa) = \Phi_{\varrho_\varkappa}(b_\varkappa)$ in der Punktmenge $K(a_\varkappa(\sigma_1), a_\varkappa(\sigma_2))$ enthalten, sobald $\rho_\varkappa$ zwischen σ_1 und σ_2 liegt. Nun ist wegen der Stetigkeit der Punktmenge $K(a, b)$ in a und b:

$$\lim_{\varkappa \to \infty} K(a_\varkappa(\sigma_1), a_\varkappa(\sigma_2)) = K(\Phi_{\sigma_1}(b), \Phi_{\sigma_2}(b)).$$

Der Punkt z liegt also in $K(\Phi_{\sigma_1}(b), \Phi_{\sigma_2}(b))$. Da der Durchmesser dieser Punktmenge nicht größer ist als d_m, so folgt

$$|z - \Phi_{\sigma_1}(b)| \leqq d_m \leqq \omega_1^m |a - b|,\text{[12]}$$

d. h. der Abstand des Punktes z von der beschränkten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{K}(a, b)$ ist kleiner als $\omega_1^m |a-b|$. Für $m \to \infty$ folgt hieraus, daß z den Abstand o davon hat, d. h. Punkt von $\mathfrak{K}(a, b)$ ist. Damit ist die Stetigkeit von $\mathfrak{K}(a, b)$ vollständig nachgewiesen.

17. Ein Hilfssatz aus der Topologie. Wir brauchen den

Satz. Sei Y eine Jordankurve in der Ebene, und A ein Punkt derselben. Weiter sei $K(P)$ ein stetig mit P variierendes beschränktes Kontinuum, das die Punkte A und P verbindet; der Durchmesser von $K(P)$ gehe mit dem Abstand AP gegen Null. Beschreibt dann P die Jordankurve Y, so wird von $K(P)$ das Innere von Y ganz überstrichen.

Beweis. Die Stetigkeit der Punktmenge $K(P)$ in P besagt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ von der Art, daß für jeden

[12] Ist m genügend groß, so unterscheidet sich ω_1 um beliebig wenig von dem in **15** betrachteten ω.

Punkt P' mit $P'P < \delta$ zu jedem Punkt Q von $K(P)$ ein Punkt Q' von $K(P')$ existiert mit $Q'Q < \varepsilon$, und außerdem jeder Punkt Q_1 von $K(P')$ von der Menge $K(P)$ einen Abstand kleiner als ε hat. Auf Y führen wir den positiven Umlaufsinn ein; $P \neq A$ ein Punkt von Y, dann bezeichne Y_{PA} den Teilbogen von Y, den man erhält, wenn man Y von P aus nach A hin positiv durchläuft.

Nun betrachten wir die Punktmenge

$$C(P) = K(P) + Y_{PA};$$

sie ist offenbar in P stetig. Sei nun B ein Punkt im Innern von Y. Läuft der Punkt P von A aus in positiver Richtung auf Y weiter, so umschließt zu Beginn für genügend nahe an A gelegene Punkte P die Punktmenge $C(P)$ den Punkt B; am Ende, wenn P nach A zurückkehrt, wird für genügend nahe bei A gelegene Punkte P der Punkt B von $C(P)$ nicht mehr umschlossen, d. h. vom Unendlichen getrennt. Durchläuft daher P von A aus in positiver Richtung die ganze Kurve Y, dann gibt es einen ersten Punkt P_1 derart, daß (1) für jeden Punkt P im Innern des Bogens Y_{AP_1} die Menge $C(P)$ den Punkt B umschließt und außerdem entweder (2a) B Punkt von $C(P_1)$ ist, oder (2b) $C(P_1)$ der Punkt B nicht enthält und nicht umschließt. Angenommen, (2b) würde stattfinden, dann gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von $C(P_1)$ und der Stetigkeit von $C(P)$ in P_1 eine ganze Umgebung von P_1 auf Y, so daß für jeden Punkt P dieser Umgebung das Kontinuum $C(P)$ den Punkt B nicht enthält und nicht umschließt im Widerspruch mit (1). Es gilt also (2a), womit der Satz bewiesen ist.

18. Der einfache Zusammenhang. Jetzt können wir sehr rasch den folgenden wichtigen Satz über die M-konvexen Hüllen beweisen:

Satz 6. Es sei $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein analytisches Mittel im Gebiet G der z-Ebene mit wenigstens einem Randpunkt im Endlichen. Für jede abgeschlossene Teilmenge A von G ist dann die M-konvexe Hülle A_M einfach und im Kleinen zusammenhängend.

Beweis. Es genügt, den Satz für ein Kreismittel zu beweisen. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von $|z| < 1$, und M ein in $|z| < 1$ a. M. Sind a und b irgend zwei Punkte von A_M, dann ist offenbar

$$\mathfrak{K}(a, b) \subset A_M,$$

d. h. die Punkte a und b sind durch das Kontinuum $\mathfrak{K}(a, b)$ innerhalb A_M verbunden: A_M ist zusammenhängend. Da $\mathfrak{K}(a, b)$ aber in dem Kreis enthalten ist, der die Verbindungsstrecke der Punkte a, b zum Durchmesser hat, so ist A_M im Kleinen zusammenhängend.

Kann man eine Jordankurve Y angeben, welche ganz in A_M enthalten ist, und sind a und b zwei Punkte von Y, so ist $\mathfrak{K}(a, b)$ Teilmenge von A_M. Hält man a fest und läßt b die Kurve Y durchlaufen, dann überstreicht $\mathfrak{K}(a, b)$ nach dem Hilfssatz von **17** das Innere von Y; dieses gehört also dann auch zu A_M: die Menge A_M ist einfach zusammenhängend. Der Satz 6 ist bewiesen.

Die Behauptung von Satz 6 trifft für ganze Mittel nicht zu; das erkennt man sofort am Beispiel in **13.**

19. Die quasiarithmetischen Mittel.

Wir gehen jetzt daran, die quasiarithmetischen Mittel, d. h. die vermöge einer konformen Abbildung aus dem arithmetischen Mittel entstehenden a. M. zu charakterisieren durch die Struktur der von ihnen erzeugten Konvexitäten. Wir werden dabei als einfachste Bausteine der M-Konvexität eines a. M. M die Punktmengen $\{z_1, z_2\}_M$ verwenden, d. s. die M-konvexen Hüllen der Punktepaare z_1, z_2. Für das arithmetische Mittel ergibt sich sofort, daß die Punktmengen $\{z_1, z_2\}_M$ einfach die Verbindungsstrecke der Punkte z_1, z_2 ist; demgemäß ist die Punktmenge $\{z_1, z_2\}_M$ für ein quasiarithmetisches Mittel das konforme Bild einer Strecke; $\{z_1, z_2\}_M$ ist also ein analytischer Kurvenbogen. Wir wollen diese Aussage abschwächen und sagen, daß die Punktmenge $\{z_1, z_2\}_M$ für ein quasiarithmetisches Mittel M jedenfalls höchstens eindimensional ist, d. h. als ebene Punktmenge keine inneren Punkte besitzt. Diesen einfachen topologischen Sachverhalt für die quasiarithmetischen Mittel als charakteristisch nachzuweisen, ist das Ziel der folgenden Untersuchungen. Wir beweisen also den

Satz 7. Das analytische Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ ist dann und nur dann quasiarithmetisch, wenn die Punktmengen $\{z_1, z_2\}_M$ höchstens eindimensional sind.

Daß die Bedingung des Satzes 7 notwendig ist, haben wir oben schon dargetan.

20. Es ist zu zeigen, daß die Bedingung von Satz 7 hinreicht. Sei $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein im Gebiet G a. M., für welches jede der Punktmengen $\{z_1, z_2\}_M$ höchstens eindimensional ist. Wir dürfen annehmen, daß der Punkt $z = 0$ im Innern von G liegt. Dann betrachten wir die Funktion

$$z' = f(z) = M(0, \ldots, 0, z) = \frac{z}{n} + \ldots \tag{20,1}$$

in einer gewissen Umgebung von $z = 0$. Es gibt eine Schrödersche Transformation[13]

$$z = S(t), \quad z' = S(t'), \tag{20,2}$$

$s = S(t) = t + \sigma_2 t^2 + \ldots$, mit der in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ vorhandenen eindeutigen Umkehrung $t = T(s) = s + \tau_2 s^2 + \ldots$ von der Art, daß aus (20,1)

$$t' = T(z') = T\big(f(S(t))\big) = \frac{t}{n} \tag{20,3}$$

wird; eine solche Transformation läßt sich wegen $0 < \frac{1}{n} < 1$ immer bestimmen. Nun transformieren wir $M(z_1, \ldots, z_n)$ mittels der Abbildung (20, 2) und erhalten

$$N(t_1, \ldots, t_n) = T\big(M(S(t_1), \ldots, S(t_n))\big). \tag{20,4}$$

In einer gewissen Umgebung von $t = 0$ ist $N(t_1, \ldots, t_n)$ eine symmetrische, reguläre analytische Funktion mit $N(t, \ldots, t) = t$;

---

[13] Siehe H. Cremer, Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem, Ber. math. phys. Kl. Sächs. Ak. 84 (1932), S. 291, wo auch ältere Literatur genannt ist.

daher stellt nach dem Beweis von Satz 3[14] die Funktion N in einem gewissen Kreis

$$(20,5) \qquad |t| < \rho$$

ein a. M. dar. Das Mittel N hat hinsichtlich der Struktur seiner Konvexität ebenfalls die Eigenschaft, daß die Punktmengen $\{t_1, t_2\}_N$ höchstens eindimensional sind. Nach (20,3), (20,4) ist weiter

$$(20,6) \qquad N(0, \ldots, 0, t) = \frac{t}{n}.$$

Wir betrachten nun einen Punkt $t_1 \neq 0$ von (20, 5) und dazu die Punktmenge

$$A = \{0, t_1\}_N.$$

Ich behaupte, daß diese Punktmenge ganz auf der Verbindungsstrecke $\mathfrak{S}$ der Punkte 0 und t_1 liegen muß; da sie 0 und t_1 verbindet (Satz 6), so muß sie dann mit $\mathfrak{S}$ identisch sein. Zunächst folgt aus Satz 4, daß A im Innern oder auf dem Kreis liegt, für den $\mathfrak{S}$ Durchmesser ist. Angenommen, t_2 wäre ein Punkt von A, der nicht auf $\mathfrak{S}$ liegt. Wegen (20, 6) sind dann die Punkte

$$\frac{t_1}{n}, \ \frac{t_2}{n},$$

allgemeiner

$$a_m = \frac{t_1}{n^m}, \ b_m = \frac{t_2}{n^m} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

ebenfalls Punkte von A. Da die Dreiecke Δ_m mit den Ecken 0, a_m, b_m untereinander ähnlich sind, so kann man m so groß wählen, daß die Punktmengen

$$(20, 7) \qquad K(0, a_m), \ K(0, b_m), \ K(a_m, b_m)$$

---

[14] Wir haben nämlich in **11** viel mehr bewiesen, als in Satz 3 ausgesagt wird. Es gilt der

S a t z 3a. Ist die symmetrische Funktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $z_1 = \ldots = z_n = 0$ regulär analytisch und gilt darin $M(z, \ldots, z) = z$, dann gibt es einen Kreis $|z| < \rho$, in dem $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein a. M. darstellt.

paarweise nur einen einzigen Punkt, nämlich die gemeinsame Ecke gemein haben (s. Figur 3). Nachdem wir m so groß gewählt haben, sehen wir uns die N-konvexe Hülle $B = \{0, a_m, b_m\}_N$ der aus den drei Punkten 0, a_m, b_m bestehenden Punktmenge an; sie enthält die Mengen

$$\{0, a_m\}_N, \quad \{0, b_m\}_N, \quad \{a_m, b_m\}_N, \tag{20,8}$$

welche in den entsprechenden Mengen von (20, 7) enthalten sind und die Punkte 0, a_m, b_m paarweise verbinden. Die Vereinigungs-

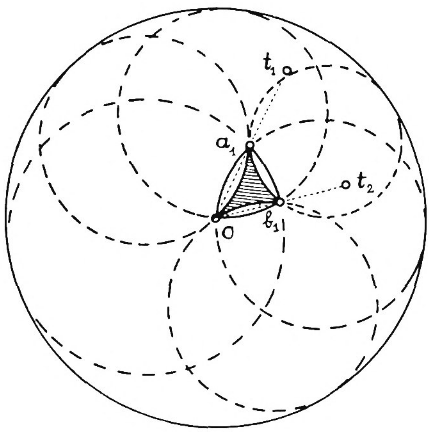

Fig. 3.

menge der Mengen (20,8) umschließt daher das von den Mengen (20,7) umschlossene Kreisdreieck (in Figur 3 schraffiert). Nach Satz 6 ist aber B einfach zusammenhängend, enthält also dieses Kreisdreieck als Teilmenge, und ist somit eine zweidimensionale Punktmenge. Das steht aber damit in Widerspruch, daß B ja Teilmenge der nach Voraussetzung höchstens eindimensionalen Punktmenge A ist. Obige Annahme ist also falsch; A ist identisch mit der Verbindungsstrecke $\mathfrak{S}$ der Punkte 0 und t_1.

21. Nach dem Vorausgehenden gilt für $0 \leqq \rho_\nu < \rho$

$$N(\rho_1 e^{i\vartheta}, \ldots, \rho_n e^{i\vartheta}) = L(\rho_1, \ldots, \rho_n, \vartheta)\, e^{i\vartheta},$$

wobei L eine analytische Funktion ist, welche für reelle ϑ zwischen 0 und ρ liegt:

$$L(\rho_1, \ldots, \rho_n, \vartheta) = \frac{N(\rho_1 e^{i\vartheta}, \ldots, \rho_n e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta}}.$$

Angenommen, L hängt von ϑ ab; dann kann man $\vartheta = \vartheta_0 + i\tau$ (ϑ_0, τ reell) derart wählen, daß $L(\rho_1, \ldots, \rho_n, \vartheta)$ imaginär wird. Mit $e^{-\tau} = \eta$, $\eta\rho_\nu < \rho$, ergibt sich

$$L(\rho_1, \ldots, \rho_n, \vartheta) = \frac{N(\rho_1 \eta e^{i\vartheta_0}, \ldots, \rho_n \eta e^{i\vartheta_0})}{\eta e^{i\vartheta_0}} = \frac{L(\rho_1\eta, \ldots, \rho_n\eta, \vartheta_0)}{\eta},$$

was aber in Widerspruch mit der obigen Feststellung reell ist. Also ist L von ϑ unabhängig:

$$(21,1) \qquad \frac{N(\rho_1 e^{i\vartheta}, \ldots, \rho_n e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta}} = N(\rho_1, \ldots, \rho_n).$$

Da dies für jedes reelle ϑ und für alle ρ_ν mit $0 \leqq \rho_\nu < \rho$ gilt, so besteht (21,1) auch für komplexe Werte von ϑ und ρ_ν, sofern nur $|\rho_\nu e^{i\vartheta}|$ und $|\rho_\nu|$ kleiner als ρ sind. Es gilt somit

$$N(tt_1, \ldots, tt_n) = t\, N(t_1, \ldots, t_n).$$

Die einzigen im Punkt $(0, \ldots, 0)$ analytischen Funktionen, welche diese Funktionalgleichung erfüllen, sind die homogenen linearen ganzen Funktionen. Daher ist

$$N(t_1, \ldots, t_n) = \frac{t_1 + \ldots + t_n}{n},$$

und nach (20,4)

$$(21,2) \qquad M(z_1, \ldots, z_n) = S\left(\frac{T(z_1) + \ldots + T(z_n)}{n}\right).$$

Zunächst wissen wir nur, daß (21,2) in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ gilt, aber noch nicht, ob die Abbildung $t = T(z)$ im ganzen Gebiet G analytisch und eindeutig umkehrbar ist. Um darüber Klarheit zu bekommen, betrachten wir die Menge G^* aller jener Punkte von G, nach welchen $T(z)$ von $z = 0$ aus analytisch fortsetzbar ist. G^* ist offenbar ein Gebiet, enthält eine ganze Umgebung von $z = 0$, und braucht nicht schlicht über G ausgebreitet zu sein. Angenommen, G^* ist nicht M-konvex. Dann gibt es Punkte $z_1', \ldots, z_n'$ aus G^*, sodaß $z_0' = M(z_1', \ldots, z_n')$ zwar in G aber außerhalb G^* liegt. Man setzt $z_\nu' = \varphi_\nu(1)$, $\nu = 1, \ldots, n$, und $z_\nu = \varphi_\nu(u)$ mit $0 \leqq u \leqq 1$ und $\varphi_\nu(0) = 0$, wählt weiter die Funktionen $\varphi_\nu(u)$ so, daß sich, wenn u von 1 nach 0 wandert, die z_ν stetig innerhalb G^* auf $z = 0$ zusammenziehen. Schließlich werde $M\bigl(z_1(u), \ldots, z_n(u)\bigr) = \Phi(u)$ gesetzt. Wegen $\Phi(0) = 0$ gibt es ein u^* mit $0 < u^* \leqq 1$, sodaß $z^* = \Phi(u^*)$ Randpunkt von G^* und für jedes u mit $0 \leqq u < u^*$ der Punkt $\Phi(u)$ innerer Punkt von G^* ist. Wandert nun u von 0 nach u^*, dann besteht zunächst, solange $z_\nu(u)$ und $\Phi(u)$ in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ liegen, die Funktionalgleichung

$$(21, 3) \qquad n\,T\bigl(M(z_1, \ldots, z_n)\bigr) = T(z_1) + \ldots + T(z_n).$$

Diese gilt auch bei weiterer Fortsetzung innerhalb G^*. Da die Punkte $z_\nu^* = z_\nu(u^*)$ im Innern von G^* liegen, steht nämlich auf der rechten Seite von (21,3) eine bis in die Stelle $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ hinein fortsetzbare Funktion. Das gilt dann auch für die linke Seite. Da aber M eindeutig regulär ist, so muß $T(z)$ in den Punkt z^* hinein fortsetzbar sein, d. h. z^* gehört zu G^*, im Widerspruch mit der obigen Erklärung von z^*. Die obige Annahme ist falsch; G^* ist ein M-konvexes Gebiet, deshalb einfach zusammenhängend und schlicht. Nach dem Monodromiesatz ist dann $T(z)$ in G^* eindeutig. Ich zeige noch, daß $G^* = G$ ist, indem ich die Annahme, es gibt im Innern von G einen Randpunkt z^* von G^*, auf einen Widerspruch führe: Ich betrachte den Punkt

$$z' = M(z^*, 0, \ldots, 0).$$

Drei Fälle sind denkbar:

1. z' liegt im Innern von G^*; aus (21,3) folgt dann sofort, daß $T(z)$ in z^* hinein fortsetzbar ist (Widerspruch!);

2. z' liegt auf dem Rand von G^*. Die Funktion $M(z^*, \xi, \ldots, \xi) = h(\xi)$ ist nicht identisch konstant; variiert ξ in einer Umgebung von $\xi = 0$, dann füllen die Punkte $h(\xi)$ eine ganze Umgebung von z^* aus. Es gibt also ein ξ^* im Innern von G^*, sodaß

auch $M(z^*, \xi^*, \ldots, \xi^*)$ im Innern von G^* ist; man schließt wie im Fall 1 weiter (Widerspruch!);

3. z' liegt im Äußern von G^*, dann gibt es einen Punkt ξ' nahe an z^* im Innern von G^*, sodaß $M(\xi', 0, \ldots, 0)$ im Äußern von G^* liegt, während doch G^* eine M-konvexe Menge ist (Widerspruch!).

$T(z)$ ist eindeutig in $G^* = G$. Aus (21,2) folgt dann wegen der Eindeutigkeit von M auch die der Funktion $S(t)$. Damit ist der Satz 7 restlos bewiesen.

22. Schlußbemerkung. Als merkwürdige Tatsache folgt aus Satz 7, daß für jedes nicht-quasiarithmetische Mittel M sich unter den M-konvexen Hüllen $\{z_1, z_2\}_M$ stets zweidimensionale Punktmengen befinden. Diese ausgeprägte Sonderstellung der nicht-quasiarithmetischen Mittel findet sich wieder bei einem ganz anderen Problem über a. M., beim Problem der Obermittel.[15] Während sich das Obermittel des quasiarithmetischen Mittels

$$M = g\left(\frac{h(w_1) + \ldots + h(w_n)}{n}\right)$$

in der einfachen Gestalt

$$M' = g\left(\frac{h(w_1) + \ldots + h(w_{n+1})}{n+1}\right)$$

darstellen läßt, steht das Obermittel M' eines nicht-quasiarithmetischen Mittels M zum Mittel M in einem wesentlich transzendenten Verhältnis. Den engen Zusammenhang der Konvextheorie der a. M. mit der Theorie der Obermittel klar zu legen, wird unsere nächste Aufgabe sein.

München, den 15. Januar 1934.

---

[15] Vgl. meine Arbeit „Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente, I" Math. Ann. 109 (1933), S. 243.