

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

Band XXIV. Jahrgang 1894.

**München.**

Verlag der K. Akademie.

1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

## Zur Integration der Diffusionsgleichung bei variablen Diffusionscoefficienten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Herr O. Wiener gab<sup>1)</sup> eine interessante Methode an, den Vorgang der Diffusion zweier Flüssigkeiten in allen Schichten gleichzeitig zu beobachten. Dabei zeigte sich bedeutende Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten. Herr Wiener zeigt, wie man diesem Umstande bei Berechnung der Versuche durch ein Näherungsverfahren Rechnung tragen kann. Ich habe nun schon vor langer Zeit ein Integrale der Diffusionsgleichung für variablen Diffusionscoefficienten gefunden, welches Hausmaninger<sup>2)</sup> allerdings mit geringem Erfolge zur Berechnung der Versuche Waitz's verwendete. Da dasselbe vielleicht zur Berechnung der Wiener'schen Versuche nützlich sein könnte, so erlaube ich mir hier nochmals darauf zurückzukommen.

Zählen wir, wie Hr. Wiener die  $+x$  von der ursprünglichen Grenze der übereinandergeschichteten Flüssigkeiten aus vertikal nach abwärts, bezeichnen mit  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n$  die Brechungsindices in der obern resp. untern reinen und an irgend einer Stelle der gemischten Flüssigkeit, mit  $t$  die

1) Wied. Ann. 49 p. 105, 1893.

2) Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 86, p. 1073, 1882.

seit Beginn der Diffusion verfllossene Zeit und nehmen an, dass  $n$  die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad 1)$$

erfüllt, wo  $k$  eine gegebene Funktion von  $n$  ist, sowie, dass die Diffusion weder Boden noch Niveau der obern Flüssigkeit in merklicher Weise erreicht hat, so folgt allgemein

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1) \int_x^\infty \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{2k}}}{\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{2k}}} \quad 2)$$

Man sieht, dass  $n$  und daher auch  $k$  nur Funktion von  $x:\sqrt{t}$  ist. Unter den Integralzeichen ist immer der Werth des  $k$  für  $x:\sqrt{t} = \lambda$  zu verstehen. Ich will mich hier nicht weiter darauf einlassen, wie diese Formel abgeleitet werden kann; dass sie alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, sieht man ohne weiteres. Die Gleichung 2) würde auch richtig sein, wenn  $k$  direkt als Funktion von  $x:\sqrt{t}$  gegeben wäre; man könnte dann  $n$  unmittelbar daraus berechnen. Da aber hier  $k$  nicht direkt als Funktion von  $x:\sqrt{t}$  gegeben ist, sondern eine zu findende Funktion von  $n$  ist, so kann diese Formel zur Berechnung der Versuche nicht verwendet werden. Man muss vielmehr  $k$  aus derselben berechnen. Man findet zunächst, wenn man wieder  $\lambda = x:\sqrt{t}$  setzt

$$-\frac{1}{2} \lambda \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( k \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad 3)$$

und hieraus bei constantem  $t$

$$k = \frac{1}{2t} \frac{dn}{dx} \int_x^\infty \frac{dn}{dx} \cdot x \cdot dx \quad 4)$$

Hr. Wiener findet nun durch das Experiment direkt Curven, deren (von einer schrägen Geraden an gezählte) Ordinaten  $z$  den Werthen von  $\frac{dn}{dx}$  multiplicirt mit der Constanten  $a\delta$  gleich sind, während die Abscissen  $y = y_0 + x/\eta$  sind. (Siehe dessen Fig. 13 pag. 123.) Dabei ist  $\eta$  eine experimentell gegebene Constante,  $y_0$  aber der Werth des  $y$  für die Stelle, wo die schräge Gerade die ursprüngliche Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten schneidet. Daraus folgt:

$$k = \frac{\eta^2}{2t\alpha} \int_y^\infty z(y - y_0) dy \quad 5)$$

Wir berechnen nun zu irgend einem  $x$  das dazu gehörige  $y$ , ziehen die diesem  $y$  entsprechende Ordinate  $z$  der Diffusionscurve, bezeichnen mit  $f$  den Flächenraum, der links von der Ordinate  $z$ , oben von der schrägen Geraden, unten von der Diffusionscurve begrenzt ist, und mit  $y_s$  die Abscisse des Schwerpunkts dieses Flächenraumes. Dann ist  $f = \int_y^\infty z dy$ ,  $y_s \cdot f = \int_y^\infty z y dy$ , daher ist

$$k = \frac{y_s^2 f (y_s - y_0)}{2t\alpha} \quad 6)$$

der Werth des Diffusionscoefficienten für das betreffende  $x$  und  $t$ . Kann der Anfang der Diffusion nicht genau festgestellt werden, so ist er natürlich als 2. Unbekannte einzuführen, die Gleichung 6) für 2 verschiedene Zeiten aufzustellen, und daraus  $k$  und der Zeitanfang zu bestimmen. Die Vermuthung Herrn Wieners, dass der Diffusionscoefficient besser aus Versuchen mit geringen Concentrationsunterschieden berechnet werden kann, dürfte vollkommen richtig sein. Dagegen kann die obige Formel dienen, um zu controliren, ob für beträchtliche Concentrationsdifferenzen die Gleichung 1) gilt, in welchem

Fälle für beliebige Zeiten für gleiche Werthe von  $n$  also von  $n_2 - f\eta$  auch für  $k$  derselbe Werth folgen müsste.

Sollte die Gleichung 1) nicht gültig sein, so könnte eine analoge von der Concentration  $u$  gelten, so dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

wäre. Wäre dann  $u = f(n)$  und setzt man  $f'(n) = h$ ,  $hx = k$ , so hätte man

$$h \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad 1 a)$$

oder

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k}{h} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial k}{\partial n} \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 \quad 1 b)$$

An Stelle der Gleichungen 2), 3), 4) und 5) würde folgen

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1) \int_x^\infty \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^\lambda \frac{\lambda h d\lambda}{2k}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^\lambda \frac{\lambda h d\lambda}{2k}}} \quad 2 a)$$

$$-\frac{h\lambda}{2} \frac{dn}{d\lambda} = k \frac{d^2 n}{d\lambda^2} + \frac{dk}{dn} \left( \frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \quad 3 a)$$

$$k = \frac{1}{2t} \frac{dn}{dx} \int_x^\infty \frac{dn}{dx} h x dx = \frac{\eta^2}{2tz} \int_y^\infty h z (y - y_0) dy \quad 4 a)$$

Wäre  $h$  als Function von  $n = n_2 - \eta f$  bekannt, so müssten also die Ordinaten der Diffusionscurve eine Correction erfahren und es müsste erst von dieser corrigirten Curve der Schwerpunkt gesucht werden.

Man könnte auch bloss voraussetzen, dass  $n$  die Gleichung 1 a) erfüllt und ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung  $h$  und  $k$  als 2 unbekannte Functionen von  $n$  betrachten.

Dann müsste man so verfahren. Für eine bestimmte Diffusionscurve ist  $t$  constant. Daher folgt aus Gleichung 3 a)

$$\frac{h x}{2 t} \frac{d n}{d x} + k \frac{d^2 n}{d x^2} + \frac{d k}{d n} \left( \frac{d n}{d x} \right)^2 = 0 \quad 7)$$

also

$$\frac{z^2}{a \delta} \cdot \frac{1}{h} \frac{d k}{d n} + \frac{1}{\eta} \frac{d z}{d y} \frac{k}{h} + \frac{\eta}{2 t} (y - y_0) z = 0 \quad 8)$$

In dieser Gleichung sind die beiden Grössen  $\frac{1}{h} \frac{d k}{d n}$  und  $\frac{k}{h}$  also die beiden Coefficienten der Gleichung 1 b) als die beiden Unbekannten (unbekannte Functionen von  $n$ ) zu betrachten. Die übrigen Grössen können wie Hr. Wiener zeigt, leicht für jede Diffusionscurve berechnet werden. Man muss also in 2 zu verschiedenen Werthen von  $t$  gehörigen Diffusionscurven solche Ordinaten ( $y$ ) suchen, für welche  $n$  (also die Flächen  $f$  bis zu diesen Ordinaten) gleiche Werthe haben. Diese beiden Stellen der beiden Diffusionscurven liefern 2 Gleichungen für die zu jenem  $n$  gehörigen Werthe von  $\frac{1}{h} \frac{d k}{d n}$  und  $\frac{k}{h}$ . Wäre auch der Zeitanfang unbekannt, so müsste noch eine 3. Gleichung aus einer 3. Diffusionscurve beigezogen werden. Man kann also so für beliebig viele  $n$  die Werthe der beiden Coefficienten der Gleichung 1 b) bestimmen. Natürlich ist dieses Verfahren auch auf den eingangs betrachteten Fall, dass die Gleichung 1) gilt, anwendbar und dürfte auch da dem früher beschriebenen vorzuziehen sein.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse natürlich wieder für den Punkt, wo  $z$  sein Maximum hat, also  $d z/d y = 0$  ist. Für diesen Punkt ist

$$\frac{1}{h} \frac{d k}{d n} = \frac{\eta (y_0 - y) a \delta}{2 z t} \quad 9)$$

Bezeichnen wir den Maximalwerth des  $z$  zu 2 verschiedenen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  mit  $z_1$  und  $z_2$  die dazu gehörigen  $y$  mit  $y_1$  und  $y_2$ , so ist also, wenn man annimmt, dass sich  $\frac{1}{h} \frac{dk}{dn}$  in der Zeit  $t_2 - t_1$  nicht erheblich verändert hat

$$\frac{1}{h} \frac{dk}{dn} = \frac{\eta a \delta}{2(t_2 - t_1)} \left[ \frac{y_0 - y_2}{z_2} - \frac{y_0 - y_1}{z_1} \right] \quad 10)$$

Man könnte nun aus Versuchen mit geringer Concentrationsdifferenz  $k$  als Function von  $n$  und daraus  $dk:dn$  berechnen. Würden diese Werthe mit den für grosse Concentrationsunterschiede nach der letzten Formel (darin  $h = 1$  gesetzt) berechneten stimmen, so wäre dies ein Beweis der Gültigkeit der Gleichung 1).

Obwohl die vorliegenden Versuche Hrn. Wieners zu einer ausführlichen theoretischen Discussion, wie er selbst bemerkt, noch zu ungenau sind, so will ich doch die Formel 9) auf das Diagramm Wieners Fig. 15 p. 135 anwenden, um überhaupt zu zeigen, wie die numerische Berechnung geschehen kann. Dasselbst ist

$$\eta = \frac{e_1 - a}{e_1} = \frac{575 \cdot 9}{676 \cdot 5} = 0 \cdot 851, \quad a = 100 \cdot 6 \text{ cm}, \quad \delta = 1 \cdot 027 \text{ cm}$$

$$t = \frac{4 \cdot 18}{24} \text{ Tage, } y_0 - y = \text{etwa } 4 \text{ mm, } z = 20 \text{ mm, daher}$$

$$\frac{1}{h} \frac{dk}{dn} = \frac{53 \text{ cm}^2}{\text{Tag}}$$

Würde die Gleichung 1) gelten, so wäre  $h = 1$ ; obiger Ausdruck wäre also gleich  $dk/dn$ . Andererseits findet Herr Wiener für  $k$  zwischen Wasser und 3%iger Salzsäure den Werth  $k_1 = 2 \cdot 8$ , zwischen Wasser und 26%iger Salzsäure aber  $k_2 = 4 \cdot 2$ , daher  $k_2 - k_1 = 1 \cdot 4 \text{ cm}^2 \cdot \text{Tag}$ . Der Unterschied der Brechungsindices zwischen Wasser und der

letzten Salzsäure ist  $\eta f : a \delta$ , wobei  $f$  die Fläche zwischen der schiefen Geraden und einer der Curven der Fig. 15 ist. Schätzt man  $f$  zu  $6 \text{ cm}^2$  (die Figur ist  $\frac{1}{2}$  linear verkleinert), so wird  $\eta f : a \delta = 0.05$ .  $k_1$  und  $k_2$  sind die Diffusionscoefficienten beim mittlern Salzsäuregehalt. Es entspricht also  $k_1$  fast reinem Wasser,  $k_2$  aber 13% Salzsäure. Daher entspricht der Aenderung  $k_2 - k_1$  des Diffusionscoefficienten etwa die Aenderung  $\Delta n = 0.025$  des Brechungsindex; es ist also

$$\frac{k_2 - k_1}{\Delta n} = 56$$

Dies stimmt gut mit dem oben für  $dk : dn$  gefundenen Werth überein, was aber auch ein Zufall sein kann. Die Ableitung weiterer für die Berechnung nützlicher Formeln wird besser geschehen, wenn neue Beobachtungen vorliegen.