Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 26. März.)

Von den Erscheinungen der Elektricitätsbewegung wurden anfangs experimentell ausschliesslich die in Leitern vor sich gehenden geprüft; Maxwell musste die für die Elektricitätsbewegung in Leitern gefundenen Gesetze (das Ohm'sche, das Neumann'sche Induktionsgesetz etc.) mit entsprechenden Modifikationen auf Nichtleiter übertragen, fast ohne sich dabei auf quantitative Experimente stützen zu können, die an letztern angestellt worden wären; nur so gelang es ihm, seine allgemeine die Leiter und Nichtleiter umfassende Theorie der Elektricitätsbewegung aufzubauen.

Um so auffallender muss es erscheinen, dass, während diese Theorie sich im Verhalten der Nichtleiter fast ausnahmslos bestätigt hat, dies für die Leiter nicht in gleichem Maasse gilt. Schon Maxwell fiel dies auf; in neuerer Zeit hat Herr Cohn[1]) diesem Gegenstande eine besondere Abhandlung gewidmet. Er bespricht daselbst besonders die

1) Wied. Ann. Bd. 45 pag. 55, 1892. Ueber Durchsichtigkeit der Metalle vgl. Rathenau, Inauguraldissertation, Berlin 1889, Drude, Wied. Ann. 39, 1890.

Lichtbewegung in Metallen und findet im Gegensatze zu Maxwell, dass sie weniger absorbirt wird als es die Theorie verlangt. Wie er jedoch selbst erwähnt, beweisen die Erscheinungen der auswählenden Absorption, dass hier die diskontinuirliche Molekularstruktur der Materie von wesentlichem Einfluss ist. Da nun die elektrischen Eigenschwingungen der Moleküle offenbar nothwendig ebenfalls Veranlassung zur Absorption geben, so wäre die Thatsache, dass letztere ohne deren Berücksichtigung zu klein herauskommt, von vorne herein zu erwarten.

In neuester Zeit haben auch E. Wiedemann, Ebert[1]) und Hertz[2]) auf die unerwartet grosse Durchlässigkeit dünner Metallschichten für Katedenstrahlen hingewiesen. Die beiden ersteren sagen bei dieser Gelegenheit: „Wir haben hier einen neuen Fall vor uns, welcher zeigt, dass die Maxwell'sche Theorie nicht ausreicht, die Erscheinungen zu erklären.“ Wahrscheinlich hat man es jedoch auch hier mit Schwingungen zu thun, deren Wellenlänge nicht mehr unendlich gross gegen die Molekulardimensionen ist und welche sich daher der Maxwell'schen Theorie von vorne herein entziehen, sodass deren Giltigkeit auf alle anderen Erscheinungen, für welche sie allein gemacht wurde, unangefochten bleibt.

Es folgt nun aus der Maxwell'schen Theorie, dass sehr rasche elektrische Schwingungen, wenn sie sich längs eines Drahtes fortpflanzen, auf dessen Oberfläche beschränkt bleiben; ferner, dass Wellen, deren Fortpflanzungsrichtung nicht wie im eben angeführten Falle parallel, sondern senkrecht zur Metalloberfläche steht (wie dies bei Lichtschwingungen der Fall ist, die senkrecht in Metall eindringen) innerhalb einer Wellenlänge bereits ganz enorm geschwächt werden. Aus dem letzteren Resultate folgt weiter, dass ächte Lichtschwingungen schon beim Durchwandern sehr dünner Metallschichten

1) Phys.-med. Soc. zu Erlangen 14. Dec. 1891.

2) Wied. Ann. 45 p. 28 1892.

ausserordentlich an Intensität verlieren. Die Wellen aber, welche Hertz auch in freier Luft erzeugt hat, und deren Wellenlänge nach Decimetern zählt, müssten nach Maxwell's Theorie durch das blosse Durchwandern eines Metallschirmes von $^1/_{10}$ Millimeter, ja selbst einem Millimeter Dicke noch kaum erheblich geschwächt werden. Nun hat aber Hertz beobachtet, dass selbst weit dünnere Metallschichten für diese Wellen undurchlässig sind; die Ursache hievon kann nach dem obigen nicht in der Absorption in deren Innerem, sondern nur in den Grenzbedingungen beim Ueberschreiten ihrer Oberfläche liegen, was in der That durch Berechnung der Metallreflexion aus Maxwell's Formeln bestätigt wird.

Obwohl die betreffenden Rechnungen für Planwellen und planparallele Metallplatten ohne alle Schwierigkeit sind, da sie ja vollkommen analog denjenigen sind, welche in der Theorie des Newton'schen Farbenglases vorkommen, so scheint mir doch bei der Wichtigkeit des Gegenstandes eine ausführliche Mittheilung desselben angezeigt umsomehr als gerade über diese Vorgänge angestellte Experimente wichtige neue Aufschlüsse namentlich über die noch nicht einmal der Grössenordnung nach bekannten Werthe der Dielektricitätsconstanten der Metalle zu versprechen scheinen. Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen, welche Metalle und Drielektrica umfassen, sind folgende:

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \qquad \text{A)}$$

(M. T. 591, A)[1])

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \qquad \text{B')}$$

1) M. T. bedeutet Maxwells treatise on electr. a. magn. second. edit. Die folgende Zahl bedeutet den Artikel, worauf die Nummer der Gleichung folgt. Vgl. auch: Boltzmann, Vorles. über Maxwell's Theorie art. 88, Barth 1891, was ich kurz als B. V. citiren will.

(M. T. 607, E), worin

$$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma \qquad \text{F)}$$

(M. T. 616, im Text unmittelbar vor Gleichung 1, B. V. art. 116)

$$4\pi f = kP, \quad 4\pi g = kQ, \quad 4\pi h = kR \qquad \text{C')}$$

(M. T. 608, F; denn die beiden dortigen Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ haben die Componenten P, Q, R und f, g, h; vergl. auch M. T. 790, 16; statt Maxwell's Buchstaben K wurde k geschrieben.)

$$p = CP, \quad q = CQ, \quad r = CR \qquad \text{D')}$$

(M. T. 609, G. Diese Gleichungen heissen bei Maxwell $\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$; p, q, r sind die Componenten von $\mathfrak{K}$; vgl. M. T. 611, I*)

$$u = p + \frac{df}{dt}, \quad v = q + \frac{dg}{dt}, \quad w = r + \frac{dh}{dt} \qquad \text{E)}$$

(M. T. 610, H*)

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \qquad \text{G)}$$

(M. T. 598, B, worin $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, da das Medium ruht.)

§ 1. Einmalige Reflexion.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass nur eine Trennungsfläche vorhanden ist, welche wir als eben voraussetzen und zur yz-Ebene wählen. Links von derselben auf der Seite der negativen Abscissen sei Luft, rechts ein Metall. Elektrische Planwellen sollen vom negativ Unendlichen gegen die Trennungsfläche anrücken. Hier werden sie theils reflectirt, theils dringen sie ins Metall ein; in letzterem existiren also nur Wellen, die in der Richtung der positiven Abscissen fortschreiten. Die Abscissenaxe ist die Fortpflanzungsrichtung, sodass alles nur Function von x und t ist. Die elektrischen Verschiebungen sollen in der Richtung der y-Axe geschehen. Wir haben also für negative x: $f = P = h = R = 0$

$$\left.\begin{aligned} g = A \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B \cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\ + C \sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D \cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) = \frac{k}{4\pi} Q. \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Hier stellen die Glieder der ersten Zeile die directe, die der zweiten die reflectirte Welle dar. An Stelle von $\sqrt{\mu k}$ sollte vorläufig eine später zu bestimmende Constante stehen. Wir schreiben jedoch schon jetzt diesen später sich ergebenden Werth (M. T. 784, 10; B. V., art. 95, Gl. 87). Aus C′ und G) folgt $H = T_1$,

$$\left.\begin{aligned} G = \frac{2\tau}{k}\Big[A \cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - B \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\ + C \cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D \sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big] + T_2, \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

wobei T_1 und T_2 kein x enthalten. Nach A folgt weiter $a = \alpha = b = \beta = 0$

$$\left.\begin{aligned} c = \mu\gamma = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\ + B \cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - C \sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - \\ - D \sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big] \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Bilden wir $\frac{dc}{dx}$ und $\frac{dg}{dt}$, so sehen wir, dass auch die Gleichungen B und E erfüllt sind, dass also für die Constante, die eigentlich statt $\sqrt{\mu k}$ hätte gesetzt werden sollen, der richtige Werth gewählt wurde.

Die Werthe unserer Grössen rechts von der yz-Ebene sollen mit dem Index 1 versehen werden. C_1 und vorläufig auch k_1 sollen dort von Null verschieden sein, so dass die allgemeinen Gleichungen A bis G gelten. Wir haben dort nur die durchgehende in der positiven x-Richtung fortschreitende, keine reflectirte Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass auch das Glied verschwindet, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält. Dann würden die für positive Abscissen geltenden Gleichungen erfüllt durch $f_1 = P_1 = h_1 = R_1 = 0$

$$q_1 = \frac{4\pi C_1}{k_1} g_1 = e^{-\xi x} E \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)^{1)} \tag{4}$$

wobei

$$\begin{aligned} \xi^2 &= -\frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k_1^2 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}} \\ \eta &= \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1}{\tau \xi}, \ \eta^2 = \frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^2 k_1^2 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

wobei der Quadratwurzel der positive Werth beizulegen ist und auch für ξ und η deren positive Werthe zu setzen sind. Aus D' und G folgt wieder $H_1 = T_3$,

$$G_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) + T_4 \tag{6}$$

und aus A folgt $a_1 = \alpha_1 = b_1 = \beta_1 = 0$

$$\begin{aligned} c_1 = \mu_1 \gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \Big[\eta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) - \\ - \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)\Big]. \end{aligned} \tag{7}$$

Durch Bildung von $\frac{d\gamma_1}{dx}$ und $\frac{dg_1}{dt}$ können wieder die Gleichungen B' und E noch verificirt werden.

Es handelt sich noch um die Grenzbedingungen für die

1) Siehe B. V. art. 96, pag. 101. Nach C' und D' können sich f, g, h von p, q respective r nur durch constante Factoren unterscheiden.

Trennungsfläche. Obwohl dieselben schon von Maxwell aufgestellt wurden, wollen wir sie doch lieber nach einer oft (von Helmholtz, Hertz etc.) verwendeten Methode aus den Gleichungen A bis G entwickeln. Wir betrachten sogleich den allgemeinsten Fall, dass rechts und links von der Trennungsfläche, welche wir zur yz-Ebene wählen, ein ganz beliebiges Medium vorhanden ist. Rechts wenden wir den Index 1 an. Substituiren wir statt der Trennungsfläche eine Schicht continuirlichen Uebergangs von der Dicke δ, so sind darin die Differenzialquotienten nach x im Allgemeinen Unendlich wie $1:\delta$, die nach y und z aber sind endlich, so dass letztere, sowie die ebenfalls überall endlichen Grössen a, b, c, $u \cdots$, mit dx multiplicirt und von Null bis δ integrirt, Verschwindendes liefern. Es liefern daher die Gleichungen A mit dx multiplicirt und von Null bis δ integrirt:

$$G = G_1, \qquad H = H_1.$$

Da Ψ das Potential der freien Elektricität ist, so haben seine Differentialquotienten in Richtungen, die tangential zur Trennungsfläche stehen, zu beiden Seiten derselben den gleichen Werth. In dem von uns betrachteten Falle müssen übrigens die Glieder $\frac{d\Psi}{dy}$ und $\frac{d\Psi}{dz}$ überhaupt verschwinden, da alles nur Function von x und t ist. Wir erhalten also aus G, C′ und D′

$$\begin{aligned} Q = Q_1 = \frac{4\pi}{k} g = \frac{q}{C} = \frac{4\pi}{k_1} g_1 = \frac{q_1}{C_1} \\ R = R_1 = \frac{4\pi}{k} h = \frac{r}{C} = \frac{4\pi}{k_1} r_1 = \frac{r_1}{C_1} \end{aligned} \qquad \text{H)}$$

Multipliciren wir ebenso die Gleichungen B′ mit dx und integriren von Null bis δ, so folgt:

$$\beta = \beta_1 = \frac{b}{\mu} = \frac{b_1}{\mu_1}, \ \gamma = \gamma_1 = \frac{c}{\mu} = \frac{c_1}{\mu_1}. \qquad \text{G)}$$

In unserem speciellen Falle erhalten wir für $t = 0$:

$$g = (A + C)\sin\frac{2\pi t}{\tau} + (B + D)\cos\frac{2\pi t}{\tau}$$

$$c = \mu\gamma = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\left[(A - C)\sin\frac{2\pi t}{\tau} + (B - D)\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right] \tag{8}$$

$$q_1 = E\sin\frac{2\pi t}{\tau},\quad c_1 = \mu_1\gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1}\left[\eta\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \xi\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right].$$

Die Gleichungen H liefern also: $D = -B$, $A + C = \frac{Ek}{4\pi C_1}$; nimmt man dazu die Gleichungen G, so folgt:

$$A = \left(\frac{k}{8\pi C_1} + \frac{\tau\eta\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}\right)E$$

$$C = \left(\frac{k}{8\pi C_1} - \frac{\tau\eta\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}\right)E \tag{9}$$

$$D = -B = \frac{\tau\xi\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}E$$

Man setzt gewöhnlich voraus, dass in Leitern die dielektrische Polarisation gering ist, also k verschwindet. Experimentell dürfte diess freilich kaum feststehen, da auf elektrostatische Phänomene, stationäre Strömung und die Integralinductionsströme der Werth von k bei genügend guter Leitung ohne Einfluss ist. Sei das Medium rechts ein derartiger Leiter, also $k_1 = 0$, dann wird $\xi = \eta = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}$ daher

$$A = \frac{E}{8\pi}\left(\frac{k}{C_1} + \sqrt{\frac{\mu k\tau}{\mu_1 C_1}}\right),\quad C = \frac{E}{8\pi}\left(\frac{k}{C_1} - \sqrt{\frac{\mu k\tau}{\mu_1 C_1}}\right),$$

$$D = -B = \frac{E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k\tau}{\mu_1 C_1}}.$$

Der Unterschied der leb. Kraft der directen und reflectirten Welle getheilt durch die erstere leb. Kraft ist

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{4\sqrt{\mu\,\mu_1\,k\,C_1\,\tau}}{(\sqrt{\mu_1 k} + \sqrt{\mu\,C_1\,\tau})^2 + \mu\,C_1\,\tau} \qquad 10)$$

Für alle Körper ausser Eisen, Nickel, Kobalt kann $\mu = \mu_1$ gesetzt werden. Wenden wir elektrostatisches Mass an, so ist für Luft $k = 1$. Die Siemenseinheit S ist $0 \cdot 94\,\mathrm{Ohm} = \frac{0 \cdot 94.10^9\,\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$. Bezeichnet C_{mq} die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers im magnetischen Maasse, so ist $S = \frac{10^4}{C_{mq}\,\mathrm{cm}}$ daher

$$C_{mq} = 1 \cdot 062.10^{-5}\,\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}^2} \qquad 11)$$

Behufs Verwandlung in elektrostatisches Maass haben wir mit $V^2 = (3.10^{10}\,\mathrm{cm\,sec}^{-1})^2$, behufs Uebergang zu einem anderen Metalle mit L zu multipliciren, wobei L angibt, wievielmal das andere Metall besser leitet, als das Quecksilber. Es ist also für ein beliebiges Metall in elektrostatischen Masse etwa

$$C_1 = 9 \cdot 56.10^{15}\,L\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

Bei den von Hertz in Luft erzeugten Wellen geschahen in der Secunde etwa 500 Millionen Schwingungen (die Schwingung zu einem ganz Hin- und Rückgange inclusive gerechnet), was liefert

$$C_1\,\tau = 2.10^7\,L.$$

Setzt man für Kupfer $L = 60$, so folgt Q für dieses Metall gleich $\frac{1}{17000}$; für Platin resp. Quecksilber würde Q etwa drei- resp. achtmalsogross. Es überschreitet also da überhaupt nur ein verschwindender Bruchtheil der lebenden Kraft der Welle die Trennungsfläche; die Welle wird fast total reflectirt. Diess gilt in erhöhtem Masse von noch langsameren Schwingungen.

Dagegen dringt der kleine eintretende Bruchtheil ziemlich tief ein, pflanzt sich aber enorm langsam fort. Bezeichnen wir ein für allemal mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, mit λ die Wellenlänge im Metalle, so ist $a = 2\pi : \eta\tau = 1 : \sqrt{\mu_1 C_1 \tau}$, $\lambda = a\tau = \sqrt{\tau : \mu_1 C_1}$, wobei damit $\mu_1 = 1$ sei, jetzt C_1 magnetisch zu messen ist. Die Absorption ist ein für allemal dadurch bestimmt, dass sich die Amplitüde in einer halben Welle auf den e^{π} also etwa 23^ten^ Theil, die Intensität auf den 529^ten^ Theil reducirt. Für die besprochenen Hertz'schen Schwingungen wäre für Kupfer, Platin resp. Quecksilber etwa

$$a = 10^6,\ 3.10^6,\ 7.10^6 \text{ cm sec}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{1 \text{ cm}}{500},\ \frac{1 \text{ cm}}{170},\ \frac{1 \text{ cm}}{70}.$$

In der Hälfte dieser Strecke reducirt sich die Intensität auf den 529^ten^ Theil. Die Länge der Strecke gleicher Intensitätsabnahme wächst für noch langsamere Schwingungen der Quadratwurzel aus der Schwingungsdauer proportional.

Im Natriumlichte geschehen etwa 500 Billionen Schwingungen in der Secunde, da folgt also $C_1\tau = 20\,L$,

$$Q = \frac{1}{18},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{3.10^{10} \text{ cm}}{\text{sec} \sqrt{20\,L}} = 10^9,\ 3.10^9,\ 7.10^9 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{10^{-4} \text{ cm}}{7\sqrt{L}} = \frac{1 \text{ cm}}{500000},\ \frac{1 \text{ cm}}{170000},\ \frac{1 \text{ cm}}{70000}.$$

Im Platin dringt also der zwölfte Theil der einfallenden Intensität ein und diese reducirt sich nach Durchwanderung des 30000^ten^ Theil eines Millimeters wieder etwa auf den 500^ten^ Theil. Für die Dämpfungsconstante folgt $\xi = 470000\sqrt{L}$. ξ ist gleich Cohn's p, Rathenau's $k_0 : 2$; die Grösse, welche Rathenau mit $2\,k$, Drude mit $\varkappa$ bezeichnet, ist unsere $\xi : \eta$, müsste also bei verschwindender Dielektricitätsconstante für alle Metalle $= 1$ sein. Die angenäherte Uebereinstimmung der Werthe Rathenau's ist eine scheinbare, da er bei der Berechnung die Wellenlänge in Luft zu Grunde legt. Wie schon erwähnt, ist allgemeine Anwendbarkeit dieser Formeln in der Optik ebensowenig zu erwarten, als dass für alle durchsichtigen Körper die Dielektricitätsconstante das Quadrat des Brechungsexponenten ist.

Der Ausdruck 10) für Q hat seinen Maximalwerth $2(\sqrt{2} - 1) = 0 \cdot 828$ für $\tau = \mu_1 k : 2 \mu C_1$, also für Kupfer, Platin und Quecksilber für etwa 1200000, 120000 und 20000 Billionen Schwingungen in der Secunde. Alsdann sind Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge im Metalle $\sqrt{2}$ mal so gross als auf der anderen Seite der Trennungsfläche in Luft.

Für noch raschere Schwingungen nimmt Q wieder und zwar bis in Unendliche ab. Doch ist zu bemerken 1. dass in den zuletzt betrachteten Fällen die Wellenlänge von molekülarer Kleinheit ist, dieselben also ausserhalb des Gültigkeitsbereichs unserer Formeln liegen. 2. dass die Resultate wesentlich modificirt werden können, wenn die Dielektricitätsconstante k_1 des Metalls einen erheblichen Werth hat und es böten Experimente über rasche elektrische Schwingungen in Metallen wohl das einzige Mittel, über die Dielektricitätsconstante der Metalle etwas zu erfahren. 3. dass man mit der Erfahrung vergleichbare Resultate erst erhalten kann, wenn man auch den Wiederaustritt der elektrischen Schwingungen aus dem Metalle in Luft betrachtet. Zum 2. Punkte bemerken wir folgendes:

Setzt man k_1 von Null verschieden und zur Abkürzung

$$\frac{\mu k_1}{\mu_1 k} = u, \quad 2 \frac{C_1 \mu \tau}{k \mu_1} = v$$

so wird:

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{2\sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}}}{1 + \sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}} + \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Bei den früher betrachteten Hertz'schen Schwingungen war $\mu = \mu_1$, $k = 1$, $C_1 \tau = v : 2 = 2.10^7 L$. Wenn also selbst die Dielektricitätsconstante des Metall eine millionmal grösser als die der Luft wäre, so würden die für diesen Fall gefundenen Resultate kaum alterirt. Dagegen würde im Falle des Natriumlichts die Dielektricitätsconstante des Metalls schon einen kleinen Einfluss bekommen, wenn sie der der Luft gleich wäre. Der Verlauf noch viel rascherer Schwingung würde dann gänzlich verändert.

Die Gleichungen 5 zeigen, dass mit wachsendem k_1 sowohl die Dämpfungsconstante ξ als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $2\pi : \eta\tau$ nur abnehmen kann. Habe ξ, wenn alles sonst unverändert bleibt, nur $k_1 = 0$ ist, den Werth ξ_0, so hat man nämlich $\xi_0^4 = \xi^4 + 4\pi^2 k_1 \mu_1 \xi^2 : \tau^2$.

Wenn entgegen dem zuerst betrachteten Falle das k_1 enthaltende Glied gross gegen das C_1 enthaltende ist, so wird:

$$\xi = 2\pi C_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{k_1}}, \quad \frac{2\pi}{\eta\tau} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \mu_1}}, \quad Q = \frac{4\sqrt{\mu\mu_1 k k_1}}{(\sqrt{\mu k_1} + \sqrt{\mu_1 k})^2}.$$

$$A = \left(\frac{k}{k_1} + \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k_1}{8\pi C_1}, \quad C = \left(\frac{k}{k_1} - \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k}{8\pi C_1}$$

$$B = -D = \frac{\tau E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}.$$

Nun schreiten wir zur Erledigung des 3. Punktes.

§ 2. Betrachtung einer planparallelen Metallplatte.

Seien die Ebenen $x = -p$ und $x = 0$ die beiden Begrenzungsflächen einer Metallplatte. Die im Innern der Metallplatte gültigen Werthe sollen den Index 1 erhalten. Links auf Seite der negativen Abscissen (wofür kein Index angewendet wird und rechts von der Metallplatte (Index 2 für die variabeln Grössen) sei dasselbe Dielectricum Luft. Von links sollen Planwellen anrücken, welche an beiden Metalloberflächen reflectirt werden. Rechts von der $y\,z$-Ebene ist dann keine reflectirte, nur die durchgedrungene Welle vorhanden. Die übrigen Verhältnisse sollen wie im vorigen Paragraph sein. Dann ist also für $-\infty < x < -p$:

$$g = A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) +$$
$$+ C \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D \cos \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}).$$

$$c = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) -$$
$$- C \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D \cos \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big].$$

Für $-p < x < 0$

$$q_1 = e^{-\xi x}\Big[E \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big) + F \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big)\Big] +$$
$$+ e^{\xi x}\Big[G \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big) + H \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big)\Big]$$

$$G_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\Big\{e^{-\xi x}\Big[E \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big) - F \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big)\Big] +$$
$$+ e^{\xi x}\Big[G \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big) - H \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big)\Big]\Big\}$$

$$c_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\left\{e^{-\xi x}\left[(E\eta + F\xi)\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) + \right.\right.$$

$$\left. + (-E\xi + F\eta)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right] +$$

$$+ e^{\xi x}\left[(-G\eta - H\xi)\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) + \right.$$

$$\left.\left. + (G\xi - H\eta)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]\right\}.$$

Endlich für $x > 0$ haben wir nur die durchgehende in der positiven x-Richtung fortschreitende Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass das Glied, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält, verschwindet. Dann wird also für $x > 0$

$$g_2 = J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}),\quad c_2 = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}).$$

Die Bedingungsgleichungen für $x = 0$ lauten:

$$\frac{g_1}{C_1} = \frac{4\pi g_2}{k},\qquad \frac{c_1}{\mu_1} = \frac{c_2}{\mu},$$

was liefert:

$$H = -F,\quad G = E - 2\frac{\eta F}{\xi},\quad E - \frac{\eta}{\xi}F = \frac{2\pi C_1 J}{k}$$

$$F = -H = \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \xi J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}},\quad E = \frac{2\pi C_1 J}{k} + \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$

$$G = \frac{2\pi C_1 J}{k} - \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$

Setzen wir

$$\cos\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = a,\quad \sin\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = \alpha,\quad \cos p\eta = b,\quad \sin p\eta = \beta,$$

$$e^{\xi p} = \gamma,$$

so liefern die Bedingungsgleichungen für $x = -p$:

$$Aa - Ba + Ca + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(Eb\gamma - F\beta\gamma + \frac{Gb}{\gamma} + \frac{H\beta}{\gamma}\right)$$

$$Aa + Ba - Ca + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(E\beta\gamma + Fb\gamma - \frac{G\beta}{\gamma} + \frac{Hb}{\gamma}\right)$$

$$Aa - Ba - Ca - Da = \frac{\tau\sqrt{\mu k}}{8\pi\mu_1 C_1}\Big[E\gamma(b\eta + \beta\xi) +$$

$$+ F\gamma(b\xi - \beta\eta) + \frac{G}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi) - \frac{H}{\gamma}(b\xi + \beta\eta)\Big]$$

$$A\alpha + B\alpha + C\alpha - D\alpha = \frac{\tau\sqrt{\mu k}}{8\pi^2\mu_1 C_1}\Big[E\gamma(-b\xi + \beta\eta) +$$

$$+ F\gamma(b\eta + \beta\xi) + \frac{G}{\gamma}(b\xi + \beta\eta) + \frac{H}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi)\Big].$$

Wir wollen $J = 1$ setzen, wodurch nur sämmtliche Amplitüden mit einem constanten Factor multiplicirt werden; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$2\delta = \gamma + \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} + e^{-p\xi},\quad 2\varepsilon = \gamma - \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} - e^{-p\xi},$$

dann wird:

$$Aa - Ba + Ca + Da = b\delta + \frac{b\varepsilon\eta - \beta\delta\xi}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$A\alpha + Ba - Ca + Da = \beta\varepsilon + \frac{b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$Aa - Ba - Ca - Da = b\delta + (b\varepsilon\eta + \beta\delta\xi) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$A\alpha + Ba + C\alpha - Da = \beta\varepsilon + (-b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach: 1. mit a, α, a, α; 2. mit $-\alpha$, a, $-\alpha$, a; 3. mit a, $-\alpha$, $-a$, α; 4. mit α, a, $-\alpha$, $-a$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\varkappa = \frac{\tau}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}} + \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2+\eta^2)}\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

$$\lambda = \frac{\tau}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}} - \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2+\eta^2)}\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

so erhält man

$$A = a\,b\,\delta + \alpha\,\beta\,\varepsilon + (a\,b\,\varepsilon + \alpha\,\beta\,\delta)\,\eta\,\varkappa + (\alpha\,\beta\,\delta - a\,b\,\varepsilon)\,\xi\,\lambda$$

$$B = a\,\beta\,\varepsilon - \alpha\,b\,\delta + (a\,\beta\,\delta - \alpha\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\varkappa - (a\,b\,\varepsilon + \alpha\,\beta\,\delta)\,\xi\,\lambda$$

$$C = (\alpha\,\beta\,\delta - a\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\lambda - (a\,\beta\,\delta + \alpha\,b\,\varepsilon)\,\xi\,\varkappa$$

$$D = -(a\,\beta\,\delta + \alpha\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\lambda + (a\,b\,\varepsilon - \alpha\,\beta\,\delta)\,\xi\,\varkappa$$

$$A^2 + B^2 = (b^2\varepsilon^2 + \beta^2\delta^2)(\eta^2\varkappa^2 + \xi^2\lambda^2) + 2\,\delta\,\varepsilon\,\eta\,\varkappa + \\ + 2\,b\,\beta\,(\delta^2 - \varepsilon^2)\,\xi\,\lambda + b^2\delta^2 + \beta^2\varepsilon^2$$

$$C^2 + D^2 = (b^2\varepsilon^2 + \beta^2\delta^2)(\eta^2\lambda^2 + \xi^2\varkappa^2).$$

Sobald die Metallplatte sehr dünn, also p sehr klein ist, wird

$$a = b = \delta = 1, \quad \alpha = \beta = \varepsilon = 0,$$

daher

$$A = 1, \quad B = C = D = 0,$$

es werden also die Wellen durchgelassen, als ob die Metallplatte nicht vorhanden wäre (Fall 1). Ein anderer extremer Fall (2) tritt ein, wenn $\xi\lambda$ und $\varkappa\eta$ (wenigstens eine dieser beiden Grössen) sehr gross ist. Dann verschwindet das erste Glied im Ausdruck für A sowie in dem für B und man hat $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$. Alle Bewegung wird reflectirt.

Man kann die Frage aufwerfen, wie dünn in diesem letzten Falle bei gegebener Schwingungsdauer die Metallplatte sein müsse, damit der Uebergang in das zuerst genannte Extrem eintrete.

Wir wollen da wieder bloss den Fall betrachten, dass die dielektrischen Eigenschaften der Metallschicht nicht in Betracht kommen, also k_1 verschwindet. Dann wird, wie wir sahen, $\xi = \eta = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}$.

Wir setzen ferner $\mu = \mu_1$ und erhalten

$$\varkappa\,\eta = \varkappa\,\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1\,\tau}},$$

$$\lambda\,\xi = \lambda\,\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1\,\tau}}.$$

Dieser Ausdruck wird sehr gross, wenn $\sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}}$ sehr gross oder sehr klein ist. Im ersteren Fall, der, wie aus den numerischen Beispielen des vorigen Paragraphen ersichtlich ist, bei den Hertz'schen Schwingungen eintritt, wird $\varkappa\xi = \lambda\xi$.

Da

$$\frac{\arccos b}{\arccos a} = \sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}},$$

so wird in diesem Falle auch dieses Verhältniss sehr gross, und daher α noch viel kleiner, als β sein, dessen Kleinheit die Grösse von $\eta\,\varkappa$ und $\xi\,\lambda$ zu compensiren hat. a und b können gleich eins gesetzt werden. Wir verbinden hiemit den Fall 1, dass fast alles Licht durchgeht, wenn p so klein ist, dass $\varepsilon = p\,\xi = 2\,\pi\,p\sqrt{\frac{C_1\,\mu}{\tau}}$ klein gegen 1, $\delta = 1$ wird.

Setzt man dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Medium zu beiden Seiten der Metallschicht (Luft) $\frac{1}{\sqrt{\mu\,k}} = V$, so ist

$$A = 1 + 2\,\pi\,p\,\frac{C_1}{k\,V}, \quad C = -\,2\,\pi\,p\,\frac{C_1}{k\,V}, \quad B = D = 0.$$

Wenn $p\,\xi$ gross ist, also nur wenig Licht hindurchgeht, so wird:

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2}\,e^{2\,p\,\xi}\,(\xi^2\,\varkappa^2 + \xi\,\varkappa), \quad C^2 + D^2 = \frac{\xi^2\,\varkappa^2}{2}\,e^{2\,p\,\xi}.$$

Numerische Berechnungen nach dieser Formel, ähnlich wie wir sie an die Formel des vorigen Paragraph geknüpft haben, stossen natürlich nicht auf die mindeste Schwierigkeit. Eine experimentelle Prüfung der Durchlässigkeit äusserst dünner Schichten aus schlecht leitenden Metallen oder anderen Leitern für Licht und elektrische Schwingungen könnten vielleicht Aufschlüsse über deren Dielektricitätsconstante liefern.

Auch die Berechnung des entgegengesetzten Falles, dass die Schwingungen so rasch geschehen, dass $\frac{C_1 \tau}{k}$ sehr klein ist (Kathodestrahlen?), hat keine Schwierigkeit, doch gehe ich darauf nicht weiter ein, da diese Phänomene wohl durch den specifischen Einfluss der Resonanz der einzelnen Moleküle zu sehr gestört werden dürften.