Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVII. Jahrgang 1887.

München.
Verlag der K. Akademie.
1888.

Commission bei G. Franz.

Katoptrische Eigenschaften der Flächen 2. Grades.

Von S. Finsterwalder.

(Eingelaufen 5. Februar.)

In einer Reihe von Untersuchungen [1]) hat Herr Staude die Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades mit Zuhilfenahme der hyperelliptischen Integrale behandelt und dabei schöne Resultate, darunter namentlich eine neue und elegante Fadenconstruction des Ellipsoides, erhalten. Ich habe später gezeigt, dass sich diese Construction unter Benützung einfacher, der Optik entnommener Vorstellungen auf rein geometrischem Wege beweisen lässt und dann gleichsam als Ausfluss einer katoptrischen Eigenschaft der Flächen 2. Grades erscheint. [2]) Staude hat nun neuerdings auf eine weitere katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides aufmerksam gemacht, deren erster Teil darin besteht, dass Strahlen, die von einem innerhalb des Ellipsoides gelegenen Punkte der Focalhyperbel ausgehen, sich nach dreimaliger Reflexion: zuerst an der (als spiegelnden Draht gedachten) Focalellipse, dann an der Focalhyperbel und endlich an der Innenseite des Ellipsoides wieder in Punkten der Focalellipse sammeln. [3]) Diese Eigenschaft beruht gleich jener früheren auf einem speciellen Fall eines sehr leicht zu beweisenden Satzes, mit dem sich der

1) Mathematische Annalen, Bd. XX u. XXI.

2) Mathematische Annalen, Bd. XXVI.

3) Mathematische Annalen, Bd. XXVII. pg. 417.

§ 1 der folgenden Untersuchung beschäftigt. Der § 2 soll die Anwendbarkeit dieses Satzes auf das in dieser Allgemeinheit noch nicht behandelte Problem der Reflexion eines Strahlenbündels an einer spiegelnden Fläche 2. Grades zeigen und die Erweiterung eines von Lindelöf für die Reflexion von Strahlen parallel zur Achse eines spiegelnden Ellipsoides gefundenen Satzes[1]) bieten. Im § 3 endlich wird durch Hereinziehung der bekannten, auf Quetelet und Malus zurückreichenden Construction einer Wellenfläche des Systems der reflectierten Strahlen der strenge Beweis dafür gegeben, dass gewisse, in § 2 anftretende Curven Rückkehrkanten der Brennfläche des Systems der reflectierten Strahlen sind. Damit ist ein erster Beitrag zur gestaltlichen Untersuchung jener Brennflächen geleistet.

§ 1.

1) Der Tangentialkegel K, welcher von einem Punkte P ausserhalb einer Fläche 2. Grades E an diese gelegt werden kann, hat die Normalen zu den drei zu E confocalen Flächen, die durch P gehen, zu Achsen und die Tangentialebenen in P an dieselben drei Flächen zu Hauptebenen.[2])

2) Wenn sich zwei Tangentialebenen eines Kegels 2. Ord. in einer Geraden einer der Hauptebenen des Kegels schneiden, so halbiert die zu dieser Hauptebene senkrechte Achse sowohl den Winkel der beiden Tangentialebenen, als auch den Winkel der beiden Berührlinien, mit welch' letzteren sie zugleich in einer Ebene liegt.

3) Berücksichtigt man, dass die Hauptebenen des Kegels K Tangentialebenen der drei zu E confocalen Flächen sind, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

Zwei Tangentialebenen einer Fläche 2. Grades E, welche

---

1) Vergl. das Citat bei § 2., 1).

2) Vergl. Salmon-Fiedler Analytische Geometrie des Raumes. I. Teil. pg. 213.

sich in einer Tangente T einer zu E confocalen Fläche F schneiden, liegen symmetrisch zur Normale N auf F im Berührpunkte P von T.

Die Linien, welche P mit den Berührpunkten der Tangentialebenen an E verbinden, liegen mit N in einer Ebene und ihr Winkel wird von N halbiert.

4) Denken wir uns irgend eine developpable Fläche D_1 der Fläche E umschrieben und ihren Schnitt S mit einer zu E confocalen Fläche F aufgesucht. In jedem Punkte von S legen wir durch die zugehörige Tangente T die symmetrische Ebene zur Tangentialebene von D in Bezug auf die Normale N von F. Dieselbe wird, wie aus obigem, natürlich auch umkehrbaren Satze hervorgeht, ebenfalls die Fläche E berühren und die Gesammtheit der zu den Tangentialebenen von D_1 symmetrischen Ebenen umhüllt demnach eine zweite, der Fläche E umschriebene Developpable D_2. Beide Developpablen schneiden sich in der Curve S auf der Fläche F, und Erzeugende von D_1 und D_2, die sich in einem Punkte von S treffen, können zufolge der in obigem Satze (3) ausgesprochenen Symmetrie als ein Paar an F reflectierter Strahlen gelten. Hierauf folgt der Satz:

Werden die Erzeugenden einer Developpablen D_1, die einer Fläche 2. Grades E umschrieben ist, an einer zu E confocalen Fläche F reflectiert, so bilden sie nach der Reflexion wiederum eine Developpable D_2, die ebenfalls E umschrieben ist.

Man kann nun weiter schliessen, dass ein ganzes Strahlensystem, das E als einen Mantel der Brennfläche hat, und dessen Geraden sich demnach zu Developpablen ordnen lassen, die diesem Mantel umschrieben sind, bei Reflexion an F ein Strahlensystem liefert, von dem ein Mantel der Brennfläche wieder durch E gebildet wird. Ein Strahlensystem endlich, das zwei confocale Flächen zu Brennflächen hat, geht bei

Reflexion an einer dritten in sich selbst über. Dieser letztere Satz bildete den Ausgangspunkt meines Beweises für die Fadenconstruktion des Ellipsoides. Was nun die Eingangs erwähnte, von Herrn Staude gefundene, katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides betrifft, so sei bemerkt, dass dieselbe einen Grenzfall des allgemeinen Satzes darstellt, bei dem abwechselnd die Ausgangsfläche E und die spiegelnde Fläche F in Focalcurven ausgeartet sind.

§ 2.

1) Der allgemeine Satz des § 1 verhilft uns zu einer Bestimmung der Brennflächen, die bei Reflexion eines Strahlenbündels an einer beliebigen Fläche 2. Grades entstehen. Es gelingt nämlich leicht, die Strahlen des Bündels in doppelter Weise so in Kegel zusammenzufassen, dass die Strahlen eines Kegels nach ihrer Reflexion an der spiegelnden Fläche eine Developpable bilden. In der That ist F die spiegelnde Fläche und P der leuchtende Punkt, so werden alle Tangentenkegel, die von P aus an die zu F confocalen Flächen gelegt werden können, die verlangte Eigenschaft haben. Diese Kegel bilden ein confocales System, dessen Brennstrahlen die Erzeugenden des durch P gehenden, zu F confocalen, einschaligen Hyperboloides sind. Sie schneiden auf der Fläche F das System katoptrischer Linien aus, welche die Fläche doppelt überdecken und längs welchen sich die reflectierten Strahlen zu Developpablen zusammenfassen lassen.[1]) Jede dieser Developpablen ist derselben zu F

1) Der Begriff der katoptrischen Linien findet sich zuerst bei Lindelöf („Note on caustics produced by reflexion." Report of the XXXth meeting of the British Association for the advancement of science held at Oxford 1860). Vergl. des Verfassers Inauguraldissertation: „Ueber Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche", pag. 11.

confocalen Fläche umschrieben, von der auch der zugehörige Kegel einfallender Strahlen berührt wird. Die katoptrischen Linien sind im Allgemeinen Raumcurven 4. Ordnung 1. Species, der Schnitt eines Kegels 2. Ordnung mit der spiegelnden Fläche. Die Klasse der Developpablen ist 14, da sie zusammen mit dem Kegel der einfallenden Strahlen das der katoptrischen Linie (8. Klasse) und der spiegelnden Fläche (2. Klasse) gemeinsam Umschriebene ausmacht. Den Hauptebenen des confocalen Systems der Kegel entsprechend, werden drei der katoptrischen Linien in Kegelschnitte ausarten. Die zugehörigen Developpablen sind demnach einem Kegelschnitt und einer Fläche 2. Ordnung umschrieben und daher von der 4. Klasse. Sie haben ausserdem die Ebene der einfallenden Strahlen als Doppelebene und sind daher von der 6. Ordnung. Die Berührcurve der Developpablen auf der Fläche 2. Ordnung ist umgekehrt von der 6. Klasse und 4. Ordnung und hat in dem leuchtenden Punkt einen Doppelpunkt.

2) Jede Developpable hat ihre Rückkehrkante auf der einen Schale der Brennfläche des Systemes der reflectierten Strahlen. Von den speciellen Developpablen 4. Klasse soll nun auch gezeigt werden, dass die vorhin erwähnten Curven 4. Ordnung, längs welcher sie die zugehörigen Flächen 2. Grades berühren, ebenfalls auf der Brennfläche liegen.

Die einfallenden Strahlen erfüllen nämlich in dem speciellen Falle eine Ebene A, welche die zu F confocale Fläche E im leuchtenden Punkte P berührt und auf F den Kegelschnitt C — eine specielle katoptrische Linie — ausschneidet. Der A nächstbenachbarte Kegel des confocalen Systems verläuft zu beiden Seiten der Ebene A und bestimmt in der Nachbarschaft des Kegelschnittes C zwei Zweige katoptrischer Linien, deren Distanz wir allenthalben als Unendlichkleines e r s t e r Ordnung annehmen können. Die zu F confocale Fläche E′, welche von diesem benachbarten Kegel berührt wird, weicht von E nur um ein Unendlichkleines zweiter Ordnung ab. Sobald wir dieses vernachlässigen finden wir, dass die 3 Developpablen, welche von C und den nächstbenachbarten Zweigen katoptrischer Linien ausgehen, ein und dieselbe Fläche E berühren und, da sie selbst unendlich benachbart sind, sich auf dieser Fläche längs der Berührcurve R der C und E gemeinsam umschriebenen Developpablen schneiden. Die Curve R liegt dann notwendig auf der Brennfläche, als dem Ort der Schnittpunkte benachbarter Strahlen des Systems; ausserdem berühren sich längs ihr, die Brennfläche, die Fläche E und die specielle Developpable gegenseitig.

§ 3.

1) Die drei Berührcurven R, die den drei Hauptebenen des Systems der confocalen Kegel entsprechen, spielen auf der Brennfläche eine ausgezeichnete Rolle; sie sind, wie sich aus dem Vorhergehenden vermuten lässt und in dem Nachfolgenden bewiesen wird, Rückkehrkanten der Brennfläche. Um diesen Beweis zu führen, wollen wir einen andern Weg einschlagen.

Wenn man zu dem leuchtenden Punkt P die Gegenpunkte in Bezug auf alle Tangentialebenen der spiegelnden Fläche F aufsucht, so erfüllen diese eine neue Fläche W, welche die Eigenschaft hat, das System der von P ausgegangenen und an F reflectierten Strahlen normal zu durchsetzen. Die Brennfläche der reflectierten Strahlen ist demnach die Krümmungscentrafläche von W, und den katoptrischen Linien auf F entsprechen die Krümmungslinien von W.

Die Fläche W steht in engster Beziehung zur Fusspunktsfläche von F mit P als Pol. Beide sind ähnlich und Bezug auf P ähnlich liegend; die erstere dabei von doppelten Dimensionen wie die letztere.

Nach einem bekannten Satze[1]) ist die Fusspunktsfläche identisch mit der inversen der reciproken Fläche der Originalfläche, wenn bei der inversen und der reciproken Transforformation dieselbe Kugel um P als Mittelpunkt zu grunde gelegt wird. Demnach kann die Fläche W durch folgende 3 Transformationen aus der Fläche F erzeugt werden: a) F geht durch eine reciproke Transformation an einer beliebigen Kugel um P als Mittelpunkt über in Σ; b) Σ geht durch eine inverse Transformation an derselben Kugel über in Π; c) Π geht durch eine Aehnlichkeitstransformation mit P als Centrum und dem Vergrösserungsverhältnis 2 : 1 über in W.

Die beiden letzten Transformationen führen die Krümmungslinien wieder in solche über. Die Krümmungslinien von W kommen demnach wesentlich auf die Krümmungslinien von Σ zurück. Die Fläche Σ ist in unserem Falle als reciproke Fläche der Fläche 2. Ordnung F eine solche zweiter Klasse und ihre Krümmungslinien sind bekannt. Ihnen entsprechen auf der Fläche F die katoptrischen Linien in der Art, dass den Punkten der Krümmungslinien auf Σ Tangentialebenen in Punkten der katoptrischen Linien auf F zugehören.

Unter den Krümmungslinien von Σ sind die Hauptschnitte ausgezeichnet. Sie werden durch das Polartetraeder bestimmt, das Σ und dem unendlich fernen Kugelkreis gemeinsam ist. Diesem Tetraeder entspricht vermöge der reciproken Transformation das gemeinsame Polartetraeder der Fläche F und des Kegels I, der von P nach dem unendlich fernen Kugelkreis geht. Eine Ecke des letzteren Tetraeders ist P selbst; dessen Gegenseite die Polarebene in Bezug auf F. Die drei anderen Seiten bilden das gemeinsame Polardreikant des Tangentialkegels K von P an F und des Kegels I. Es sind dies demnach die drei Hauptebenen des Kegels K und

1) Vergl. Salmon-Fiedler Analytische Geometrie des Raumes, II. Teil, pg. 246.

sie bestimmen die katoptrischen Linien auf F, welche den Hauptschnitten von Σ entsprechen.

Wir haben in § 2, 2) gefunden, dass denselben katoptrischen Linien ausgezeichnete Developpable 4. Klasse zugehören, deren Berührcurve R mit einer gewissen Fläche 2. Ordnung E auf der Brennfläche liegt.

2) Den Hauptschnitten von Σ entsprechen vermöge der inversen und der Aehnlichkeitstransformation gewisse sphärische Kegelschnitte auf W. Die Hauptschnitte von Σ haben die Eigenschaft, dass sich längs ihnen drei benachbarte Normalen, der zu ihnen senkrechten Krümmungslinien in einem Punkte schneiden, was zu einer Rückkehrkante der Brennfläche Anlass gibt. Diese Eigenschaft geht anch auf die sphärischen Kegelschnitte der Fläche W über, da sie identisch ist mit der Möglichkeit eine Wulstfläche zu finden, welche die gegebene Fläche längs einer Curve hyperosculiert und diese Möglichkeit bei einer inversen und Aehnlichkeitstransformation bestehen bleibt. Die drei sphärischen Kegelschnitte auf W sind also zunächst Krümmungslinien dieser Fläche; infolge dessen bilden auch die Normalen längs derselben je eine Developpable. Gleichzeitig aber schneiden sich auch die zu beiden Seiten derselben auf einer Krümmungslinie der anderen Schaar liegenden Nachbarnormalen in je einem Punkte dieser Developpablen und bestimmen so auf ihr eine Rückkehrkante R_1 der Centrafläche von W oder, was dasselbe ist, der zu suchenden Brennfläche. Die drei erwähnten Developpablen sind identisch mit den in § 2, 2) betrachteten, da sie ja durch Reflexion derselben einfallenden Strahlen entstehen. Ebenso müssen auch die Curven R, längs welchen jene Developpablen die Brennfläche berühren, identisch sein mit den Rückkehrkanten R_1 der Brennfläche, in welchen diese Developpablen ebenfalls die Brennfläche berühren.

3) Fassen wir endlich kurz zusammen, was sich aus dem Vorangehenden zur Construction der Brennfläche ergibt:

Ist eine spiegelnde Fläche zweiten Grades F und ein leuchtender Punkt P gegeben, so ordne man die von P ausgehenden Strahlen nach den Erzeugenden derjenigen Kegel, welche zum Tangentialkegel von P an F confocal sind. Diese Kegel schneiden die Fläche F nach dem System der katoptrischen Linien, längs welchen die reflectierten Strahlen Developpable bilden, die je einer zu F confocalen Fläche 2. Grades umschrieben sind. Den gemeinsamen Hauptebenen der Kegel entsprechen ausgezeichnete katoptrische Linien, die zu Rückkehrkanten der Brennfläche Anlass geben. Diese Rückkehrkanten sind die Berührcurven der zu den ausgezeichneten katoptrischen Linien gehörigen Developpablen mit einer der durch P gehenden, zu F confocalen Flächen zweiten Grades.

Schlussbemerkung. Der Satz der § 1 erlaubt uns, die für die einmalige Reflexion eines Strahlenbündels an einer Fläche 2. Grades entwickelten Theoreme nicht nur auf beliebig oft wiederholte Reflexionen an derselben Fläche, sondern auch noch an allen zu ihr confocalen Flächen (einschliesslich der Focalcurven) auszudehnen. Da ihm zufolge abwickelbare Flächen, die einer Fläche 2. Grades umschrieben sind, bei einer Reflexion an einer Confocalen ihren Charakter nicht ändern, so thun sie es auch nach beliebig vielen nicht und desshalb gelten die katoptrischen Linien der ersten Reflexion auch für beliebig oft wiederholte. Ja noch mehr: die Eigenschaft der speciellen Developpablen gemeinsam mit ihren beiden nächstbenachbarten ein und dieselbe Fläche 2. Grades zu berühren, bleibt auch nach wiederholten Reflexionen aufrecht erhalten und damit auch die Vermutung, dass die Curven, in welchen jene Developpablen nach wiederholter Reflexion die Fläche 2. Grades berühren, Rückkehrkanten der neuen Brennfläche sind. Die strenge Begründung dieser Vermutung gelingt auf dem in § 3 eingeschlagenen Wege nicht, sie scheint vielmehr ebenso wie die endgiltige Bestimmung der Gestalt der Brennflächen einer analystischen Behandlung der Problems vorbehalten zu sein.