L Soc 1727.15

HARVARD COLLEGE LIBRARY
NOV 28 1899
CAMBRIDGE, MASS.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft II.

München.
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bilinearformen und Differentialsysteme.

Von **E. von Weber.**

(*Eingelaufen 8. Juli.*)

Die algebraischen Thatsachen, die den bisher entwickelten allgemeinen Integrationstheorien partieller Differentialprobleme zu Grunde liegen, fliessen fast ausnahmslos aus derselben Quelle; es ist dies die Theorie der Schaaren von Bilinearformen. Der hiermit berührte Zusammenhang soll in der vorliegenden Note für den Fall der Differentialsysteme mit zwei unabhängigen Veränderlichen des näheren dargelegt werden.

§ I. Passive Differentialsysteme.

1. In diesem § werden die für das Folgende nötigen Sätze aus der Theorie der Differentialsysteme beliebiger Ordnung zusammengestellt.[1])

Es seien x, y unabhängige Veränderliche, $z_1\, z_2 \,..\, z_n$ unbekannte Funktionen dieser Variabeln, und es werde gesetzt:

$$z^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_i}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}; \quad z^i_{00} = z_i \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots.)$$

Unter einem Differentialsystem versteht man dann ein beliebiges Gleichungensystem in $x\, y\, z_1 \,..\, z_n$ und einer endlichen Zahl der Ableitungen $z^i_{\alpha\beta}$; die Ordnung des Differentialsystems ist die Ordnung der höchsten darin auftretenden Ableitungen.

---

[1]) Vgl. C. Méray und C. Riquier, Ec. Norm. 1890, p. 23; Riquier Ec. Norm. 1893, p. 65, 123, 167; Sav. Étr. 32; C. Bourlet, Ec. Norm. 1891 Supplém.; A. Tresse Acta Math. 18 p. 1 (1894).

2. Wir wollen die z_i und ihre Ableitungen bis zur μ^{ten} Ordnung einschliesslich folgendermassen in eine Reihe schreiben:

$$(1) \qquad z^1_{\mu 0},\ z^1_{\mu-1,1} \ldots z^1_{0\mu},\ z^2_{\mu 0} \ldots z^2_{0\mu} \ldots z^n_{\mu 0} \ldots z^n_{0\mu},\ z^1_{\mu-1,0} \ldots$$
$$\ldots z^n_{0,\mu-1} \ldots\ldots z^1_{10},\ z^1_{01},\ z^2_{10} \ldots z^n_{01},\ z^1_{00} \ldots z^n_{00}.$$

In dieser Reihe, die sich nach links hin auf Grund desselben Anordnungsprincips unbegrenzt fortsetzen lässt, steht demnach die Ableitung

$$z^k_{\gamma\delta} \text{ rechts von } z^i_{\alpha\beta},$$

wenn entweder

1) $\gamma + \delta < \alpha + \beta$;

oder 2) $\gamma + \delta = \alpha + \beta$; $k > i$;

oder 3) $\gamma + \delta = \alpha + \beta$; $k = i$; $\gamma < \alpha$.

Eine Relation

$$(2) \qquad z^i_{\alpha\beta} = \varphi(x\, y\, z_1 \ldots z_n \ldots z^k_{\gamma\delta} \ldots)$$

heisst **canonisch,** wenn alle in der Funktion φ vorkommenden Grössen z_i, $z^k_{\gamma\delta}$ in der Reihe (1) rechts von $z^i_{\alpha\beta}$ stehen.

Ein Differentialsystem S heisst **canonisch**[1]), wenn 1) jede einzelne Gleichung von S canonisch ist; 2) keine der Grössen $z^i_{\alpha\beta}$, die auf den linken Seiten von S auftritt, in einer der rechten Seiten von S vorkommt.

3. Ist die Gleichung

$$z^k_{\gamma\delta} = \psi(x\, y, \ldots z_i \ldots z^l_{\varepsilon\zeta} \ldots)$$

canonisch, und substituiert man für $z^k_{\gamma\delta}$ die Funktion ψ in die rechte Seite der canonischen Gleichung (2), so erhält man wieder eine canonische Gleichung. Daraus folgt sofort, dass jedes beliebige Differentialsystem durch geeignete Auflösung auf die canonische Form gebracht werden kann.

4. Ist f eine Funktion der Grössen

$$(3) \qquad x,\ y,\ z^i_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2 \ldots)$$

[1]) Tresse a. a. O.

so verstehen wir unter $D_x f$, $D_y f$ die folgenden Ausdrücke:

$$D_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} z^i_{10} + \Sigma\Sigma\Sigma \frac{\partial f}{\partial z^i_{\alpha\beta}} z^i_{\alpha+1,\beta}$$

$$D_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} z^i_{01} + \Sigma\Sigma\Sigma \frac{\partial f}{\partial z^i_{\alpha\beta}} z^i_{\alpha,\beta+1}.$$

Die Operationen D_x, D_y bezeichnen wir als Derivationen nach x bezw. y, die Gleichungen

$$D_x f = 0, \quad D_y f = 0$$

als die ersten Derivirten der Gleichung $f = 0$, ferner die Gleichungen

$$D_x(D_x f) = 0, \quad D_x(D_y f) = D_y(D_x f) = 0, \quad D_y(D_y f) = 0$$

als die zweiten Derivirten etc.

Genügen 4 Zahlen ϱ, ϱ', σ, σ' den Bedingungen

$$\varrho' \leq \varrho, \quad \sigma' \leq \sigma$$

und steht die Ableitung $z^k_{\gamma\delta}$ in der Reihe (1) rechts von $z^i_{\alpha\beta}$, so steht auch die Ableitung

$$z^k_{\gamma+\varrho',\delta+\sigma'} \text{ rechts von } z^i_{\alpha+\varrho,\beta+\sigma};$$

daraus folgt sofort, dass die unbegrenzt vielen Derivirten einer canonischen Gleichung wieder canonisch sind.

5. Tritt die Ableitung $z^i_{\alpha\beta}$ in einer der Gleichungen des canonischen Differentialsystems S auf der linken Seite auf, so bezeichnen wir sie selbst und alle Ableitungen der Form

$$z^i_{\alpha+s,\beta+t} \quad (s, t = 0, 1, 2, .. \text{ in inf.})$$

als **principale** Grössen des Systems S, alle übrigen Variabeln (3) als **parametrische** Grössen von S. Die Anzahl der principalen Grössen ist also stets unbegrenzt, aber nicht notwendig die der parametrischen.

Enthält S zwei principale Grössen mit demselben obern Index:

(4) $$z^i_{\alpha\beta}, \quad z^i_{\alpha'\beta'},$$

und ist α'' die grössere der Zahlen α, α', ferner β'' die grössere der Zahlen β, β', so heisst die (gleichfalls principale) Ableitung $z^i_{\alpha''\beta''}$ eine **cardinale** Ableitung des canonischen Systems S.

6. Es sei μ die Ordnung des canonischen Systems S; dann ist μ auch die Ordnung der höchsten principalen Ableitungen, die in den Gleichungen S vorkommen. Ist dann ν eine Zahl $\geq \mu$, so denken wir uns jede Gleichung in S nach x und y wiederholt derivirt, und zwar so lange, bis die derivirten Gleichungen die Ordnung ν erreichen. Indem wir alle so erhaltenen Gleichungen dem System S hinzufügen, erhalten wir ein Differentialsystem S_ν.

Dieses System ist nun zwar im Allgemeinen nicht canonisch; aber es besteht nach Nr. 4 aus lauter canonischen Gleichungen, und da die Anzahl der Grössen $z^k_{\gamma\delta}$, die in der Reihe (1) rechts von einer bestimmten Ableitung $z^i_{\alpha\beta}$ stehen, begrenzt ist, so schliesst man nach Nr. 3 leicht, dass mittels des Systems S_ν jede principale Ableitung bis zur ν^{ten} Ordnung einschliesslich vermöge einfacher Substitutionen durch die parametrischen Grössen allein dargestellt werden kann.

Enthält aber S zwei principale Ableitungen (4) mit demselben obern Index und wählt man

$$\nu \geq \alpha'' + \beta'',$$

wobei $z^i_{\alpha''\beta''}$ die zugehörige cardinale Ableitung bedeutet, so tritt die letztere auf den linken Seiten mindestens zweier verschiedener Gleichungen des Systems S_ν auf, lässt sich also mit Hülfe von S_ν auf mindestens zwei verschiedene Arten durch die parametrischen Grössen allein darstellen. Diese beiden Darstellungen sind natürlich im allgemeinen verschieden, und ihre Vergleichung führt dann zu einer Relation zwischen den parametrischen Grössen allein.

7. Ein canonisches System S heisst **passiv**, wenn sich mittels der Gleichungen S und ihrer Derivirten jede principale Ableitung auf nur eine Art durch die parametrischen Grössen allein darstellen lässt, wenn also aus dem System S_ν, wie gross

auch der Index ν gewählt sein mag, keine Relation zwischen den parametrischen Grössen hervorgeht.

Ist ω die Ordnung der höchsten cardinalen Ableitung von S und ergeben sich aus S_ω (bezw. aus S_μ im Falle $\omega \leqq \mu$) keine Relationen zwischen den parametrischen Grössen, so gilt dasselbe a fortiori für alle Systeme S_ν ($\nu > \omega$). Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Passivität des canonischen Systems S der Ordnung μ finden also ihren Ausdruck in einem gewissen System partieller Differentialgleichungen, in dem die Variabeln $x, y, z_1 \ldots z_n$ und die parametrischen Ableitungen bis zur μ^{ten} Ordnung einschliesslich als Independente figuriren, und dem die rechten Seiten der Gleichungen S identisch zu genügen haben.

8. Das canonische System S sei von der Ordnung μ und nicht passiv. Bildet man dann das Differentialsystem $S_{\mu+1}$, bringt dasselbe auf die canonische Form und verfährt mit letzterer wie mit S etc., so gelangt man nach einer endlichen Zahl von Schritten[1]) entweder zu Widersprüchen, eventuell zu Relationen in $x\,y$ allein, und das vorgelegte System S besitzt dann kein Integral, oder zu einem passiven System, auf dessen Integration die von S hinauskommt.

Die Aufsuchung der etwaigen Integrale eines beliebigen Differentialsystems kommt also stets auf die Integration eines canonischen, passiven Systems hinaus.

9. Es sei S ein canonisches, passives System der Ordnung μ; ferner sollen die Grössen

$$(5) \qquad x_0\, y_0 \ldots \bar{z}_i \ldots \bar{z}^k_{\gamma\delta} \ldots$$

constante Anfangswerte der parametrischen Grössen von S bedeuten und folgenden Bedingungen genügen:

1) Die rechten Seiten von S sind in der Umgebung der Stelle $x_0\, y_0\, \bar{z}_i\, \bar{z}^k_{\gamma\delta}$ regulär.

2) Falls die Zahl der parametrischen Grössen, also auch die der Constanten (5) unbegrenzt ist, so sollen die Potenzreihen

[1]) Riquier, Éc. Norm. 1893; Tresse a. a. O.

$$\sum_\gamma \sum_\delta \frac{\bar{z}^k_{\gamma\delta}}{\gamma!\,\delta!}(x-x_0)^\gamma (y-y_0)^\delta \quad (k = 1, 2, .. n)$$

in denen die Summe über alle parametrischen Grössen mit dem obern Index k zu erstrecken ist, einen gemeinsamen Konvergenzbezirk besitzen.

Unter diesen Annahmen gibt es ein und nur ein System von Funktionen $z_1 .. z_n$, die sich an der Stelle $x_0\, y_0$ regulär verhalten, dem System S identisch genügen, und die Eigenschaft besitzen, dass die parametrischen $z^k_{\gamma\delta}$ an der Stelle $x_0\, y_0$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $\bar{z}^k_{\gamma\delta}$ annehmen.

10. Im Folgenden werden ausschliesslich passive Systeme erster Ordnung betrachtet. Die canonische Form eines solchen Systems besteht aus Gleichungen der Form

$$(\mathrm{K})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z_a}{\partial x} = \varphi_a\left(x, y, z_1 .. z_n, \dfrac{\partial z_a}{\partial y}, \dfrac{\partial z_b}{\partial x}, \dfrac{\partial z_b}{\partial y}, \dfrac{\partial z_{b'}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{b'}}{\partial y}, ..\right) \\ \dfrac{\partial z_c}{\partial y} = \psi_c\left(x, y, z_1, .. z_n, \dfrac{\partial z_d}{\partial x}, \dfrac{\partial z_d}{\partial y}, \dfrac{\partial z_{d'}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{d'}}{\partial y}, . - \quad\right) \end{cases}$$

$$(b, b' \ldots > a;\ d, d' \ldots > c).$$

Bezeichnet man mit $z_e, z_{e'}, z_{e''} \ldots$ diejenigen unter den z_i, deren erste Ableitungen beide auf den rechten Seiten von (K) vorkommen, so sind die cardinalen Ableitungen des Systems (K) die folgenden:

$$\frac{\partial^2 z_e}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z_{e'}}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z_{e''}}{\partial x\, \partial y} \cdots,$$

und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Passivität von (K) bestehen dann nach Nr. 7 darin, dass sich jede der genannten Ableitungen mit Hülfe der ersten Derivirten von (K) auf eine und nur eine Weise durch $x, y, z_1 .. z_n$ und die ersten und zweiten parametrischen Ableitungen ausdrücken lässt.

§ II. Zur Theorie der Schaaren von Bilinearformen.

11. Es seien $x_1\, x_2 \ldots x_m$, bezw. $y_1\, y_2 \ldots y_n$ zwei Variabelngruppen, u und v willkürliche Parameter, endlich P_{ik}, Q_{ik} Constante. Dann wird das volle Invariantensystem, das die Schaar von Bilinearformen

$$W = u \sum_1^m {}_i \sum_1^n {}_k P_{ik}\, x_i\, y_k + v \sum_1^m {}_i \sum_1^n {}_k Q_{ik}\, x_i\, y_k$$

gegenüber beliebigen linearen homogenen Transformationen der beiden Variabelngruppen x und y besitzt, nach Kronecker[1]) folgendermassen gebildet:

Der Rang der Matrix

$$\text{(A)} \qquad \begin{Vmatrix} u\,P_{11} + v\,Q_{11}, & u\,P_{12} + v\,Q_{12}, \ldots & u\,P_{1n} + v\,Q_{1n} \\ u\,P_{21} + v\,Q_{21}, & u\,P_{22} + v\,Q_{22}, \ldots & u\,P_{2n} + v\,Q_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot\,\cdot & \cdot \\ u\,P_{m1} + v\,Q_{m1}, & u\,P_{m2} + v\,Q_{m2}, \ldots & u\,P_{mn} + v\,Q_{mn} \end{Vmatrix}$$

sei gleich τ, d. h. es mögen in diesem Schema alle $\tau + 1$-reihigen, nicht aber alle τ-reihigen Determinanten für beliebige u, v verschwinden. Dann gibt es $m - \tau$ Systeme von je m ganzrationalen homogenen Funktionen der Variabeln $u\, v$ mit constanten Coefficienten:

$$\text{(6)} \qquad a_{1s}\; a_{2s} \ldots a_{ms} \quad (s = 1, 2, \ldots m - \tau)$$

derart, dass die Identitäten

$$a_{1s} \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_{2s} \frac{\partial W}{\partial x_2} + \ldots + a_{ms} \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0$$

für jedes beliebige Wertsystem u, v, $y_1 \ldots y_n$ befriedigt sind und dass in der Matrix, die aus den $m - \tau$ Zeilen (6) besteht, nicht alle $m - \tau$-reihigen Determinanten für beliebige $u\, v$ verschwinden. Dann ist jedes andere Formensystem $a_1 \ldots a_m$, das die Identität

---

[1]) Sitzungsber. der Berl. Ak. 1890, p. 1225.

$$(7) \qquad a_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + \ldots + a_m \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0$$

erfüllt, eine lineare Combination der Systeme (6), mit Coefficienten, die in den u v rational sind. Wir denken uns die $m - \tau$ Formensysteme (6) so ausgewählt, dass ihre Grade in u, v möglichst klein sind, und es sei M_s der Grad des s^{ten} dieser Formensysteme.

Ebenso bezeichnen wir mit

$$b_{1s}\ b_{2s} \ldots b_{ns}\ (s = 1, 2, \ldots n - \tau)$$

$n - \tau$ Formensysteme, in deren Matrix nicht alle $n - \tau$-reihigen Determinanten für beliebige u, v verschwinden, und die der Identität

$$b_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} + b_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} + \ldots + b_n \frac{\partial W}{\partial y_n} = 0$$

für beliebige Werte $u, v, x_1 \ldots x_m$ genügen. Diese Formensysteme seien so ausgewählt, dass ihre Gradzahlen $N_1, N_2, \ldots N_{n-\tau}$ möglichst klein werden.

Wir dürfen ohne die Allgemeinheit zu beschränken annehmen, dass die τ-reihigen Determinanten der Matrix A für $v = 0$ nicht alle verschwinden. Es sei dann

$$(w - w_1)^{\lambda_{11}}\ (w - w_2)^{\lambda_{12}} \ldots (w - w_\varkappa)^{\lambda_{1\varkappa}},$$

von einem constanten Faktor abgesehen, der grösste gemeinschaftliche Divisor aller τ-reihigen Determinanten der Matrix

$$(\mathrm{A}') \qquad Q_{ik} - w\, P_{ik} \quad (i = 1, \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

wobei die Constanten $w_1, w_2, \ldots w_\varkappa$ alle verschieden sind.

Allgemein sei

$$(w - w_1)^{\lambda_{i1}}\ (w - w_2)^{\lambda_{i2}} \ldots (w - w_\varkappa)^{\lambda_{i\varkappa}}$$

der grösste gemeinsame Divisor aller $\tau - i + 1$-reihigen Determinanten obiger Matrix. Setzt man dann:

$$\lambda_{1h} - \lambda_{2h} = e_{1h}\,;\ \lambda_{2h} - \lambda_{3h} = e_{2h}\,;\ \ldots\ \lambda_{\tau-1,h} - \lambda_{\tau h} = e_{\tau-1,h}\,;\ \lambda_{\tau h} = e_{\tau h},$$

so bilden die Zahlen

$$M_1,\ M_2,\ ..\ M_{m-\tau},\ N_1,\ N_2,\ ..\ N_{n-\tau};$$

$$w_1,\ w_2,\ ..\ w_\varkappa;\ e_{\alpha\beta}\ (\alpha = 1, 2, ..\ \tau;\ \beta = 1, 2, ..\ \varkappa)$$

das vollständige Invariantensystem der Schaar W, und man hat

$$\tau = \Sigma\,\Sigma\, e_{\alpha\beta} + \Sigma\, M_i + \Sigma\, N_k. \tag{8}$$

12. Für das Folgende ist eine genauere Bestimmung der Zahlen M_i nötig. Es sei allgemein μ_h die Anzahl derjenigen der Zahlen M_i, die gleich h sind; ebenso seien ν_k von den Zahlen N_k gleich h. Da die Zahlen M_i, N_k offenbar nicht grösser als τ sein können, so hat man

$$\mu_{\tau+1} = \nu_{\tau+1} = \mu_{\tau+2} = \nu_{\tau+2} = \ldots = 0.$$

Ferner gelten die Beziehungen:

$$\mu_0 + \mu_1 + .. + \mu_\tau = m - \tau;\quad \nu_0 + \nu_1 + .. + \nu_\tau = n - \tau. \tag{9}$$

Die beiden Matrices

$$\left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & .. & P_{1n} \\ . & . & & . \\ P_{m1} & P_{m2} & .. & P_{mn} \end{matrix} \right\|;\quad \left\| \begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} & .. & Q_{1n} \\ & & & \\ Q_{m1} & Q_{m2} & .. & Q_{mn} \end{matrix} \right\|$$

mögen mit P bezw. Q bezeichnet werden, ferner mit B_1 die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & .. & P_{1n} & Q_{11} & Q_{12} & .. & Q_{1n} \\ . & . & .. & . & . & . & .. & . \\ P_{m1} & P_{m2} & .. & P_{mn} & Q_{m1} & Q_{m2} & .. & Q_{mn} \end{matrix} \right\|. \tag{B$_1$}$$

Allgemein bezeichne B_h die aus $(h+1)\,n$ Colonnen und aus $h\,m$ Zeilen bestehende Matrix, die dadurch gebildet wird, dass man das Schema B_1 h-mal in staffelförmiger Anordnung hinschreibt, also in leicht verständlicher, abgekürzter Schreibweise folgende Form hat:

$$\left\| \begin{matrix} P & Q & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & .. & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & P & Q \end{matrix} \right\|; \tag{B$_h$}$$

endlich sei ϱ_h der Rang der Matrix B_h.

Werden dann diejenigen unter den Formensystemen (6). deren Grad h ist, mit

$$(10) \qquad a_{1s}^{(h)},\ a_{2s}^{(h)} \,.\,.\, a_{ms}^{(h)} \quad (s = 1, 2, \,.\,.\, \mu_h)$$

bezeichnet, so bestehen folgende Sätze:

1) Genügt ein System $a_1 \,.\,.\, a_m$ von ganzrationalen homogenen Functionen h^{ten} Grads der Variabeln $u\, v$ der Identität (7), so ist es eine lineare Combination der den obern Indices $0, 1, \,.\,.\, h-1, h$ entsprechenden Formensysteme (10), und zwar sind die Coefficienten dieser Linearcombination **ganze** rationale homogene Funktionen in u, v.

2) Es gilt die Gleichung:

$$\mu_h = (h+1)\, m - \varrho_{h+1} - 2\,\mu_{h-1} - 3\,\mu_{h-2} \,.\,.\,.\,.\, - (h+1)\,\mu_0.$$

Beide Behauptungen sind für $h = 0$ evident; wir wollen annehmen, dass sie für $h = 0, 1, \,.\,.\, l-1$ bewiesen seien, und zeigen, dass sie unter dieser Annahme auch für $h = l$ zutreffen.

13. Zu diesem Zwecke sestzen wir

$$a_i = a_i^{(0)}\, u^l + a_i^{(1)}\, u^{l-1}\, v + \,.\,.\, + a_i^{(l-1)}\, u\, v^{l-1} + a_i^{(l)}\, v^l$$

worin die $a_i^{(k)}$ Constante bedeuten, und drücken aus, dass die linke Seite von (7) für beliebige u, v, $y_1 \,.\,.\, y_n$ verschwindet.

Dadurch erhalten wir:

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum\limits_1^m{}^i\, a_i^{(0)}\, P_{ik} = 0 \\ \sum\limits_1^m{}^i\, (a_i^{(0)}\, Q_{ik} + a_i^{(1)}\, P_{ik}) = 0 \\ \sum\limits_1^m{}^i\, (a_i^{(1)}\, Q_{ik} + a_i^{(2)}\, P_{ik}) = 0 \quad (k = 1, 2, \,.\,.\,.\, n) \\ \quad \vdots \\ \sum\limits_1^m{}^i\, (a_i^{(l-1)}\, Q_{ik} + a_i^{(l)}\, P_{ik}) = 0 \\ \qquad\qquad \sum\limits_1^m{}^i\, a_i^{(l)}\, Q_{ik} = 0 \end{cases}$$

Es ist dies ein lineares homogenes Gleichungssystem mit den $(l+1)m$ Unbekannten

(12) $$a_1^{(0)}\ a_1^{(1)} \,.\,.\, a_1^{(l)},\ a_2^{(0)} \,.\,.\, a_2^{(l)} \,.\,.\, a_m^{(0)} \,.\,.\, a_m^{(l)},$$

und die Matrix dieses Gleichungssystemes ist B_{l+1}; also besitzen die Gleichungen (11) genau

$$q = (l+1)\,m - \varrho_{l+1}$$

linear unabhängige Lösungensysteme:

$$a_{1s}^{(0)} \,.\,.\, a_{1s}^{(l)}\ a_{2s}^{(0)} \,.\,.\, a_{2s}^{(l)} \,.\,.\, a_{ms}^{(0)} \,.\,.\, a_{ms}^{(l)}\ (s = 1, 2, \,.\,.\, q).$$

Wir multiplizieren nun das Formensystem (10) der Reihe nach mit den Produkten

$$u^{l-h};\ u^{l-h-1}\cdot v;\ \,.\,.\, u\cdot v^{l-h-1};\ v^{l-h}.$$

Indem wir diese Produkte für $h = 0, 1 \,.\,.\, l-1$ bilden, erhalten wir Formensysteme l^{ten} Grades, die alle der Identität (7) genügen, und deren Anzahl gleich:

(13) $$(l+1)\,\mu_0 + l\,\mu_1 + (l-1)\,\mu_2 + \,.\,.\, + 2\,\mu_{l-1}$$

ist. Diesen Formensystemen entsprechen ebensoviele Wertsysteme (12), die den Gleichungen (11) genügen, und diese Lösungensysteme, deren Inbegriff wir der bequemeren Ausdrucksweise halber mit L bezeichnen wollen, sind l i n e a r u n a b h ä n g i g. Andernfalls wäre nämlich eines der obigen Formensysteme l^{ten} Grads mittels constanter Coefficienten aus den übrigen linear zusammensetzbar; also wäre eines der Formensysteme

(14) $$a_{1s}^{(h)}\ a_{2s}^{(h)} \,.\,.\, a_{ms}^{(h)}$$
$$(s = 1, 2, \,.\,.\, \mu_h;\ h = 0, 1, \,.\,.\, l-1)$$

eine lineare Combination der andern, was der Definition dieser Formensysteme widerspricht.

Ausser den Lösungensystemen L, deren Anzahl durch (13) gegeben ist, besitzen nun die Gleichungen (11) noch ω weitere Auflösungen:

$$a_{1s}^{(0)} \,.\,.\, a_{1s}^{(l)},\ a_{2s}^{(0)} \,.\,.\, a_{2s}^{(l)} \,.\,.\,.\,.\, a_{ms}^{(0)} \,.\,.\, a_{ms}^{(l)}\ (s = 1, 2, \,.\,.\, \omega)$$

die mit den Systemen L zusammen q linear unabhängige Lösungensysteme darstellen; dabei ist gesetzt:

$$\omega = (l+1)\,m - \varrho_{l+1} - 2\,\mu_{l-1} - 3\,\mu_{l-2} - \ldots - (l+1)\,\mu_0.$$

Bilden wir jetzt die nachstehenden Formen l^{ten} Grads:

$$a^{(l)}_{is} = a^{(0)}_{is}\,u^l + a^{(1)}_{is}\,u^{l-1}\,v + \ldots + a^{(l)}_{is}\,v^l \quad (s = 1 \ldots \omega)$$

so verschwinden in der Matrix, die aus den ω Zeilen

(15) $$a^{(l)}_{1s}\;a^{(l)}_{2s}\ldots a^{(l)}_{ms} \quad (s = 1, 2 \ldots \omega)$$

und aus den $\mu_0 + \ldots + \mu_{l-1}$ Zeilen (14) besteht, nicht alle Determinanten der Ordnung

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{l-1} + \omega$$

für beliebige u, v. Andernfalls verschwänden nämlich diese Determinanten insbesondere auch für $u = 1$, $v = 0$. Dann gäbe es offenbar ein Constantensystem $\lambda^{(h)}_s$ von der Beschaffenheit, dass nicht alle Constanten $\lambda^{(l)}_1\;\lambda^{(l)}_2\ldots\lambda^{(l)}_\omega$ verschwänden, und dass die m Formen l^{ten} Grads:

$$\sum_1^{\omega}{}_s\,\lambda^{(l)}_s\,a^{(l)}_{is} + \sum_0^{l-1}{}_h\sum_1^{\mu_h}{}_s\,\lambda^{(h)}_s\,a^{(h)}_{is}\,u^{l-h} \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

durch v teilbar, also in der Form $v\,B_i$ darstellbar wären; die B_i wären dann Formen $l-1^{\text{ten}}$ Grads in $u\,v$, die der Identität

$$B_1\frac{\partial W}{\partial x_1} + \ldots + B_m\frac{\partial W}{\partial x_m} = 0$$

genügen. Da nun die Behauptung 1) des vor. Art. für den Fall $h = l-1$ bereits bewiesen sein sollte, so wäre das Formensystem $B_1\ldots B_m$ als lineare Combination mit ganz rationalen, in $u\,v$ homogenen Coefficienten aus dem Formensystem (14) zusammensetzbar; also wäre eines der ω Grössensysteme (15) in derselben Weise durch die übrigen Systeme (15) und die Systeme (14) darstellbar, was der Definition der Systeme (15) widerspricht.

Aus dieser Definition folgt ferner, dass jedes Formensystem $a_1\ldots a_m$ vom Grade l in den $u\,v$, das die Identität (7) befriedigt, sich als lineare Combination mit ganz rationalen Coefficienten in $u\,v$ aus den Formensystemen (14) (15) zusammensetzen lässt; also hat man $\omega = \mu_l$, und die beiden Behauptungen der Nr. 12 sind sonach auch für den Fall $h = l$ als richtig erkannt.

Man hat infolgedessen die Recursionsformeln

$$(16)\quad \begin{cases} \mu_0 = m - \varrho_1; \\ \mu_1 = 2m - \varrho_2 - 2\mu_0; \\ \mu_2 = 3m - \varrho_3 - 2\mu_1 - 3\mu_0; \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \mu_\tau = (\tau+1)m - \varrho_{\tau+1} - 2\mu_{\tau-1} - 3\mu_{\tau-2} - \ldots - (\tau+1)\mu_0 \\ \mu_{\tau+1} = 0,\ \mu_{\tau+2} = 0\ \ldots \end{cases}$$

und es lassen sich mittels dieser Formeln die ϱ_i durch die μ_i ausdrücken, und umgekehrt.

Genau ebenso erhält man natürlich auch die Gleichungen:

$$\nu_h = (h+1)\,m - \sigma_{h+1} - 2\,\nu_{h-1} - 3\,\nu_{h-2} - \ldots - (h+1)\,\nu_0$$
$$(h = 0, 1, \ldots \tau),$$

wenn σ_h den Rang der aus $(h+1)\,m$ Colonnen und $h\,n$ Zeilen bestehenden Matrix bedeutet, die aus dem Schema

$$(C_1)\qquad \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{m1} & Q_{11} & Q_{21} & \ldots & Q_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{mn} & Q_{1n} & Q_{2n} & \ldots & Q_{mn} \end{matrix} \right\|$$

genau ebenso gebildet wird, wie die Matrix B_h aus B_1.

§ III. Involutionssysteme erster Ordnung.

14. Es werde unter J ein beliebiges Differentialsystem erster Ordnung

$$(J)\qquad f_i(x, y, z_1, \ldots z_n, p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

mit n unbekannten Funktionen $z_1 \ldots z_n$ verstanden; dabei ist gesetzt:

$$p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x};\quad q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y}.$$

Wir dürfen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dass die Gleichungen J hinsichtlich der $2n$ Variabeln $p_i\, q_i$ unabhängig sind, also nach m derselben aufgelöst werden können; dann ist $m \leqq 2n$ und die Matrix B_1 des vorigen §, in der

$$(17) \qquad P_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial p_k}; \quad Q_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial q_k}$$

gesetzt wird, besitzt vermöge des gegebenen Gleichungssystems J den Rang

$$\varrho_1 = m,$$

d. h. es verschwinden vermöge J nicht alle m reihigen Determinanten.

Wir nehmen jetzt an, dass die canonische Form des Systems J passiv sei, und wollen untersuchen, welche Bedingungen sich hieraus für die unaufgelöste Form des Systems J ableiten lassen.

15. Die Matrix A des vorigen §, in der die $P_{ik}\, Q_{ik}$ wieder durch (17) definiert seien, besitze den Rang τ, d. h. also es mögen in A alle $\tau + 1$-reihigen, aber nicht alle τ-reihigen Determinanten für beliebige u, v vermöge der Gleichungen J verschwinden; wir bezeichnen A als die charakteristische Matrix des Differentialsystems J. Ferner möge die canonische Auflösung K dieses Differentialsystems aus Gleichungen der Form:

$$(K) \qquad \begin{aligned} &p_a = \varphi_a\,(x, y, z_1 \ldots z_n, q_a, p_b, q_b, p_{b'}, q_{b'}, \ldots) \\ &q_c = \psi_c\,(x, y, z_1 \ldots z_n, p_d, q_d, p_{d'}, q_{d'}, \ldots) \\ &(b, b' \ldots > a;\ d, d' \ldots > c) \end{aligned}$$

bestehen, und es sei σ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen c, die auch unter den Zahlen a vorkommen, m. a. W.: Die Anzahl der Unbekannten z_a, deren erste Ableitungen p_a, q_a alle beide auf den linken Seiten des canonischen Systems K auftreten.

Indem wir jede der Gleichungen K je einmal nach x und y deriviren, und die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}$$

bezw. mit r_i, s_i, t_i bezeichnen, erhalten wir $2m$ Gleichungen K' der zweiten Ordnung, und unter ihnen befinden sich σ Paare der Eigenschaft, dass die linken Seiten der beiden Relationen eines Paares die gleiche Ableitung s_a enthalten. Eliminirt man aus den rechten Seiten eines solchen Gleichungenpaars die etwaigen principalen Ableitungen 2. O. mit Hülfe der übrigen Gleichungen K', so müssen, falls K passiv sein soll, die genannten rechten Seiten identisch verschwinden, m. a. W.: Betrachtet man K' als ein System linearer Gleichungen in den $3n$ Unbekannten $r_i\, s_i\, t_i$, so reduciren sie sich vermöge K auf genau $2m - \sigma$ linear unabhängige Gleichungen (vgl. Nr. 10).

Da nun K die Auflösung von J ist, so gilt die letztere Thatsache auch von dem linearen Gleichungensystem, das aus J durch je einmalige Derivation nach x und y entsteht:

$$(18) \quad \begin{cases} M_i + \sum_1^n{}^k P_{ik}\, r_k + \sum_1^n{}^k Q_{ik}\, s_k = 0 \\ N_i + \sum_1^n{}^k P_{ik}\, s_k + \sum_1^n{}^k Q_{ik}\, t_k = 0 \end{cases} \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

$$\left(M_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial f_i}{\partial z_k} p_k; \quad N_i = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \Sigma \frac{\partial f_i}{\partial z_k} q_k\right);$$

es muss also der Rang der Matrix:

$$(B) \quad \begin{Vmatrix} M_1 & P_{11} & .. & P_{1n} & Q_{11} & .. & Q_{1n} & 0 & .. & 0 \\ . & . & & . & . & & . & . & & . \\ M_m & P_{m1} & .. & P_{mn} & Q_{m1} & .. & Q_{mn} & 0 & .. & 0 \\ N_1 & 0 & .. & 0 & P_{11} & .. & P_{1n} & Q_{11} & .. & Q_{1n} \\ . & . & & . & . & & . & . & & . \\ N_m & 0 & .. & 0 & P_{m1} & .. & P_{mn} & Q_{m1} & .. & Q_{mn} \end{Vmatrix}$$

vermöge der Relationen J gleich $2m - \sigma$ sein, d. h. es müssen in B alle $2m - \sigma + 1$-reihigen, nicht aber alle $2m - \sigma$-reihigen Determinanten vermöge J verschwinden. Offenbar muss jetzt auch die im vorigen § definirte Matrix B_2, die aus

B durch Streichung der ersten Spalte entsteht, vermöge J den Rang $2m - \sigma$ besitzen. Denn wäre dieser Rang kleiner, so ergäbe sich aus den Gleichungen (18) eine von den $r_i\ s_i\ t_i$ freie Relation, die keine Consequenz von J wäre.

Genau ebenso erkennt man allgemein: Betrachtet man die hm Gleichungen h^{ter} Ordnung, die sich durch $h-1$-malige Derivation nach x und y aus dem System K ergeben, als ein System linearer Gleichungen mit den $(h+1)n$ Unbekannten:

$$z^i_{h-a,\,a} \quad (i = 1, \ldots n;\ a = 0, 1 \ldots h),\ ^1)$$

so müssen sie sich, falls K passiv sein soll, vermöge K und der derivirten Gleichungen bis zur $h-1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich, auf genau

$$hm - (h-1)\,\sigma$$

linear unabhängige Gleichungen reduciren. Letzteres gilt dann offenbar auch von den hm Derivirten h^{ter} Ordnung des Systems J:

$$(19) \qquad M^h_{ia} + \sum_1^n{}^k P_{ik}\, z^k_{h-a,a} + \sum_1^n{}^k Q_{ik}\, z^k_{h-a-1,a+1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots m;\ a = 0, 1 \ldots h-1),$$

worin die M^h_{ia} gewisse Funktionen von $x, y, z_1 \ldots z_n$ und von den Ableitungen der z_i bis zur $h-1^{\text{ten}}$ Ordnung bedeuten. Die Matrix dieses Gleichungssystems muss also vermöge J und der Derivirten bis zur $h-1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich den Rang $hm - (h-1)\,\sigma$ besitzen. Diese Matrix besteht aus hm Zeilen und $(h+1)\,n+1$ Spalten, und wird aus der im vorigen § definirten Matrix B_h erhalten, wenn man die hm Elemente

$$M^h_{10} \ldots M^h_{m0},\ M^h_{11} \ldots M^h_{m1} \ldots M^h_{1,h-1} \ldots M^h_{m,h-1}$$

als neue Colonne hinzufügt. Der Rang, den die Matrix vermöge der Gleichungen J besitzt, kann nicht kleiner als $hm - (h-1)\,\sigma$ sein, da andernfalls aus den Relationen (19) eine Gleichung folgen würde, die die Ableitungen der z_i nur

---

$^1)$ $z^i_{h-a,a} = \dfrac{\partial^h z_i}{\partial x^{h-a}\,\partial y^a}$

bis zur $h - 1^{\text{ten}}$ Ordnung enthielte, und doch keine Folge des Systems J und seiner Derivirten bis zur $h - 1^{\text{ten}}$ Ordnung wäre, was mit der Passivität von K in Widerspruch stände. Die im vorigen § definirten Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots\ldots$ haben daher bezw. die Werte:

$$m,\ 2m - \sigma,\ 3m - 2\sigma,\ 4m - 3\sigma \ldots$$

und aus dem Formelsystem (16) der Nr. 13 schliessen wir jetzt:

$$\mu_0 = 0;\ \mu_1 = \sigma;\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = 0, \ldots\ldots\ \mu_r = 0.$$

Da aber nach Art. 12 andererseits:

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_r = m - \tau,$$

so folgt:

$$\sigma = m - \tau.$$

Als eine notwendige Bedingung für die Passivität der canonischen Auflösung von J haben wir demnach die erhalten, dass die Matrix B vermöge J den Rang

$$2m - \sigma = m + \tau$$

besitze, wenn unter τ der Rang der charakteristischen Matrix verstanden wird.

16. Ein Differentialsystem J, das die eben genannte Bedingung erfüllt, soll fortan ein **Involutionssystem** erster Ordnung heissen. Durch eine Transformation der unabhängigen Variabeln gelingt es nun in allen Fällen, das gegebene Involutionssystem J auf eine besonders einfache Normalform zu reduciren.

Es seien wieder τ und $m + \tau$ die Rangzahlen, die den beiden Matrices A und B vermöge der gegebenen Gleichungen J zukommen. Wir können dann die Gleichungen J und die Unbekannten z_i von vorneherein so numeriren, dass insbesondere die Determinante:

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} u P_{11} + v Q_{11} & \ldots & u P_{1\tau} + v Q_{1\tau} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ u P_{\tau 1} + v Q_{\tau 1} & \ldots & u P_{\tau\tau} + v Q_{\tau\tau} \end{vmatrix}$$

vermöge J nicht für jedes beliebige Wertsystem u, v Null ist. Es seien α, β und γ, δ zwei Constantensysteme, die dieser Bedingung genügen und deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht Null ist. Führen wir dann mittels der Formeln:

$$(21) \qquad x' = \alpha x + \beta y; \; y' = \gamma x + \delta y$$

die neuen Independenten x', y' ein, und schreiben wir:

$$p_i' = \frac{\partial z_i}{\partial x'}; \quad q_i' = \frac{\partial z_i}{\partial y'}; \quad r_i' = \frac{\partial^2 z_i}{\partial x'^2} \text{ etc.}$$

so hat man:

$$(22) \qquad \begin{aligned} p_i &= \alpha p_i' + \gamma q_i'; \; q_i = \beta p_i' + \delta q_i', \\ r_i &= \alpha^2 r_i' + 2\alpha\gamma s_i' + \gamma^2 t_i' \text{ etc.} \end{aligned}$$

Verwandelt sich vermöge der Transformation (21) (22) die Funktion f_i in:

$$f_i'(x'\, y'\, z_1 \ldots z_n\, p_1' \ldots q_n')$$

so hat man:

$$(23) \qquad P_{ik}' = \frac{\partial f_i'}{\partial p_k'} = \alpha P_{ik} + \beta Q_{ik}; \; Q_{ik}' = \gamma P_{ik} + \delta Q_{ik}.$$

$$M_i = \alpha M_i' + \gamma N_i'; \; N_i = \beta M_i' + \delta N_i'\,{}^{1)}.$$

Bezeichnet man ferner mit A_i, B_i die linken Seiten der beiden ersten Derivirten der Gleichung $f_i = 0$, mit A_i' B_i' die linken Seiten der ersten Derivirten von

$$(J') \qquad f_i' = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

so folgt leicht:

$$A_i \equiv \alpha A_i' + \gamma B_i'; \; B_i = \beta A_i' + \delta B_i'.$$

Da sich nun unter den $2m$ Gleichungen $A_i = 0$, $B_i = 0$ genau $m + \tau$ linear unabhängige befinden, so gilt dasselbe von den Gleichungen $A_i' = 0$, $B_i' = 0$, d. h. die Matrix B', die der Matrix B analog aus den Elementen M_i', N_i', P_{ik}', Q_{ik}' gebildet wird, besitzt vermöge der Gleichungen J' wieder den Rang $m + \tau$.

---

1) $M_i' \equiv \dfrac{\partial f_i'}{\partial x'} + \Sigma \dfrac{\partial f_i'}{\partial z_k} p_k'$ etc.

Ebenso erkennt man ohne weiteres, dass der Rang der zu J' gehörigen charakteristischen Matrix ebenfalls τ ist.

Das transformirte System J' ist also ein Involutionssystem und hat überdies die Eigenschaft, dass die beiden Determinanten

$$|P'_{ik}| \quad |Q'_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, .. \tau)$$

vermöge J' nicht verschwinden. Wir dürfen daher, indem wir die Accente jetzt wieder weglassen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit von vorneherein annehmen, dass die beiden Determinanten

$$(24) \qquad |P_{ik}| \quad |Q_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, .. \tau)$$

vermöge des gegebenen Differentialsystems J nicht Null sind. Dann verschwinden in der Matrix:

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & .. & P_{1\tau} & Q_{11} & Q_{12} & .. & Q_{1\tau} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ P_{m1} & P_{m2} & .. & P_{m\tau} & Q_{m1} & Q_{m2} & .. & Q_{m\tau} \end{matrix} \right\|$$

vermöge J nicht alle m-reihigen Determinanten. Um dies zu zeigen, bemerken wir vorab, dass:

$$2\tau \geq m;\text{[1]} \quad \tau \leq m.$$

Ist $\tau = m$, so ist unsere Behauptung evident. Ist aber $\tau < m$, und nehmen wir an, dass in dem Schema D alle m-reihigen Determinanten vermöge J Null sind, so verschwinden in der Matrix D', die aus D durch Hinzufügung der Colonne

$$P_{1, \tau+1}, \; P_{2, \tau+1} \,..\, P_{m, \tau+1}$$

entsteht, alle diejenigen m-reihigen Determinanten, welche die erste der Determinanten (24) als Unterdeterminante enthalten. In der That ist ja jede Determinante, die mehr als τ Colonnen der Form $P_{1s} .. P_{ms}$ enthält, vermöge J Null; der Rang von D' ist also vermöge J nach einem bekannten Determinantensatz

[1]) Denn unter der Annahme $\tau < \frac{m}{2}$ verschwinden in der Matrix B_1 des vorigen § alle m-reihigen Determinanten.

$< m$. Aus analogen Gründen gilt nunmehr dasselbe von der Matrix D'', die aus D' durch Hinzufügung einer Colonne

$$Q_{1,\tau+1},\; Q_{2,\tau+1}, \ldots \; Q_{m,\tau+1}$$

hervorgeht etc. Durch Wiederholung dieser Schlussweise gelangt man zu dem Resultat, dass in der Matrix B_1 des vorigen § alle m-reihigen Determinanten vermöge J Null sind, was unsern Annahmen widerspricht.

17. Unter den nichtverschwindenden Determinanten von D befindet sich mindestens eine, welche die τ ersten Colonnen enthält; darnach kann das System J nach $p_1 \ldots p_\tau$ und nach σ von den Variabeln $q_1 \ldots q_\tau$ [1]) aufgelöst werden, und wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das System J auf die **Normalform:**

$$(\mathrm{N})\quad \left\{\begin{array}{l} p_1 = \varphi_1(x, y, z_1 \ldots z_n,\; p_{\tau+1} \ldots p_n,\; q_{\sigma+1} \ldots q_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_\tau = \varphi_\tau(x, y, z_1 \ldots z_n,\; p_{\tau+1} \ldots p_n,\; q_{\sigma+1} \ldots q_n) \\ q_1 = \psi_1(x, y, z_1 \ldots z_n,\; q_{\sigma+1} \ldots q_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_\sigma = \psi_\sigma(x, y, z_1 \ldots z_n,\; q_{\sigma+1} \ldots q_n) \end{array}\right.$$

gebracht werden kann. Wir bemerken ausdrücklich, dass die ψ_i keine der Grössen $p_{\tau+1} \ldots p_n$ enthalten können, da andernfalls die Gleichungen J nach $\tau + 1$ von den Variabeln $p_1 \ldots p_n$ auflösbar wären, was wegen des Verschwindens aller $\tau + 1$-reihigen Determinanten der Matrix $\| P_{ik} \|$ nicht der Fall ist.

18. Zwischen den $2m$ Derivirten zweiter Ordnung der Gleichungen N bestehen nun, wenn sie als lineare Gleichungen in den Variabeln $r_i\; s_i\; t_i$ betrachtet werden, genau σ verschiedene lineare Identitäten. Derivirt man nun die ersten τ Gleichungen N nach y und die letzten σ Gleichungen nach x, so erhält man:

$$(25)\quad s_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\alpha} q_\alpha + \sum_{\tau+1}^n{}_\beta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_\beta} s_\beta + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\beta} t_\beta\right) + \sum_{\sigma+1}^{\tau} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\gamma} t_\gamma;$$

---

[1]) Wegen $2\tau \geq m$; $\sigma = m - \tau$ ist $\sigma < \tau$.

$$
(26) \quad s_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \psi_k}{\partial z_\alpha} p_\alpha + \sum_{\tau+1}^{n}{}^{\beta} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_\beta} s_\beta + \sum_{\sigma+1}^{\tau}{}^{\gamma} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_\gamma} s_\gamma ,
$$

$$
(i = 1 \,..\, \tau;\ k = 1 \,...\, \sigma)
$$

und die vorhin genannten σ linearen Identitäten bestehen offenbar darin, dass die Gleichungen (26) bezw. mit den σ ersten Gleichungen (25) identisch werden, wenn man vorher auf den rechten Seiten von (26) die Grössen $s_{\sigma+1} \,..\, s_\tau$ durch ihre Werte aus den letzten $\tau - \sigma$ Gleichungen (25) ersetzt hat. Man erhält so die nachstehenden Beziehungen:

$$
(27) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \psi_i}{\partial z_\alpha} p_\alpha + \sum_{\sigma+1}^{\tau}{}^{\gamma} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\gamma} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z_\alpha} q_\alpha \right) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\alpha} q_\alpha \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} + \sum_{\sigma+1}^{\tau}{}^{\gamma} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\gamma} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial p_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} ; \\
&\qquad\qquad \sum_{\sigma+1}^{\tau}{}^{\gamma} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\gamma} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial q_l} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} ;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(i = 1, 2, \,..\, \sigma;\ k = \tau + 1 \,..\, n;\ l = \sigma + 1 \,..\, n).
$$

Diese Beziehungen werden von den Funktionen φ, ψ identisch erfüllt; in den Relationen der ersten Zeile sind die Grössen $p_1 \,..\, p_\tau\ q_1 \,..\, q_\sigma$ durch ihre Werte φ, ψ zu ersetzen.

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das Differentialsystem J offenbar ein Involutionssystem, d. h. der Rang der charakteristischen Matrix ist τ, und derjenige der Matrix B ist gleich $m + \tau$.

19. Das Differentialsystem N ist nicht canonisch; es besitzt aber vermöge der Bedingungen (27) die charakteristische Eigenschaft der passiven Systeme. Vermöge des Systems N und seiner Derivirten kann man nämlich alle (principalen) Ableitungen

$$
\frac{\partial^{\alpha+\beta} z_i}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} z_k}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta} \quad (i = 1, \,..\, \sigma;\ k = \sigma + 1 \,..\, \tau;\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots)
$$

durch x, y, $z_1 \,..\, z_n$ und die parametrischen Ableitungen:

$$\frac{\partial^\gamma z_k}{\partial y^\gamma}, \quad \frac{\partial^{\gamma+\delta} z_l}{\partial x^\gamma \partial y^\delta} \quad (\gamma, \delta = 0, 1 \ldots; \; k = \sigma + 1 \ldots \tau; \; l = \tau + 1 \ldots n)$$

ausdrücken, und es ergeben sich aus den Derivirten des Systems N keine Relationen zwischen den parametrischen Grössen allein.

Das System N gehört sonach dem von C. Bourlet (a. a. O.) studirten Typus „unbeschränkt integrabler" Differentialsysteme an, und es gilt daher hinsichtlich der Existenz der Integrale von N folgender Satz:

Es seien

$$\omega_{\tau+1}(x, y), \; \omega_{\tau+2}(x, y) \ldots \omega_n(x, y)$$

beliebige, an der Stelle x^0, y^0 reguläre Funktionen der Variabeln x, y, ferner:

$$\chi_{\sigma+1}(y), \; \chi_{\sigma+2}(y) \ldots \chi_\tau(y)$$

beliebige, an der Stelle y^0 reguläre Funktionen von y, und $z_1^0 \ldots z_\sigma^0$ beliebige Constante. Setzt man dann

$$z_\gamma^0 = \omega_\gamma^0; \; p_\gamma^0 = \frac{\partial \omega_\gamma^0}{\partial x^0}; \; q_\gamma^0 = \frac{\partial \omega_\gamma^0}{\partial y^0} \quad (\gamma = \tau + 1 \ldots n);$$

$$z_\beta^0 = \chi_\beta^0; \; q_\beta^0 = \frac{\partial \chi_\beta^0}{\partial y^0} \quad (\beta = \sigma + 1 \ldots \tau),$$

und sind sämtliche Funktionen φ, ψ an der Stelle

$$x^0 \, y^0 \, z_1^0 \ldots z_n^0, \; p_{\tau+1}^0 \ldots p_n^0, \; q_{\sigma+1}^0 \ldots q_n^0$$

regulär, so besitzt das Differentialsystem N ein und nur ein System von Integralfunktionen $z_1 \ldots z_n$ mit folgenden Eigenschaften:

1) alle z_i sind an der Stelle $x^0 \, y^0$ regulär;

2) die $z_{\tau+1} \ldots z_n$ sind mit den willkürlichen Funktionen $\omega_{\tau+1} \ldots \omega_n$ identisch.

3) die Funktionen $z_{\sigma+1} \ldots z_\tau$ reduciren sich vermöge $x = x^0$ auf die Funktionen $\chi_{\sigma+1} \ldots \chi_\tau$ resp.

4) die Funktionen $z_1 \ldots z_\sigma$ nehmen an der Stelle $x^0 \, y^0$ bez. die Werte $z_1^0 \ldots z_\sigma^0$ an.

20. Besonders einfach ist der Fall $\sigma = \tau$. Die Gleichungen (27) lehren dann, dass die Funktionen φ_i die Variabeln q nicht enthalten. Ferner hat man vermöge (27):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \quad (k = \tau + 1, .. n).$$

Darnach sind die φ_i lineare Funktionen von $p_{\tau+1} .. p_n$, und die ψ_i lineare Funktionen von $q_{\tau+1} .. q_n$, d. h. das System N hat die Gestalt:

$$\text{(28)} \quad \left\{ \begin{aligned} p_i &= \pi_i (x\, y\, z_1 .. z_n) + \sum_{\tau+1}^{n} a_{ih}\, p_h \\ q_i &= \varkappa_i (x\, y\, z_1 .. z_n) + \sum_{\tau+1}^{n} a_{ih}\, q_h \end{aligned} \right. \quad \begin{gathered} (a_{ih} \text{ Funktionen von} \\ x\, y\, z_1 .. z_n;\ i = 1 \ldots \tau) \end{gathered}$$

und die Relationen (27) lehren, dass die totalen Differentialgleichungen

$$\text{(29)} \qquad d z_i = \pi_i\, dx + \varkappa_i\, dy + \sum_{\tau+1}^{n} a_{ih}\, d z_h \quad (i = 1, 2, .. \tau)$$

unbeschränkt integrabel sind. Man erhält also das allgemeinste System von Integralfunktionen $z_1 .. z_n$ des Differentialsystems (28), indem man $z_{\tau+1} .. z_n$ beliebig wählt, und sodann die $z_1 .. z_\tau$ aus den allgemeinen Integralgleichungen

$$\Omega_i (x\, y\, z_1 .. z_n) = \Omega_i (x^0\, y^0\, z_1^0 .. z_n^0) \quad (i = 1, 2, .. \tau)$$

des unbeschränkt integrabeln Systems (29) berechnet.

21. Ersetzt man in den Gleichungen N die Grössen $z_{\tau+1} .. z_n$ durch irgend welche Funktionen der Variabeln x, y, so bildet das so entstehende Differentialsystem N' mit den τ Unbekannten $z_1 .. z_\tau$ wieder ein Involutionssystem.

In der That, die zu N' gehörige charakteristische Matrix entsteht aus A durch Weglassung der letzten τ Colonnen. Ferner erhält man die Matrix B', die zu N' in derselben Beziehung steht wie B zu N, indem man in B die $\tau + 2^{\text{te}}$, $\tau + 3^{\text{te}} \ldots . n + 1^{\text{te}}$ Colonne bez. mit $\frac{\partial z_{\tau+1}}{\partial x}, .. \frac{\partial z_n}{\partial x}$, ferner die letzten $n - \tau$ Colonnen von B bezw. mit $\frac{\partial z_{\tau+1}}{\partial y} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial y}$ multiplicirt und zu der ersten addirt, schliesslich die soeben erwähnten $2n - 2\tau$ Colonnen fortlässt. Also ist der Rang von B' höchstens gleich $m + \tau$. Er kann aber auch nicht kleiner sein, denn unter den $m + \tau$-reihigen Determinanten von B' befinden sich alle Produkte aus je einer m-reihigen Determinante von D (s. Nr. 16) in eine der beiden Determinanten (24).

§ IV. Die Elementarteiler der charakteristischen Matrix.

22. Nach der Schlussbemerkung des vorigen § können wir uns in der Theorie der Involutionssysteme erster Ordnung auf die Annahme beschränken, dass der Rang der charakteristischen Matrix der Anzahl n der unbekannten Funktionen gleich ist. In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich, allerdings unter specieller Annahme über die Beschaffenheit der Elementarteiler der charakteristischen Matrix, die Theorie dieser Art von Involutionssystemen ausführlich entwickelt. In diesem § soll nun dargelegt werden, welcher Zusammenhang zwischen den sogenannten Charakteristiken des betrachteten Involutionssystems und den Elementarteilern jener Matrix stattfindet, wenn die letzteren keinen beschränkenden Bedingungen unterliegen.

23. Unter der Voraussetzung $\tau = n$ hat man $m \geqq n$; wir können daher setzen

$$m = n + p \quad (p \geqq 0).$$

Die Gleichung (18) des § II wird hier:

$$n - p = \Sigma\Sigma\, e_{\alpha\beta}$$

m. a. W. die n-reihigen Determinanten der charakteristischen Matrix:

(A′) $\qquad \| Q_{ik} - w P_{ik} \| \quad (i = 1, \ldots n + p;\ k = 1 \ldots n)$

besitzen vermöge des gegebenen Involutionssystems

[1]) Grundzüge einer Integrationstheorie etc., Journal f. Mathem. Bd. 118, p. 123—157.

$$(J) \qquad f_i(x, y, z_1 \ldots z_n, p_1 \ldots q_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots n + p)$$

ein ganzrationales Polynom $n - p^{\text{ten}}$ Grads in w als grössten gemeinschaftlichen Divisor. Dieser Satz, den ich in der citirten Arbeit durch ziemlich weitläufige Determinantenrechnungen bewiesen habe, erweist sich sonach als eine einfache Consequenz der Theorie der Bilinearformen.

Es sei w_ν einer der $\varkappa$ verschiedenen Werte von w, für die alle n-reihigen Determinanten der Matrix A' verschwinden, ferner $e_{1\nu}, e_{2\nu}, \ldots$ die Exponenten der zugehörigen Elementarteiler; ϱ_ν derselben (und zwar natürlich die ϱ_ν ersten) seien von Null verschieden. Die Zahl

$$e_{1\nu} + e_{2\nu} + \ldots + e_{\varrho_\nu, \nu}$$

bezeichnet dann die Vielfachheit, mit der der Faktor $w - w_\nu$ in allen n-reihigen Determinanten von A' auftritt, und es verschwinden in A' vermöge des gegebenen Gleichungssystems J alle $n - \varrho_\nu + 1$-reihigen, nicht aber alle $n - \varrho_\nu$-reihigen Determinanten für $w = w_\nu$ identisch. Die w_ν sind Funktionen der Variabeln $x\, y\, z_1 \ldots z_n$ und von $n - p$ unter den Variabeln $p_i\, q_i$, die vermöge J willkürlich bleiben.

24. Dies vorausgeschickt, fragen wir nun nach den Bedingungen dafür, dass die Relationen:

$$(30) \qquad d\,p_i = r_i\,dx + s_i\,dy; \quad d\,q_i = s_i\,dx + t_i\,dy$$

zusammen mit den ersten Derivirten des Systems J:

$$(31) \quad \begin{cases} A_i \equiv M_i + \sum_1^n {}^k (P_{ik}\, r_k + Q_{ik}\, s_k) = 0 \\ \\ B_i \equiv N_i + \sum_1^n {}^k (P_{ik}\, s_k + Q_{ik}\, t_k) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1 \ldots n + p)$$

die Grössen r_i, s_i, t_i nicht bestimmen.

Indem wir die $r_i\, s_i$ mittels (30) berechnen und in (31) einsetzen, erhalten wir die Relationen:

$$(32)\qquad M_i + \sum_1^n{}_k P_{ik}\left(\frac{dp_k}{dx} - \frac{dq_k}{dx}\frac{dy}{dx}\right) + \sum_1^n{}_k Q_{ik}\frac{dq_k}{dx} - \\ - \frac{dy}{dx}\sum_1^n{}_k t_k\left(Q_{ik} - P_{ik}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$(33)\quad N_i + \sum_1^n{}_k P_{ik}\frac{dq_k}{dx} + \sum_1^n{}_k t_k\left(Q_{ik} - P_{ik}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \, (i = 1, \ldots n+p)$$

Damit diese Gleichungen die Grössen $t_1 \ldots t_n$ unbestimmt lassen, ist zunächst notwendig, dass

$$(34)\qquad dy = w_\nu\, dx,$$

wo w_ν eine der oben definirten $\varkappa$ Funktionen bedeutet.

Substituirt man diesen Wert von dy in (32) (33), multiplicirt man ferner die Gleichung (33) mit w_ν und addirt sie zu (32), so entstehen Relationen, die unter Hinzunahme der Gleichungen

$$(35)\qquad dz_i = (p_i + w_\nu\, q_i)\, dx \qquad (i = 1 \ldots n)$$

folgende Form annehmen;

$$(36)\qquad df_1 = 0,\ df_2 = 0, \ldots \quad df_{n+p} = 0;$$

das Differentiationssymbol df_i bezieht sich dabei auf alle $3n + 2$ Variabeln $x, y, \ldots q_n$.

Die n linearen Gleichungen mit den Unbekannten $\mu_1 \ldots \mu_{n+p}$:

$$(37)\quad \mu_1(Q_{1k} - w_\nu P_{1k}) + \ldots + \mu_{n+p}(Q_{n+p,k} - w_\nu P_{n+p,k}) = 0 \, (k = 1..n)$$

besitzen nach dem Obigen $\varrho_\nu + p$ linear unabhängige Lösungensysteme

$$(38)\qquad \mu_1^{(s)} \ldots \mu_{n+p}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots \varrho_\nu + p).$$

Indem man die Gleichungen (33) bezw. mit $\mu_i^{(s)}$ multiplicirt und nach i summirt, erhält man die noch übrigen der Bedingungen, die ausdrücken, dass die Relationen (32) (33) die t_k unbestimmt lassen. Nun gibt es aber, da der Annahme nach $2n + p$ der Rang der Matrix B_2 (§ II) ist, genau p linear unabhhängige Funktionensysteme

$$\alpha_1^{(s)} \ldots \alpha_{n+p}^{(s)},\ \beta_1^{(s)} \ldots \beta_{n+p}^{(s)} \qquad (s = 1, 2 \ldots p)$$

die vermöge J den Gleichungen

$$(39)\qquad \left.\begin{aligned} \sum_1^{n+p}{}_i\, \alpha_i^{(s)} P_{ik} &= 0 \\ \sum_1^{n+p}{}_i\, (\alpha_i^{(s)} Q_{ik} + \beta_i^{(s)} P_{ik}) &= 0 \\ \sum_1^{n+p}{}_i\, \beta_i^{(s)} Q_{ik} &= 0 \end{aligned}\right\} (k=1,..n)$$

genügen. Daraus folgt, dass die Funktionensysteme

$$(40)\qquad \beta_1^{(s)} - w_\nu\, \alpha_1^{(s)} .. \quad \beta_{n+p}^{(s)} - w_\nu\, \alpha_{n+p}^{(s)} \, (s = 1, 2, .. p)$$

Lösungensysteme der linearen Gleichungen (37) darstellen. Diese p Lösungensysteme sind linear unabhängig; denn andernfalls beständen Beziehungen der Form

$$\sum_1^p \lambda_s\, \beta_i^{(s)} \equiv w_\nu \sum_1^p \lambda_s\, \alpha_i^{(s)};$$

setzt man also

$$\sigma_i \equiv \sum \lambda_s\, \alpha_i^{(s)}$$

so erhielte man mit Rücksicht auf (39):

$$\sum_1^{n+p} \sigma_i P_{ik} \equiv 0, \quad \sum_1^{n+p} \sigma_i Q_{ik} = 0 \quad (k = 1 .. n)$$

was nicht möglich ist, da der Annahme nach $n + p$ der Rang der Matrix B_1 (§ II) ist, und die σ_i nicht alle identisch verschwinden können. Ausser den Systemen (40) besitzen also die linearen Gleichungen (37) noch ϱ_ν weitere Lösungensysteme, die wir mit den ϱ_ν ersten Funktionensystemen (38) identificieren. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (30) (31) die $r_i\ s_i\ t_i$ nicht bestimmen, schreiben sich daher schliesslich, unter Hinzunahme der Gleichungen (35), folgendermassen;

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} & dy = w_\nu\, dx;\ dz_i = p_i\, dx + q_i\, dy\ (i = 1 .. n), \\ & \qquad df_1 = 0,\ df_2 = 0, ..\ \ df_{n+p} = 0; \\ & \sum_1^n{}_k \left(\sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i^{(s)} P_{ik}\right) dq_k + \sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i^{(s)} N_i\, dx = 0\ \ (s=1,2,..\varrho_\nu), \end{aligned}\right.$$

und man erkennt leicht, dass diese Pfaff'schen Gleichungen hinsichtlich der Differentiale dx, dy, dz_i, dp_i, dq_i linear unabhängig sind. Die Funktionen $\mu_i^{(s)}$ sind natürlich von der Wahl der Wurzel w_ν abhängig.

Den Wurzeln $w_1 \,.\,.\, w_\varkappa$ entsprechend erhält man sonach $\varkappa$ verschiedene Systeme Pfaff'scher Gleichungen, die ich im Anschluss an meine oben citirte Abhandlung die dem gegebenen Involutionssystem J beigeordneten Pfaff'schen Systeme erster Stufe nennen will.

Bezeichnet man, in Verallgemeinerung einer bekannten von Lie herrührenden Ausdrucksweise, ein Wertsystem

$$x\,y\,z_1 \,.\,.\, z_n\,p_1\,q_1 \,.\, p_n\,q_n$$

als ein Flächenelement erster Ordnung, ferner jede Schaar von ∞^1 Flächenelemente 1. O., die den totalen Differentialgleichungen

$$dz_i = p_i\,dx + q_i\,dy \qquad (i = 1 \,.\,.\, n) \tag{42}$$

genügt, als einen Streifen erster Ordnung, so kann man einen Streifen 1. O., der einem der Pfaff'schen Systeme (56) genügt, als einen charakteristischen Streifen oder eine Charakteristik 1. O. des gegebenen Involutionssystems bezeichnen. Es gibt also $\varkappa$ verschiedene Systeme charakteristischer Streifen, und man erkennt leicht, dass jedes Integral von J, d. h. jedes System von ∞^2 Flächenelementen 1. O., das dem System J und den totalen Differentialgleichungen (42) genügt, von je ∞^1 charakteristischen Streifen eines jeden der $\varkappa$ verschiedenen Systeme erzeugt wird.

25. In ganz analoger Weise lassen sich $\varkappa$ Charakteristikensysteme jeder beliebigen Ordnung h (> 1) definiren. Man hat zu diesem Zwecke auszudrücken, dass die Relationen:

$$dz_{\alpha\beta}^{(i)} = z_{\alpha+1,\beta}^{(i)}\,dx + z_{\alpha,\beta+1}^{(i)}\,dy \quad (\alpha + \beta = h,\ \alpha = 0, 1, \,.\,.\, h)$$

zusammen mit den Derivirten $h + 1^{\text{ter}}$ Ordnung des gegebenen Involutionssystems die Ableitungen $h + 1^{\text{ter}}$ Ordnung nicht bestimmen. Man erhält solcher Weise $\varkappa$ verschiedene „beigeordnete Pfaff'sche Systeme h^{ter} Stufe"; das einzelne dieser Systeme besteht aus den Relationen

$$dy = w_\nu\, dx;\; dz^i_{\alpha\beta} = z^i_{\alpha+1,\beta}\, dx + z^i_{\alpha,\beta+1}\, dy$$
$$(i = 1\,..\,n;\; \alpha + \beta \leqq h - 1)$$

ferner aus den Gleichungen, die durch totale Differentiation der Gleichungen J und ihrer Derivirten bis zur h^{ten} Ordnung einschliesslich entstehen, und aus ϱ_ν weiteren Pfaff'schen Gleichungen in den Variabeln

$$x, y, z_1\,..\,z_n,\,..\,z^i_{\alpha,\beta} \quad (\alpha + \beta \leqq h). \tag{43}$$

Als „charakteristischen Streifen h^{ter} Ordnung" bezeichnet man dann jede Schar von ∞^1 Wertsysteme (43), die eines der beigeordneten Pfaff'schen Systeme h^{ter} Stufe, und alle Derivirten von J bis zur h^{ten} Ordnung befriedigt.

26. Wenn das vorgelegte Involutionssystem J hinsichtlich der $2n$ Variabeln p_i, q_i linear ist, lassen sich auch $\varkappa$ verschiedene beigeordnete Pfaff'sche Systeme „nullter Stufe" definiren, indem man ausdrückt, dass die Gleichungen (42) zusammen mit den Relationen J die $2n$ Variabeln $p_i\, q_i$ nicht bestimmen.[1])

27. Auf die Integrationstheorien, die mit dem Begriff der beigeordneten Pfaff'schen Systeme in Zusammenhang stehen und die ich a. a. O. unter der speciellen Voraussetzung $\varkappa = n - p$ ausführlich entwickelt habe, soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Wir wollen hier nur noch den Fall hervorheben, dass nur eine einzige Funktion w_1 vorhanden ist, und die Exponenten der zugehörigen Elementarteiler alle gleich 1 sind.[2]) Dann hat man $\varrho_1 = n - p$, und es gibt nur ein einziges beigeordnetes System erster Stufe, bestehend aus $3n + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in den $3n + 2$ Variabeln

$$x\, y\, z_1\,..\,z_n\, p_1\, p_2\,..\,p_n\, q_1\,..\,q_n. \tag{44}$$

---

[1]) Vgl. den § 5 meiner oben citirten Arbeit.

[2]) Dieser Fall wird unter der speciellen Annahme $p = 0$ von M. Hamburger (Journ. f. Math. 93) gelegentlich betrachtet.

Die Schar der charakteristischen Streifen 1. O. hängt also jetzt nur von einer endlichen Parameterzahl ab, derart, dass jedes Flächenelement 1. Ord., dessen Coordinaten (44) den gegebenen Gleichungen J genügen, auf einer und nur einer Charakteristik 1. Ordn. enthalten ist.

Bestimmt man einen beliebigen Streifen 1. Ordnung, dessen Flächenelemente das System J befriedigen,[1]) so erzeugen die bezw. von diesen Flächenelementen ausgehenden ∞^1 Charakteristiken die allgemeinste Integralmannigfaltigkeit des gegebenen Involutionssystems.[2])

---

[1]) Diese Bestimmung erfordert im Allg. noch die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, vgl. den Schluss des § 1 meiner oben citirten Arbeit.

[2]) Es sei zum Schluss hervorgehoben, dass nach Riquier (Éc. Norm. 1893), wenn man den Begriff des „canonischen Systems" etwas erweitert, jedes beliebige Differentialsystem auf ein canonisches passives System erster Ordnung reducirt werden kann, dass also die Entwickelungen dieser Note auf beliebige Differentialsysteme mit 2 Independenten anwendbar sind. Insbesondere kann also jedes Differentialproblem in zwei Independenten auf die passive Normalform (N) des § III zurückgeführt werden.