Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft II.

München.
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Ueber die Endlichkeit der Invariantensysteme.

Von **L. Maurer.**

(*Eingelaufen 3. Juni.*)

Einleitung.

Herr Hilbert hat den Satz von der Endlichkeit des Formensystems in voller Allgemeinheit bewiesen:[1]) er hat bewiesen, dass sich die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen mit beliebig vielen Variabelnreihen als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen lassen. Der Gang des Beweises hat zu der Erkenntniss geführt, dass der Satz auch dann seine Geltung behält, wenn man auf die verschiedenen Variabelnreihen verschiedene Substitutionen anwendet, und auch dann, wenn man nicht die Gesammtheit der linearen Substitutionen, sondern nur gewisse Untergruppen derselben zur Anwendung bringt und Invarianz nur gegenüber diesen Untergruppen fordert.

Einer jeden Transformation der Variabeln durch eine lineare und homogene Substitution entspricht eine Transformation der Coefficienten der Grundformen durch eine lineare und homogene Substitution. Man kann daher die Invarianten auch durch die Eigenschaft charakterisiren, dass sie durch eine Gruppe G von linearen und homogenen Substitutionen in sich selbst transformirt werden. Dies lässt sich noch etwas anders

---

[1]) Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Math. Annalen Bd. 36, S. 473.

ausdrücken. Die Coefficienten der Grundformen mögen in irgend einer Reihenfolge mit $x_1\, x_2 \ldots x_n$ bezeichnet werden und es seien

$$C_\varrho(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\varrho\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r$$

die infinitesimalen Transformationen, die die Gruppe G erzeugen. Die Invarianten sind dann durch die r Differentialgleichungen

$$C_\varrho(f) = 0$$

definirt.

Es ist nun eine naheliegende Frage — Herr Hilbert hat sie im 42. Annalenband (S. 314) ausdrücklich formulirt —: entspricht jeder linearen und homogenen Transformationsgruppe, oder was dasselbe sagen will, jedem System von partiellen Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$, ein endliches Formensystem? Ich werde im Folgenden beweisen, dass das in der That der Fall ist: es lassen sich alle ganzen Functionen, die den partiellen Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ genügen, als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen.

Das Beweisverfahren, das im Folgenden angewendet wird, führt mit Nothwendigkeit zu einer Erweiterung des Satzes.

Angenommen, die Grössen x seien nicht unabhängig von einander, sondern genügen einem System algebraischer Gleichungen

$$(F) \qquad F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \;\ldots\; F_s = 0$$

Dieses Gleichungssystem sei der Gruppe G gegenüber invariantiv, d. h. jedes den Gleichungen (F) genügende Werthsystem der x genüge auch den Gleichungen

$$C_\varrho(F_\sigma) = 0 \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r; \quad \sigma = 1, 2, \ldots s$$

Das System der Functionen von $x_1\, x_2 \ldots x_n$, die den Differentialgleichungen $C_\varrho(f) = 0$ bei Berücksichtigung der Gleichungen (F) genügen, bezeichne ich als „specielles“ Invariantensystem der Gruppe G im Gegensatz zu dem „allgemeinen“ Invariantensystem, das die Functionen umfasst, die denselben Differentialgleichungen bei unbeschränkter Variabilität der Grössen x genügen.

Es wird im Folgenden nachgewiesen:

Alle ganzen Functionen, die einem speciellen Invariantensystem angehören, lassen sich als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen.

Den Beweis zerlege ich in zwei Theile. Im ersten Theil wird mittelst einer Modification des Hilbertschen Beweisverfahrens nachgewiesen, dass der Satz gilt — und zwar sowohl für das allgemeine Invariantensystem als auch für jedes specielle — wenn die Ordnung der Gruppe G gleich eins ist, wenn also das Invariantensystem durch eine einzige Differentialgleichung bestimmt ist (Art. III und IV). Im zweiten Theil setze ich voraus, der Satz gelte für alle Gruppen, deren Ordnung kleiner als r ist, und beweise, dass er dann auch für eine Gruppe von der Ordnung r gilt. Dabei hat man die beiden Möglichkeiten zu unterscheiden, dass die Gruppe G zusammengesetzt (Art. V) oder einfach ist (Art. VI).

I.

Im Vorangehenden wurde vorausgesetzt, dass die infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \quad C_2(f) \;\ldots\; C_r(f)$$

eine lineare und homogene Gruppe erzeugen.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung hiefür lautet:

Die infinitesimalen Transformationen $C_\varrho(f)$ müssen identischen Gleichungen der Form

$$C_\varrho C_\sigma(f) - C_\sigma C_\varrho(f) = \sum_{\tau=1}^{r} \varepsilon_\tau^{\varrho\sigma} C_\tau(f) \qquad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots r$$

genügen, wo die $\varepsilon_\tau^{\varrho\sigma}$ Constante sind.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich die Gesammtheit der infinitesimalen Transformationen der Form

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

[1]) Ueber allgemeine Invariantensysteme; diese Berichte 1888, S. 103.

auf Grund der Eigenschaften der zu $C(f)$ gehörigen charakteristischen Determinante

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & c_{13} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & c_{23} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & & & c_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

in drei Classen geteilt.

Ich nenne $C(f)$ regulär von der ersten Art, wenn die charakterische Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ keine von Null verschiedene Wurzel besitzt, ich nenne $C(f)$ regulär von der zweiten Art, wenn die Determinante $\Delta(\omega)$ keinen Elementartheiler höherer Ordnung besitzt und nur für ganzzahlige Werthe vor ω verschwindet. In allen anderen Fällen heisst $C(f)$ irregulär.

Ist $C(f)$ irregulär, so kann man stets eine Anzahl regulärer infinitesimaler Transformationen

$$K_0(f) \quad K_1(f) \ldots \quad K_r(f)$$

von denen die erste von der ersten Art ist, während die übrigen von der zweiten Art sind, in der Weise bestimmen, dass

$$C(f) = \gamma_0 K_0(f) + \gamma_1 K_1(f) \ldots + \gamma_r K_r(f)$$

wo $\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_r$ Constante sind.

Jede rationale Function von $x_1 x_2 \ldots x_n$, die der Differentialgleichung $C(f) = 0$ genügt, genügt auch den Differentialgleichungen

$$K_0(f) = 0 \quad K_1(f) = 0 \ldots K_r(f) = 0$$

Eine lineare und homogene Gruppe bezeichne ich als regulär, wenn die sie erzeugenden infinitesimalen Transformationen so gewählt werden können, dass eine jede regulär ist. In diesem Fall können die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe als rationale Functionen einer Anzahl von verfügbaren Parametern dargestellt werden und umgekehrt gilt der Satz: wenn zwischen den Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe nur algebraische Relationen bestehen, so ist die Gruppe regulär.

Ich setze voraus, die Gruppe G, die durch die infinitesimalen Transformationen $C_\varrho(f)$ erzeugt wird, sei regulär. Hiedurch wird die Allgemeinheit der Untersuchung in keiner Weise beschränkt.

II.

Ganze Functionen zeigen gegenüber den regulären infinitesimalen Transformationen erster und zweiter Art ein durchaus verschiedenes Verhalten.

Ist die infinitesimale Transformation $C(f)$ regulär von der ersten Art, so kann man für jede ganze Function f eine Zahl ν der Art bestimmen, dass $C^\nu(f) = 0$ während $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden ist.[1])

Solange die Variabeln x von einander unabhängig sind, verschwinden mit dem Ausdruck $C^\nu(f)$ selbstverständlich auch die Ausdrücke $C^{\nu+1}(f)$ $C^{\nu+2}(f)$ u. s. w. Dies gilt aber auch in dem Fall, dass zwischen den Variabeln invariantive Relationen bestehen, denn alsdann besteht gleichzeitig mit der Gleichung $F = 0$ auch die Gleichung $C(F) = 0$,

Der Beweis der oben aufgestellten Behauptung beruht auf einer Transformation der infinitesimalen Transformation $C(f)$, zu der man auf folgendem Weg gelangt:

Die charakteristische Determinante

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & c_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

besitzt nur Elementartheiler der Form r^e. Die Exponenten dieser Elementartheiler seien der Reihe nach $e_1\, e_2 \ldots e_m$. Man kann nun n^2 Grössen $[g\,h\,\lambda]$ mit nicht verschwindender Determinante der Art bestimmen[2]), dass

---

[1]) Ich setze zur Abkürzung in üblicher Weise

$$CC(f) = C^2(f) \qquad CCC(f) = C^3(f) \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist zweckmässig überdies festzusetzen $C^0(f) = f$.

[2]) Den Beweis habe ich in meiner Inauguraldissertation (Strassburg 1886) gegeben.

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,[1\,h\,\lambda] = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots n$$
$$h = 1, 2, \ldots m$$
$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\lambda] = (g-1)\,[g-1\,h\,\mu] \qquad g = 2, 3, \ldots e_h$$

Man kann die beiden Formelgruppen in eine zusammenziehen, wenn man mn Grössen $[0\,h\,\lambda]$ einführt, auf deren Werthe es nicht ankommt, da sie aus den Formeln wegfallen.

Ich führe nun neue Variable ein mittelst der Substitution:

$$y_{gh} = \sum_{\lambda=1}^{n} [g\,h\,\lambda]\,x_\lambda$$

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{g=1}^{e_h} \frac{\partial f}{\partial y_{gh}}\,[g\,h\,\lambda]$$

Folglich

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\,x_\mu = \sum_{h=1}^{m} \sum_{g=1}^{e_h} \sum_{\mu=1}^{n} (g-1)\,[g-1\,h\,\mu]\,x_\mu \frac{\partial f}{\partial y_{gh}}$$
$$= \sum_{h=1}^{m} \sum_{g=1}^{e_h} (g-1)\,y_{g-1\,h} \frac{\partial f}{\partial y_{gh}}$$

Oder ausgeschrieben

$$C(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} + 2\,y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{3h}} + 3\,y_{3h} \frac{\partial f}{\partial y_{4h}} \ldots + (e_h - 1)\,y_{e_h-1\,h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h h}} \right]$$

Infinitesimale Transformationen dieser Form sind aus der Theorie der Binärformen bekannt.[1]) Man bezeichnet in dieser Theorie bekanntlich als Gewicht eines Productes

[1]) Die Differentialgleichung $C(f) = 0$ ist identisch mit der Aronhold'schen Differentialgleichung

$$D_{21}^{(1)}(f) + D_{21}^{(2)}(f) \ldots\ldots + D_{21}^{(m)}(f) = 0$$

die sich auf das System der m Binärformen

$$y_{1h}\,\xi^{e_h-1} + (e_h-1)\,y_{2h}\,\xi^{e_h-2}\,\eta + \frac{(e_h-1)\,(e_h-2}{1\cdot 2}\,\xi^{e_h-3}\,\eta^2 + \ldots$$

$h = 1, 2, \ldots m$ bezieht. Es genügen derselben bekanntlich die leitenden Coefficienten der Covarianten — die Semiinvarianten — des Formensystems.

$$P = \prod_{h=1}^{m} \prod_{g=1}^{e_h} y_{gh}^{\lambda_{gh}}$$

wo die λ_{gh} ganze nicht negative Zahlen sind, die Summe

$$p = \sum_{h=1}^{m} [\lambda_{2h} + 2\lambda_{3h} + 3\lambda_{4h} \ldots + (e_h - 1)\lambda_{e_h h}]$$

Das Gewicht des Ausdrucks $C(P)$ ist mindestens um eine Einheit geringer als das Gewicht von P, es ist daher sicher $C^{p+1}(P) = 0$ und hieraus ergibt sich die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt:
eine ganze Function f kann keiner Gleichung der Form

$$\gamma_0 f + \gamma_1 C(f) + \gamma_2 C^2(f) \ldots + \gamma_\mu C^\mu(f) = 0$$

genügen, wo die γ Constante sind.

Ist nämlich $C^\nu(f) = 0$ aber $C^{-\nu 1}(f)$ von Null verschieden, so ergibt sich durch Anwendung der Operation $C^{\nu-1}(f)$ $\gamma_0 = 0$; die Operation $C^{\nu-2}(f)$ ergibt $\gamma_1 = 0$ u. s. w.

Die bisherigen Ausführungen gelten gleichviel, ob die Variabeln x von einander unabhängig sind, oder ob sie einem invariantiven Gleichungssystem genügen. Sind sie von einander unabhängig, so gilt der weitere Satz:

Genügt das Product oder der Quotient zweier relativ primer ganzer Functionen der Differentialgleichung $C(f) = 0$, so genügt eine jede der beiden Functionen selbst dieser Differentialgleichung.

Aus

$$C(\varphi\psi) = \varphi C(\psi) + \psi C(\varphi) = 0$$

folgt nämlich

$$C(\varphi) = \gamma\varphi \quad C(\psi) = -\gamma\psi$$

wo γ eine Constante ist.

Aber diese Relationen erfordern $\gamma = 0$.

Nehmen wir nunmehr an, die infinitesimale Transformation $C(f)$ sei regulär von der zweiten Art. In diesem Fall gelten die beiden Sätze:

1. Genügt eine ganze Function f der Differentialgleichung $C(f) = kf$, so muss k eine ganze Zahl sein.

Ich bezeichne eine ganze Function dieser Art als ausgezeichnete Function und k als ihren Index.

2. Zwei ganze Functionen f und f' können — sofern f' nicht verschwindet — nicht Differentialgleichungen der Form

$$C(f) = kf + f' \qquad C(f') = kf'$$

genügen.

Der Beweis wird wieder vermittelst einer Transformation der infinitesimalen Transformation $C(f)$ geführt.

Es gibt im vorliegenden Fall n^2 Grössen $[\nu\lambda]$ mit nicht verschwindender Determinante, die den Gleichungen genügen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}[\nu\lambda] = \omega_\nu [\nu\mu] \qquad \nu, \mu = 1, 2, .. n$$

Die n Grössen ω_ν sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\Delta(\omega) = 0$, die zur infinitesimalen Transformation $C(f)$ gehört, also ganze Zahlen.

Es können sich darunter beliebig viele einander gleiche befinden.

Ich führe nun neue Variable ein durch die Substitution

$$y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} [\nu\lambda] x_\lambda \qquad \nu = 1, 2, .. n$$

Es ergibt sich

$$C(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} y_\nu$$

Nehmen wir zunächst an, die Variabeln seien von einander unabhängig. In diesem Fall ist ohne weiteres klar, dass die ganze Function f dann und nur dann ausgezeichnete Function ist, wenn für alle Glieder Constans $\times\, y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} .. y_n^{\lambda_n}$, aus denen sie sich zusammensetzt, die Summe $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 .. + \lambda_n \omega_n$ einen und denselben Wert k hat. Diese ganze Zahl k ist der Index der Function.

Es ist ferner klar, dass sich jede ganze Function als Summe einer Anzahl ausgezeichneter Functionen darstellen lässt.

Nehmen wir nun einen Augenblick an, es sei

$$C(f) = kf + f' \qquad C(f') = kf'$$

also

$$C^2(f) - 2k\,C(f) + k^2 f = 0$$

Auch in diesem Fall kann f nur solche Glieder Constante $\times\, y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_n^{\lambda_n}$ enthalten, für die $\lambda_1\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2 \ldots + \lambda_n\,\omega_n = k$. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so $C(f) = kf$ und $f' = 0$ entgegen der gemachten Voraussetzung.

Nehmen wir nunmehr an, die Variabeln x und also auch die Variabeln y genügen einem System invariantiver Gleichungen.

Wir machen von der eben gemachten Bemerkung Gebrauch, dass sich jede ganze Function f als Summe einer Anzahl von ganzen Functionen $\varphi_1\,\varphi_2 \ldots \varphi_\varrho$ darstellen lässt, von denen jede bei unbeschränkter Variabilität der Grössen y einer Differentialgleichung der Form

$$C(\varphi_\sigma) = k_\sigma\,\varphi_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \varrho)$$

genügt. Die Darstellung der Function f durch die Function φ kann man so einrichten, dass unter den Indices k_σ keine zwei einander gleich sind, und dass keine der ϱ Functionen φ infolge der Relationen zwischen den Variabeln verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung können die Functionen φ keiner linearen Relation

$$F = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 \ldots + \gamma_\varrho\,\varphi_\varrho = 0$$

mit constanten Coefficienten γ genügen. Denn mit $F = 0$ bestehen auch die Gleichungen

$$C(F) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} k_\sigma\,\gamma_\sigma\,\varphi_\sigma = 0 \qquad C^2(F) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} k_\sigma^2\,\gamma_\sigma\,\varphi_\sigma = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

und diese erfordern unter den gemachten Voraussetzungen, dass alle Constanten γ verschwinden.

Nun ist

$$C(f) - kf = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} (k_\sigma - k)\,\varphi_\sigma$$

und

$$C^2(f) - 2k\,C(f) + k^2 f = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} (k_\sigma - k)^2\,\varphi_\sigma$$

Es ist sonach ersichtlich:

Die Gleichung $C(f) = kf$ erfordert $\varrho = 1$ $f = \varphi_1$ $k = k_1$.

Die Forderung $C^2(f) - 2k\,C(f) + k^2 f = 0$ $C(f) - kf$ von Null verschieden führt zu einem Widerspruch.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, dass sich jede ganze Function, die der Gleichung $C(f) = kf$ bei Berücksichtigung der Relationen zwischen den Variabeln genügt, als ganze Function darstellen lässt, die derselben Differentialgleichung auch bei unbeschränkter Variabilität der Grössen y genügt.

III.

Nunmehr kann man die Endlichkeit eines Invarianten-systems, das durch eine einzige reguläre Differentialgleichung zweiter Art bestimmt wird, leicht beweisen.

Auf Grund des Fundamentaltheorems des Herrn Hilbert lassen sich alle ganzen Invarianten[1]) unseres Systems als lineare und homogene Functionen einer endlichen Anzahl derselben $i_1\, i_2 \, .. \, i_m$ darstellen. Die Coefficienten dieser Linearformen sind ganze Functionen der Variabeln x.

Nach Herrn Hilberts Vorgang beweisen wir zunächst:

Die Darstellung lässt sich so einrichten, dass die auftretenden Coefficienten ebenfalls ganze Invarianten sind. Diese Coefficienten kann man dann ebenfalls als lineare und homogene Functionen von $i_1\, i_2 \, .. \, i_m$ der Art darstellen, dass die Coefficienten wieder ganze Invarianten sind. In dieser Weise fortfahrend überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes.

Es sei nun

$$J = a_1\, i_1 + a_2\, i_2 \;\ldots\; + a_m\, i_m$$

eine beliebige ganze Invariante des Systems; $a_1\, a_2 \, .. \, a_m$ sind ganze Functionen der Variabeln x.

Die Coefficienten a lassen sich als lineare und homogene Functionen einer Anzahl von ausgezeichneten Functionen $\varphi_1\, \varphi_2 \, .. \, \varphi_s$

[1]) Es ist allgemein üblich, rationale Functionen, die invariant sind, als „rationale Invarianten" zu bezeichnen. Dementsprechend bezeichne ich invariante ganze Functionen als „ganze Invarianten".

der Art darstellen, dass die Coefficienten Constante sind. Sei etwa

$$a_\mu = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} a_{\mu\sigma}\,\varphi_\sigma \qquad \mu = 1, 2, \ldots m$$

wo die $a_{\mu\sigma}$ Constante sind.

Die Indices der ausgezeichneten Functionen $\varphi_1\,\varphi_2 \ldots \varphi_\varrho$ bezeichne ich wieder mit $k_1\,k_2 \ldots k_\varrho$. Unter denselben können beliebig viele einander gleiche vorkommen.

Sind alle Indices gleich Null, so sind alle Coefficienten a Invarianten. Nehmen wir an, es sei wenigstens k_ϱ von Null verschieden. Nun ist wegen

$$C(J) = 0 \qquad \text{und} \qquad C(i_\mu) = 0$$

auch

$$\sum_{\mu=1}^{m} C(a_\mu)\,i_\mu = 0$$

also

$$J = \sum_{\mu=1}^{m} \left[a_\mu - \frac{1}{k_\varrho}\,C(a_\mu)\right] i_\mu$$

und

$$a_\mu - \frac{1}{k_\varrho}\,C(a_\mu) = \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} \left(1 - \frac{k_\sigma}{k_\varrho}\right) a_{\mu\sigma}\,\varphi_\sigma$$

Die in der neuen Darstellung von J auftretenden Coefficienten $a_\mu - \frac{1}{k_\varrho}\,C(a_\mu)$ lassen sich somit als Summen von höchstens $\varrho - 1$ ausgezeichneten Functionen darstellen. Man kann offenbar das eben angewendete Verfahren solange fortsetzen, bis man zu einer Darstellung von J gelangt, bei der nur mehr Invarianten als Coefficienten auftreten.

Mit Hilfe des Hilbert'schen Verfahrens kann man auch leicht zeigen, dass sich alle ausgezeichneten Functionen als ganze Functionen einer gewissen Anzahl derselben darstellen lassen.

IV.

Da die ganzen Invarianten, die durch eine reguläre Differentialgleichung erster Art bestimmt sind, als Semiinvarianten eines Systems von Binärformen betrachtet werden können, so ergibt sich die Endlichkeit des Formensystems aus dem Gordan'schen Satz, sofern die Grössen x von einander unabhängig sind. Dagegen bleibt der Fall, dass Relationen zwischen ihnen bestehen, noch zu erledigen.

Geht man von der in Art. II nachgewiesenen Normalform der regulären infinitesimalen Transformation erster Art aus:

$$C(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} + 2 y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{3h}} \dots + (e_h - 1)\, y_{e_h - 1\, h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h h}} \right]$$

so erkennt man: es gibt eine reguläre infinitesimale Transformation zweiter Art

$$A(f) = \sum_{h=1}^{m} \Bigg[(e_h - 1)\, y_{1h} \frac{\partial f}{\partial y_{1h}} + (e_h - 3)\, y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} \dots - (e_h - 3)\, y_{e_h - 1h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h - 1h}}$$
$$- (e_h - 1)\, y_{e_h h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h h}} \Bigg]$$

und eine reguläre infinitesimale Transformation erster Art

$$B(f) = \sum_{h=1}^{m} \left[(e_h - 1)\, y_{2h} \frac{\partial f}{\partial y_{1h}} + (e_h - 2)\, y_{3h} \frac{\partial f}{\partial y_{2h}} \dots + y_{e_h h} \frac{\partial f}{\partial y_{e_h - 1h}} \right]$$

die den identischen (für beliebige Functionen f giltigen) Gleichungen genügen:[1])

[1]) Aronhold gebraucht für die infinitesimalen Transformationen $A(f)$ $B(f)$ $C(f)$ die Bezeichnungen

$$\sum_{h=1}^{m} \left[D_{11}^{(h)}(f) - D_{22}^{(h)}(f) \right] \quad \sum_{h=1}^{m} D_{12}^{(h)}(f) \quad \sum_{h=1}^{m} D_{21}^{(h)}(f)$$

— Es ist zu bemerken: einer bestimmten Normalform von $C(f)$ entsprechen bestimmte infinitesimale Transformationen $A(f)$ und $B(f)$. Weil aber die Transformation von $C(f)$ in die Normalform von willkürlich zu wählenden Parametern abhängt, so sind die der infinitesimalen Transformation $C(f)$ zu adjungirenden Transformationen $A(f)$ und $B(f)$ nicht vollkommen bestimmt.

$$(1)\quad AB(f)-BA(f)=-2B(f)\qquad AC(f)-CA(f)=2C(f)$$
$$CB(f)-BC(f)=A(f)$$

Zwischen den infinitesimalen Transformationen $A(f)B(f)C(f)$ finden eine Reihe von bemerkenswerthen Beziehungen statt. Sie ergeben sich — was einer später zu machenden Anwendung wegen (Art. IV) betont werden muss — aus den Gleichungen (1), ohne dass es nöthig wäre, auf die oben angegebenen expliciten Ausdrücke dieser infinitesimalen Transformationen zurückzugreifen.

Es ist für eine beliebige Function f

$$(2)\quad AB^\nu(f)-B^\nu A(f)=-2\nu B^\nu(f)\quad AC^\nu(f)-C^\nu A(f)=2\nu C^\nu(f)$$
$$C^\nu B(f)-BC^\nu(f)=\nu C^{\nu-1}A(f)+\nu(\nu-1)C^{\nu-1}(f)$$
$$B^\nu C(f)-CB^\nu(f)=-\nu B^{\nu-1}A(f)+\nu(\nu-1)B^{\nu-1}(f)$$

Man beweist diese Gleichungen leicht durch den Schluss von ν auf $\nu+1$.

Nehmen wir nunmehr an, f sei ganze Function und es sei $A(f)=kf$, also f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnete Function, dann gilt für $\lambda<\mu$ die Gleichung

$$(3)\qquad C^\mu B^\lambda(f)-B^\lambda C^\mu(f)=\sum_{\sigma=1}^{\lambda}\gamma_\sigma(\mu,\lambda,k)B^{\lambda-\sigma}C^{\mu-\sigma}(f)$$

Hier ist

$$\gamma_\sigma(\mu,\lambda,k)=(\sigma!)^2(\mu)_\sigma(\lambda)_\sigma(\mu-\lambda+k)_\sigma$$

Man beweist diese Gleichung leicht durch den Schluss von λ auf $\lambda+1$.

Nehmen wir nun an, es sei $C^\nu(f)=0$ aber $C^{\nu-1}(f)$ von Null verschieden und es sei λ die kleinste Zahl, für die die Gleichung $B^\lambda(f)=0$ besteht.

Setzen wir $\mu=\lambda+\nu-1$, dann verschwinden in der Gleichung (3) die beiden Glieder auf der linken Seite und auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des letzten $\gamma_\lambda(\lambda+\nu-1,\lambda,k)C^{\nu-1}(f)$. Nun ist

$$\gamma_\lambda(\lambda+\nu-1,\lambda,k)=(\lambda!)^2(\lambda+\nu-1)_\lambda(\nu-1+k)_\lambda$$

Es muss also eine der Zahlen

$$\nu-1+k \quad \nu-2+k \ldots \quad \nu-\lambda+k$$

gleich Null sein, daher ist

$$1 \leq \nu+k \leq \lambda$$

Wenn die Variabeln x von einander unabhängig sind, lässt sich die Beziehung zwischen den Zahlen λ, ν, k noch genauer angeben.

Die Gleichungen (1) bleiben bestehen, wenn man $B(f)$ und $C(f)$ vertauscht und $A(f)$ durch $-A(f)$ ersetzt.

Tritt $-A(f)$ an Stelle von $A(f)$, so tritt $-k$ an Stelle von k. Es gilt daher die der Gleichung (3) entsprechende Gleichung

$$B^{\mu} C^{\nu}(f) - C^{\nu} B^{\mu}(f) = \sum_{\sigma=1}^{\nu} \gamma_{\sigma}(\mu, \nu, -k)\, C^{\nu-\sigma} B^{\mu-\sigma}(f) \qquad \mu \geq \nu$$

Ich setze wieder $\mu = \lambda + \nu - 1$. Es ergibt sich in diesem Fall

$$\gamma_{\nu}(\lambda+\nu-1, \nu, -k) = (\nu!)^2 (\lambda+\nu-1)_{\nu} (\lambda-k-1)_{\nu} = 0$$

und es muss daher eine der Zahlen

$$\lambda-1-k \quad \lambda-2-k \ldots \quad \lambda-\nu-k$$

gleich Null sein. Es ist also

$$1+k \leq \lambda \leq \nu+k$$

und folglich ist

$$\nu+k=\lambda$$

Diese Schlussweise ist nicht anwendbar, wenn die Variabeln einem Gleichungssystem genügen, das gegenüber der infinitesimalen Transformation $C(f)$ aber nicht gegenüber $B(f)$ invariantiv ist. Denn dann folgt zwar aus dem Verschwinden von $C^{\nu}(f)$ das Verschwinden von $C^{\nu+1}(f)$ $C^{\nu+2}(f)$ u. s. w., aber aus der Gleichung $B^{\lambda}(f) = 0$ folgt nicht $B^{\lambda+1}(f) = 0$.

Die Function $f' = BC(f)$ ist ebenso wie f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnet und ihr Index ist ebenfalls $= k$.

Es ergibt sich dies aus den Identitäten

$$A(f') = ABC(f) = (AB-BA)C(f) + B(AC-CA)(f) + BCA(f)$$
$$= -2BC(f) + 2BC(f) + kBC(f) = kf'$$

Aus (1) folgt

$$AC(f) = (k+2)\,C(f)$$

und aus (2)

$$(C^\nu B - BC^\nu)\,C(f) = \nu(\nu+k+1)\,C^\nu(f)$$

Folglich ist

$$C^\nu(f') = C^\nu BC(f) = \nu(\nu+k+1)\,C^\nu(f) + BC^{\nu+1}(f)$$

Dementsprechend ist für $\nu > 1$

$$C^{\nu-1}(f') = (\nu-1)(\nu+k)\,C^{\nu-1}(f) + BC^\nu(f)$$

Da $\nu + k$ eine ganze positive Zahl ist, so ist $C^\nu(f') = 0$ und wenn $\nu > 1$ $C^{\nu-1}(f')$ von Null verschieden.

Aus dem Bewiesenen folgt:

Unter der Voraussetzung $\nu > 1$ ist die ganze Function $\varphi = f - \frac{1}{(\nu-1)(\nu+k)} BC(f)$ ebenso wie f der infinitesimalen Transformation $A(f)$ gegenüber ausgezeichnet und sie hat denselben Index k. Sie genügt überdies der Differentialgleichung $C^{\nu-1}(\varphi) = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen kann man das Hilbert'sche Beweisverfahren anwenden.

Eine jede ganze Invariante J der durch $C(f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppe lässt sich als lineare und homogene Function einer gewissen Anzahl derselben $i_1\, i_2 \ldots i_m$ darstellen. Sei etwa

$$J = a_1 i_1 + a_2 i_2 \,\ldots + a_m i_m$$

wo $a_1\, a_2 \ldots a_m$ ganze Functionen der Variabeln x sind. Es kommt wieder nur darauf an zu beweisen, dass sich die Darstellung so einrichten lässt, dass die Coefficienten a ebenfalls ganze Invarianten sind. Wir denken uns diese Coefficienten als lineare und homogene Functionen einer Anzahl in Bezug auf die infinitesimale Transformation $A(f)$ ausgezeichneter Functionen $\varphi_1\,\varphi_2\,..\,\varphi_\varrho$ dargestellt. Sei

$$a_\mu = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} a_{\mu\sigma}\,\varphi_\sigma \qquad \mu = 1, 2, \,..\, m$$

wo die Coefficienten $a_{\mu\sigma}$ Constante sind.

Der Index der Function φ_σ in Bezug auf $A(f)$ sei k_σ und es sei $C^{\nu_\sigma}(\varphi_\sigma) = 0$ aber $C^{\nu_\sigma-1}(\varphi_\sigma)$ von Null verschieden. Sind alle Zahlen $\nu_\sigma = 1$, so sind die Coefficienten a Invarianten. Nehmen wir an, eine dieser Zahlen — etwa ν_ϱ — sei > 1. Nun ist wegen $C(J) = 0$ und $C(i_\mu) = 0$

$$\sum_{\mu=1}^{m} BC(a_\mu)\,i_\mu = 0$$

also

$$J = \sum_{\mu=1}^{m}\left[a_\mu - \frac{1}{(\nu_\varrho - 1)(\nu_\varrho + k_\varrho)}\,BC(a_\mu)\right] i_\mu$$

An Stelle der Functionen φ_σ treten nunmehr die Functionen

$$\psi_\sigma = \varphi_\sigma - \frac{1}{(\nu_\varrho - 1)(\nu_\varrho - k_\varrho)}\,BC(\varphi_\sigma)$$

Die ψ_σ sind ebenso wie die φ_σ ausgezeichnete Functionen in Bezug auf $A(f)$ und es ist für $\sigma = 1, 2, \,..\, \varrho - 1$ $C^{\nu_\sigma}(\psi_\sigma) = 0$, aber ausserdem ist $C^{\nu_\varrho - 1}(\psi_\varrho) = 0$.

Durch wiederholte Anwendung des eben benützten Verfahrens gelangt man offenbar zu einer Darstellung von J, bei der als Coefficienten nur ganze Invarianten auftreten.

V.

Wir nehmen nun an, der Satz von der Endlichkeit des Formensystems gelte für alle Gruppen, deren Ordnung $< r$ ist, und beweisen, dass er dann auch für alle zusammengesetzten Gruppen von der Ordnung r gilt.

Zu diesem Zweck soll zunächst gezeigt werden:

Besitzt die von den regulären infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \qquad C_2(f) \;.\;.\;.\; C_r(f)$$

erzeugte Gruppe r^{ter} Ordnung G eine ausgezeichnete Untergruppe Γ, so besitzt sie sicher eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe.

Damit G überhaupt eine ausgezeichnete Untergruppe Γ der Ordnung ϱ besitzt, ist erforderlich, dass man ϱ linear unabhängige in der Gruppe G enthaltene infinitesimale Transformationen

$$K_1(f) \qquad K_2(f) \;.\;.\;.\; K_\varrho(f)$$

der Art bestimmen kann, dass

$$C_\lambda K_\mu(f) - K_\mu C_\lambda(f) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \delta_\nu^{\lambda\mu} K_\nu(f) \quad \lambda = 1,2,\ldots r;\; \mu = 1,2\ldots\varrho$$

wo die $\delta_\nu^{\lambda\mu}$ Constante sind.

Es kann der Fall eintreten, dass jede der Untergruppe Γ angehörende Substitution T mit jeder Substitution S der Gruppe G vertauschbar ist, dass also $ST = TS$. In diesem Fall müssen alle Constanten $\delta_\nu^{\lambda\mu}$ verschwinden und es ist demnach auch jede infinitesimale Transformation $K_\mu(f)$ von Γ mit jeder infinitesimalen Transformation $C_\lambda(f)$ von G vertauschbar.

Nehmen wir nun an, die Gruppe Γ sei nicht regulär und $K_1(f)$ sei eine ihr angehörende nicht reguläre infinitesimale Transformation. Jede derartige infinitesimale Transformation lässt sich als Summe einer Anzahl regulärer Transformationen

$$L_1(f) \qquad L_2(f) \;.\;.\;.\; L_k(f)$$

darstellen (vergl. Art. I). Alle diese infinitesimalen Transformationen gehören der Gruppe G an.

Man kann nun leicht beweisen: ist eine beliebige infinitesimale Transformation $C(f)$ mit $K_1(f)$ vertauschbar, so ist $C(f)$ auch mit jeder der infinitesimalen Transformationen $L_1(f)\, L_2(f) \ldots L_k(f)$ vertauschbar. Die Gesammtheit der regulären Transformationen $L(f)$, zu denen man durch Zerlegung der ϱ Transformationen $K_\mu(f)$ gelangt, erzeugen offenbar eine reguläre Gruppe Γ', der folgende Eigenschaften zukommen:

1. Jede in Γ' enthaltene infinitesimale Transformation ist mit jeder in G enthaltenen infinitesimalen Transformation vertauschbar.

2. Γ' ist entweder ausgezeichnete Untergruppe von G oder Γ' fällt mit G zusammen.

Im letzteren Fall sind je zwei infinitesimale Transformationen von G mit einander vertauschbar und beliebige ϱ reguläre Transformationen von G erzeugen eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe.

Nehmen wir nunmehr an, Γ enthalte Substitutionen, die nicht mit jeder Substitution von G vertauschbar sind. Es sei T eine bestimmte derartige Substitution.

Die allgemeine Substitution der Gruppe G, deren Coefficienten sich als rationale Functionen von r variabeln Parametern $u_1\, u_2 \ldots u_r$ darstellen lassen, bezeichne ich mit $S(u)$. Wir transformiren nun T durch $S(u)$.

Das System (Σ) der transformirten Substitutionen

$$P(u) = S(u)^{-1}\, T S(u)$$

hat folgende Eigenschaften:

1. Jede Substitution des Systems gehört der Untergruppe Γ an.

2. Transformirt man eine Substitution von (Σ) durch eine beliebige Substitution der Gruppe G, so gehört die Transformirte wieder dem System (Σ) an. Dieses System ist also in der Gesammtgruppe ausgezeichnet.

3. Das System (Σ) ist durch ein irreducibles System algebraischer Gleichungen bestimmt, denen die Coefficienten der allgemeinen Substitution $P(u)$ genügen. Man gelangt zu diesen Gleichungen durch Elimination der rational auftretenden Parameter u.

Bilden die Substitutionen des Systems (Σ) eine Gruppe — was im Fall $\varrho = 1$ nothwendig eintritt — so haben wir in (Σ) eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Ist dies nicht der Fall, so setzen wir zwei allgemeine Substitutionen von (Σ) $P(u)$ und $P(v)$, die zwei verschiedenen Systemen variabler Parameter entsprechen, zu einer Substitution

$$Q(u|v) = P(u)\,P(v)$$

zusammen. Auch das System (Σ') der Substitutionen $Q(u|v)$ besitzt die oben genannten drei charakteristischen Eigenschaften. Die Anzahl der Coefficienten von $Q(u|v)$, über die durch geeignete Bestimmung der Parameter $u_1\, u_2 \,..\, u_r$ $v_1\, v_2 \,..\, v_r$ verfügt werden kann, ist mindestens um eins grösser als die Anzahl der verfügbaren Coefficienten von $P(u)$. Hat das System (Σ') Gruppencharakter, so ist (Σ') eine reguläre ausgezeichnete Untergruppe von G. Andernfalls bilden wir das System (Σ''), das die Substitutionen

$$R(u|v|w|t) = Q(u|v)\,Q(w|t)$$

umfasst u. s. w. Auf diesem Weg fortschreitend, müssen wir schliesslich zu einer regulären ausgezeichneten Untergruppe von G gelangen.

Nunmehr können und wollen wir voraussetzen, die ausgezeichnete Untergruppe Γ sei regulär. Wir wollen ferner annehmen, die infinitesimalen Transformationen

$$C_1(f) \qquad C_2(f) \quad . \; . \; . \quad C_r(f)$$

seien so gewählt, dass eine jede regulär ist, und dass

$$C_{r-\varrho+1}(f) \qquad C_{r-\varrho+2} \quad . \; . \; . \quad C_r(f)$$

der Untergruppe Γ angehören. Es bestehen dann Relationen der Form

$$C_\lambda C_\mu(f) - C_\mu C_\lambda(f)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\varrho} \varepsilon_\nu^{\lambda\mu}\, C_{r-\varrho+1}(f) \quad \lambda = 1, 2, \ldots r; \; \mu = r-\varrho+1,\; r-\varrho+2, \ldots r$$

Ist nun f Invariante der Untergruppe Γ, so ist $C_\mu C_\lambda(f) = 0$. Daraus ergibt sich: Ist f ganze Invariante der Untergruppe Γ, so gilt dasselbe für jede der Functionen

$$C_\lambda(f) \qquad (\lambda = 1, 2, \,..\, r-\varrho)$$

Nach Voraussetzung lassen sich alle ganzen Invarianten der Gruppe Γ, deren Ordnung $\varrho < r$ ist, als ganze Functionen einer Anzahl derselben $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\sigma$ ausdrücken.

Durch wiederholte Anwendung der Operation $C_\lambda(f)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r - \varrho)$ auf diese Functionen erhalten wir nun ganze Invarianten der Gruppe Γ. Da aber der Grad von $C_\lambda(f)$ in den Variabeln x nicht höher sein kann als der von f, so ist klar, dass sich alle Functionen, zu denen man auf diesem Weg gelangt, als lineare und homogene Functionen einer Anzahl derselben $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ der Art darstellen lassen, dass die Coefficienten der Linearformen Constante sind. Es bestehen daher für die Functionen φ_μ Gleichungen der Form:

$$C_\lambda(\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\lambda\mu\nu}\, \varphi_\nu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots r - \varrho\,; \ \mu = 1, 2, \ldots m$$

wo $a_{\lambda\mu\nu}$ eine Constante ist.

Da sich jede ganze Invariante f von G als ganze Function von $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\sigma$ darstellen lässt, so ist

$$C_\lambda(f) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} c_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_\mu} x_\nu$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} C_\lambda(\varphi_\varkappa) \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \sum_{\nu=1}^{m} a_{\lambda\varkappa\nu}\, \varphi_\nu \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa}$$

Den Ausdruck $\sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \sum_{\nu=1}^{m} a_{\lambda\varkappa\nu}\, \varphi_\nu \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa}$ bezeichne ich mit $\overline{C}_\lambda(f)$.

Die $r - \varrho$ infinitesimalen Transformationen $\overline{C}_\lambda(f)$ erzeugen eine lineare Gruppe $\overline{G}$ der Ordnung $r - \varrho$, die mit G isomorph ist. Die Gruppe $\overline{G}$ ist regulär, denn sie lässt sich aus der regulären Gruppe G durch algebraische Operationen ableiten.

Da die Anzahl m der Functionen φ im Allgemeinen grösser als die Anzahl der von einander unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$C_{r-\varrho+1}(f) = 0 \quad C_{r-\varrho+2}(f) = 0 \ \ldots \quad C_r(f) = 0$$

ist, so werden zwischen den Functionen φ algebraische Gleichungen bestehen. Weitere Relationen zwischen diesen Functionen ergeben sich, wenn die Variabeln x nicht von einander unabhängig sind, sondern einem System invariantiver Gleichungen

$$(F) \qquad F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \;\ldots\ldots$$

genügen. Sei nun $\Phi = 0$ eine der Gleichungen, denen die Functionen φ genügen. Drückt man die Functionen φ durch ihren Werth in Function der x aus, so muss die Gleichung $\Phi = 0$ entweder identisch oder infolge der Gleichungen (F) erfüllt sein. Auf jeden Fall besteht mit $\Phi = 0$ auch die Gleichung $C_\lambda(\Phi) = 0$ also auch die Gleichung $\overline{C}_\lambda(\Phi) = 0\,(\lambda = 1, 2, \ldots r - \varrho)$. Das Gleichungssystem, dem die Functionen φ genügen, ist also der Gruppe $\overline{G}$ gegenüber invariantiv. Das allgemeine Invariantensystem der Gruppe G — und ebenso jedes specielle — kann somit auch als specielles Invariantensystem der Gruppe $\overline{G}$ betrachtet werden. Das letztere Invariantensystem ist nach Voraussetzung endlich; dasselbe gilt daher auch für das allgemeine und jedes specielle Invariantensystem der Gruppe G.

VI.

Wir halten an der im vorigen Artikel eingeführten Voraussetzung fest, dass jede Gruppe, deren Ordnung kleiner als r ist, ein endliches System ganzer Invarianten besitzt, und beweisen nunmehr, dass dies auch für jede einfache Gruppe der Ordnung r gilt.

Ich schicke einen Hilfssatz voraus.

Nehmen wir an, zwischen den infinitesimalen Transformationen

$$A(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

$$B(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

bestehen die identischen Gleichungen

$$AB(f) - BA(f) = -2B(f) \qquad AC(f) - CA(f) = 2C(f)$$
$$CB(f) - BC(f) = A(f)$$

dann sind nothwendig die infinitesimalen Transformationen $B(f)$ und $C(f)$ regulär von der ersten Art, und $A(f)$ ist regulär von der zweiten Art.

Den ersten Teil dieser Behauptung habe ich schon früher bewiesen,[1]) die Richtigkeit des zweiten Teils ergibt sich auf folgendem Weg:

Wir bezeichnen mit k eine Wurzel der zu $A(f)$ gehörigen charakteristischen Gleichung, mit $u_1 u_2 \ldots u_n$ ein Lösungssystem der Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} u_\lambda = k u_\mu \qquad \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Linearform $f = u_1 x_1 + u_2 x_2 \ldots + u_n x_n$ genügt der Gleichung $A(f) = kf$. Nehmen wir an, es sei

$$B^\lambda(f) = 0 \qquad C^\nu(f) = 0$$

dagegen verschwinden die Linearformen $B^{\lambda-1}(f)$ und $C^{\nu-1}(f)$ nicht identisch. Dann ist $k = \lambda - \nu$ (s. Art. IV), also ist jede Wurzel der zu $A(f)$ gehörigen charakteristischen Gleichung eine ganze Zahl.

Nehmen wir nun einen Augenblick an, die charakteristische Determinante der infinitesimalen Transformation $A(f)$ besitze einen zur Wurzel k gehörigen Elementartheiler höherer Ordnung. Man kann dann zwei Werthsysteme $u_1 u_2 \ldots u_n$ und $u'_1 u'_2 \ldots u'_n$ der Art bestimmen, dass

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} u_\lambda = k u_\mu + u'_\mu \quad \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} u'_\lambda = k u'_\mu \qquad \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Linearformen

$$f = u_1 x_1 + u_2 x_2 \ldots + u_n x_n \quad \text{und} \quad f' = u'_1 x_1 + u'_2 x_2 \ldots + u'_n x_n$$

verschwinden nicht identisch und sie genügen den Gleichungen

$$(1) \qquad A(f) = kf + f' \qquad A(f') = kf'$$

[1]) Diese Berichte 1894, S. 307.

Ich werde beweisen, dass diese Gleichungen nicht bestehen können. Damit ist dann bewiesen, dass die zu $A(f)$ gehörige charakterische Determinante nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, und dass folglich die infinitesimale Transformation $A(f)$ regulär von der zweiten Art ist.

Nehmen wir wieder an, es sei $B^\lambda(f) = 0$ und $C^\nu(f) = 0$ aber $B^{\lambda-1}(f)$ und $C^{\nu-1}(f)$ seien von Null verschieden; es sei ferner $B^{\lambda'}(f') = 0$ und $C^{\nu'}(f') = 0$ dagegen seien $B^{\lambda'-1}(f)$ und $C^{\nu'-1}(f')$ von Null verschieden.

Es ist dann $k = \lambda' - \nu'$.

Da (Art. IV, 2)

$$A C^\nu(f) = C^\nu A(f) + 2\nu C^\nu(f) = (k + 2\nu)\, C^\nu(f) + C^\nu(f')$$

so ist $C^\nu(f') = 0$ also $\nu \geqq \nu'$. Analog ist $\lambda > \lambda'$.

Man kann die Functionen f, f', wenn Gleichungen von der Form der Gleichungen (1) überhaupt möglich sind, stets so wählen, dass $\lambda = \lambda' = 1$.

Wäre nämlich $\lambda' > 1$, so ersetzen wir f durch $\varphi = B^{\lambda'-1}(f)$ und f' durch $\varphi' = B^{\lambda'-1}(f')$.

Wegen

$$\begin{aligned} B^{\lambda'-1} A(f) &= -(A B^{\lambda'-1} - B^{\lambda'-1} A)(f) + A B^{\lambda'-1}(f) \quad \text{(Art. IV,2)} \\ &= 2(\lambda' - 1)\, B^{\lambda'-1}(f) + A B^{\lambda'-1}(f) \end{aligned}$$

ist

$$A(\varphi) = (k - 2\lambda' + 2)\,\varphi + \varphi'$$

und auf analogem Weg ergibt sich

$$A(\varphi') = (k - 2\lambda' + 2)\,\varphi'$$

Es ist also zulässig $\lambda' = 1$ vorauszusetzen.

Ist nun nicht λ ebenfalls $= 1$, so ersetze ich f durch

$$\psi = f - \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - k)}\, C B(f)$$

(Da $k = \lambda' - \nu' = 1 - \nu'$, so ist $\lambda - k$ nicht gleich Null.)

Es ist nun

$$A(\psi) = A(f) - \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-k)} ACB(f)$$

und

$$\begin{aligned} ACB(f) &= (AC - CA)B(f) + C(AB - BA)(f) + CBA(f) \\ &= kCB(f) + CB(f') \end{aligned}$$

also wegen $B(f') = 0$

$$ACB(f) = kCB(f)$$

Folglich

$$\begin{aligned} A(\psi) &= kf + f' - \frac{k}{(\lambda-1)(\lambda-k)} CB(f) \\ &= k\psi + f' \end{aligned}$$

Ferner ist wegen $B^\lambda(f) = 0$ (vergl. Art. IV, 2)

$$\begin{aligned} B^{\lambda-1}CB(f) &= (B^{\lambda-1}C - CB^{\lambda-1})B(f) \\ &= -(\lambda-1)B^{\lambda-2}AB(f) + (\lambda-1)(\lambda-2)B^{\lambda-1}(f) \end{aligned}$$

und

$$AB(f) = BA(f) - 2B(f) = (k-2)B(f)$$

Folglich

$$B^{\lambda-1}CB(f) = (\lambda-1)(\lambda-k)B^{\lambda-1}(f)$$

Demnach ist $B^{\lambda-1}(\psi) = 0$.

Ist $\lambda = 2$, so ist also $B(\psi) = 0$, ist dagegen $\lambda > 2$, so ersetze ich ψ durch

$$\chi = \psi - \frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-1-k)} CB(\psi) \qquad \text{u. s. w.}$$

Nunmehr sind wir berechtigt anzunehmen $\lambda = \lambda' = 1$.

Es ist nun wegen $B(f) = 0$ und $C^\nu(f) = 0$

$$(BC^\nu - C^\nu B)(f) = 0$$

Andererseits ist (Art. IV, 2)

$$\begin{aligned} (BC^\nu - C^\nu B)(f) &= -\nu C^{\nu-1}A(f) - \nu(\nu-1)C^{\nu-1}(f) \\ &= -\nu(\nu+k-1)C^{\nu-1}(f) - \nu C^{\nu-1}(f') \end{aligned}$$

also weil $k = 1 - \nu'$

$$\nu(\nu-\nu')C^{\nu-1}(f) + \nu C^{\nu-1}(f') = 0$$

Diese Gleichung fordert, wenn $\nu' = \nu$ $C^{\nu-1}(f') = 0$ und wenn $\nu' < \nu$ $C^{\nu-1}(f) = 0$. Beides widerspricht unseren Voraussetzungen.

Das Tripel der Differentialgleichungen

$$A(f) = 0 \qquad B(f) = 0 \qquad C(f) = 0$$

zeigt ganzen Functionen gegenüber eine merkwürdige (übrigens aus der Invariantentheorie der Binärformen bekannte) Eigenschaft: genügt irgend eine ganze Function f den Bedingungen

$$A(f) = kf \qquad B^{\lambda}(f) = 0 \qquad C^{\nu}(f) = 0$$

während $B^{\lambda-1}(f)$ und $C^{\nu-1}(f)$ nicht verschwinden, so ist (Art. IV) $k = \lambda - \nu$. Ist daher $k = 0$ und eine der beiden Zahlen λ, ν gleich eins, so ist auch die andere gleich eins. Jede ganze Function, die den Differentialgleichungen $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$ oder den Differentialgleichungen $A(f) = 0$ und $C(f) = 0$ genügt, genügt auch der Differentialgleichung $C(f) = 0$ beziehungsweise $B(f) = 0$.

Dies gilt, gleichviel ob die Variabeln x unabhängig variabel sind oder nicht, wenn nur im letzteren Fall die Relationen, an die sie gebunden sind, den Differentialgleichungen $A(f) = 0$ $B(f) = 0$ $C(f) = 0$ gegenüber invariantiv sind.

Um nun den im Eingang dieses Artikels angekündigten Beweis zu führen, stütze ich mich auf die folgenden Sätze von Killing über einfache Gruppen:[1])

Man kann die infinitesimalen Transformationen, durch die die einfache Gruppe G erzeugt wird, so wählen, dass eine gewisse Anzahl l derselben

$$C_{01}(f) \qquad C_{02}(f) \quad . \; . \; . \quad C_{0l}(f)$$

paarweise vertauschbar sind. Diese erzeugen eine l-gliedrige Untergruppe Γ. Die übrigen $r - l$, deren Anzahl nothwendig gerade ist, $C_1(f)$ $C_2(f) \, .. \, C_{r-l}(f)$ genügen Relationen der Form

$$C_{0\lambda} C_{\mu}(f) - C_{\mu} C_{0\lambda}(f) = \omega_{\lambda\mu} C_{\mu}(f) \quad \lambda = 1, 2, .. \, l; \; \mu = 1, 2, .. \, r - l$$

[1]) Math. Annalen, Bd. 33, S. 1 und Bd. 34, S. 187; vergl. auch die Thèse von Cartan: Sur la structure des groupes de transformations. Paris 1894.

Die Grössen $\omega_{\lambda_1}\,\omega_{\lambda_2}\ldots\omega_{\lambda\,r-l}$ sind, wenn die infinitesimalen Transformationen der Untergruppe Γ passend gewählt werden, alle unter einander verschieden. Jeder Transformation $C_\mu(f)$ ist eine zweite $C_{\mu'}(f)$ der Art zugeordnet, das $\omega_{\lambda\mu'} = -\omega_{\lambda\mu}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots l$. Es gibt eine in der Untergruppe Γ enthaltene infinitesimale Transformation $K_\mu(f)$, die den identischen Gleichungen genügt:

$$K_\mu C_\mu(f) - C_\mu K_\mu(f) = 2\,C_\mu(f)\quad K_\mu C_{\mu'}(f) - C_{\mu'} K_\mu(f) = -2C_{\mu'}(f)$$
$$C_\mu C_{\mu'}(f) - C_{\mu'} C_\mu(f) = K_\mu(f)$$

Unter diesen infinitesimalen Transformationen $K_\mu(f)$ gibt es l linear unabhängige; man kann also die Untergruppe Γ durch l von den Transformationen $K_\mu(f)$ erzeugen.

Aus diesen Sätzen ergibt sich bei Berücksichtigung des oben bewiesenen Hilfssatzes:

Die infinitesimalen Transformationen $C_\mu(f)$ sind alle regulär von der ersten Art, die infinitesimalen Transformationen $K_\mu(f)$ sind alle regulär von der zweiten Art.[1]

Man kann die l infinitesimalen Transformationen $C_{0\lambda}(f)$ so wählen, das eine jede regulär ist.

Unter dieser Voraussetzung sind die Grössen $\omega_{\lambda\mu}$ alle ganze Zahlen. Die $r - l$ infinitesimalen Transformationen $C_\mu(f)$ zerfallen in zwei Classen; die erste enthält die Transformationen, die positiven Zahlen $\omega_{\lambda\mu}$ entsprechen, die zweite die negativen Zahlen $\omega_{\lambda\mu'}$ entsprechenden. Von jedem Paar einander zugeordneter infinitesimaler Transformationen $C_\mu(f)$ $C_{\mu'}(f)$ gehört die eine zur ersten, die andere zur zweiten Classe. Die zur ersten Classe gehörigen $\frac{r-l}{2}$ infinitesimalen Transformationen erzeugen eine Untergruppe G^+ und ebenso erzeugen die zur zweiten Classe gehörigen eine Untergruppe G^-.[2]

Die Untergruppen G^+ und Γ zusammengenommenen bilden wieder eine Untergruppe H der Ordnung $\frac{r+l}{2}$.

[1]) Ich möchte beiläufig den bemerkenswerthen Satz hervorheben, dass jede einfache oder halb-einfache Gruppe linearer Substitutionen regulär ist.

[2]) Vergleiche meine schon erwähnte Arbeit, diese Berichte 1894.

Jede ganze Function, die der Untergruppe H gegenüber invariant ist, ist auch der Gesammtgruppe G gegenüber invariant, denn wenn eine ganze Function den Differentialgleichungen $K_\mu(f) = 0$ und $C_\mu(f) = 0$ genügt, so genügt sie auch der dritten Differentialgleichung des Tripels $C_{\mu'}(f) = 0$. Da nach Voraussetzung die Gruppe H ein endliches System ganzer Invarianten besitzt, so gilt dasselbe für die Gruppe G.

VII.

Im Vorangehenden ist bewiesen worden: alle ganzen Functionen, die einem System von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad C_1(f) = 0 \quad C_2(f) = 0 \quad \ldots \quad C_r(f) = 0$$

genügen, lassen sich als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen. Aber die Frage, unter welchen Bedingungen es überhaupt ganze Functionen gibt, die diesen Differentialgleichungen genügen, ist offen geblieben. Diese Frage soll noch kurz erörtert werden. Dabei beschränke ich mich aber auf den Fall, dass die Grössen $x_1 x_2 \ldots x_n$ als unabhängig variabel betrachtet werden.

Von den r Differentialgleichungen (1) können eine Anzahl — etwa $r - r'$ — eine Folge der übrigen sein.

Ich setze voraus, die Anzahl n der Variabeln x sei grösser als r' und ich halte an der Voraussetzung fest, die Gruppe G, die von den r infinitesimalen Transformationen $C_\varrho(f)$ erzeugt wird, sei regulär.

Unter diesen Voraussetzungen steht von vornherein die Existenz von $n - r'$ unter einander unabhängigen rationalen Functionen fest, die den Differentialgleichungen (1) genügen.

Es sei nun $J = \frac{\varphi}{\psi}$ eine derartige rationale Function, φ und ψ seien ganze Functionen. Diese Functionen müssen Differentialgleichungen der Form

$$C_\varrho(\varphi) = k_\varrho \varphi \qquad C_\varrho(\psi) = k_\varrho \psi \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r$$

genügen, wo die k_ϱ Constante sind. In zwei Fällen lässt sich nachweisen, dass die Constante k_ϱ gleich Null sein muss.

Nämlich erstens in dem Fall, dass die infinitesimale Transformation $C_\varrho(f)$ regulär von der ersten Art ist (vergl. Art. II). Den zweiten Fall betreffend ist zu bemerken: die infinitesimalen Transformationen

$$C_\sigma C_\tau(f) - C_\tau C_\sigma(f) \qquad \sigma, \tau = 1, 2, \ldots r$$

gehören sämmtlich der Gruppe G an und sie erzeugen eine ausgezeichnete Untergruppe derselben, „die Hauptuntergruppe", die übrigens auch mit der Gruppe G selbst zusammenfallen kann. Nun ist

$$C_\sigma C_\tau(\varphi) - C_\tau C_\sigma(\varphi) = 0$$

Es ist somit die Constante k_ϱ jedesmal gleich Null, wenn die infinitesimale Transformation $C_\varrho(f)$ der Hauptuntergruppe angehört.

Aus dem Vorangehenden ziehen wir den Schluss:

1. Wenn die Gruppe G keine reguläre infinitesimale Transformation zweiter Art enthält, die nicht zugleich der Hauptuntergruppe angehört, so gibt es $n - r'$ unter einander unabhängige ganze Invarianten der Gruppe.

2. Unter derselben Voraussetzung gilt auch der auf demselben Weg zu beweisende Satz:

Ist das Product von mehreren ganzen Functionen Invariante, so gilt dasselbe für jeden der Factoren.

Wenn dagegen die Gruppe G reguläre infinitesimale Transformationen zweiter Art enthält, die nicht der Hauptuntergruppe angehören, so gilt im Allgemeinen keiner dieser beiden Sätze. Man kann aber auch in diesem Fall die Analogie mit der Theorie der projectiven Invarianten aufrecht erhalten, indem man den in Art. II eingeführten Begriff der ausgezeichneten Functionen erweitert. Eine ganze Function φ werde als ausgezeichnet bezeichnet, wenn sie r Differentialgleichungen der Form

$$C_\varrho(\varphi) = k_\varrho\,\varphi \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r$$

genügt, wo die k_ϱ irgend welche ganze Zahlen sind.

Da diese ausgezeichneten Functionen Zähler und Nenner der rationalen Invarianten der Gruppe G bilden, so steht von vornherein die Existenz von $n - r' + 1$ unter einander unabhängigen derartigen Functionen fest.

Es gelten für sie die beiden Sätze:

1. Alle ausgezeichneten Functionen lassen sich als ganze Functionen einer endlichen Anzahl derselben darstellen und

2. Ist das Product von mehreren ganzen Functionen ausgezeichnete Function, so gilt dasselbe für jeden der Factoren.
