Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 2. November.*)

§ 1.

Es sei $\sum A_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius $|x| = 1$. Setzt man alsdann zunächst für $|x| < 1$:

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu = f(x),$$

so mag $f(x)$ für die Stellen $x = e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen durch unmittelbare analytische Fortsetzung und für etwaige singuläre Stellen $e^{\vartheta' i}$ als $\lim\limits_{\vartheta = \vartheta'} f(e^{\vartheta i})$ definirt sein, bezw. da, wo dieser Grenzwerth nicht existirt, als undefinirt gelten.

Convergirt nun die Reihe $\sum A_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ noch durchweg oder wenigstens im allgemeinen (das soll hier und im folgenden stets bedeuten: mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen), so ist für alle Convergenzstellen nach einem bekannten Abel'schen Satze:

$$(2) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu e^{\nu \vartheta i}$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu \vartheta + i \cdot \sin \nu \vartheta).$$

Andererseits ist $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen mit Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen ϑ' eine nicht nur stetige, sondern unbeschränkt differenzirbare Function der reellen Veränderlichen ϑ. Unter Hinzufügung der weiteren Annahme, dass jene singulären Stellen ϑ' die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ nicht alteriren sollen, muss sich daher $f(e^{\vartheta i})$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lassen:

$$(3) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\, d\lambda$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i}) \cos\nu\lambda\cdot d\lambda\cdot\cos\nu\vartheta + \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\sin\nu\lambda\cdot d\lambda\cdot\sin\nu\vartheta\right\}$$

Alsdann folgt aber aus einem bekannten Satze, dass die Coefficienten dieser Entwickelung keine anderen sein können, als die oben mit A_ν bezeichneten. Mit anderen Worten: Allemal wenn die *Potenzreihe* $\sum A_\nu x^\nu = f(x)$ für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen *convergirt* und $f(e^{\vartheta i})$ als *integrable* Function von ϑ definirt, so ist sie *identisch* mit der *Fourier*'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$.

Von den drei Voraussetzungen, unter welchen dieses Resultat hier ausgesprochen wurde, nämlich:

1) der endlichen Anzahl der singulären Stellen von $f(e^{\vartheta i})$,

2) der durchgängigen Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$,

3) der Convergenz von $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$, —

lässt sich die erste ohne weiteres beseitigen, wie die Untersuchungen von Du Bois Reymond über die Darstellbarkeit einer beliebigen trigonometrischen Reihe als Fourier'sche Reihe lehren,[1]) sofern nur die Voraussetzungen 2) und 3)

[1]) „Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe etc." Abh. der Bayer. Akademie, Bd. XII (1875). Vgl. insbesondere p. 43.

bestehen bleiben. Da indessen die besonderen Eigenthümlichkeiten, von welchen hier gesprochen werden soll, schon bei Functionen mit einer endlichen Anzahl von Singularitäten zum Vorschein kommen, so soll im folgenden immer nur von solchen die Rede sein.

Auch die zweite Voraussetzung kann man bis zu einem gewissen Grade fallen lassen. Wie nämlich Riemann gezeigt hat,[1]) schliesst das Auftreten gewisser Unendlichkeitsstellen, welche die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben, dennoch die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe nicht aus. Es sind das solche Stellen ϑ', für welche $f(e^{\vartheta i})$ ohne Maxima und Minima von niederer Ordnung als der ersten unendlich wird (NB. wenn auch nicht von hinlänglich niedrigerer Ordnung, um die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ zu sichern) und für welche $f(e^{(\vartheta' + \vartheta) i}) + f(e^{(\vartheta' - \vartheta) i})$ integrabel ist. Freilich werden in diesem Falle die Integrale, welche die Coefficienten in der Fourier'schen Form darzustellen hätten, in dem gemeinhin üblichen Sinne divergent. Sie behalten jedoch ihre richtige Bedeutung, wenn man ihre Hauptwerthe im Cauchy'schen Sinne nimmt, d. h. wenn man setzt:

$$\int_a^b \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta = \lim_{\varepsilon = 0} \left\{ \int_a^{\vartheta' - \varepsilon} \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta + \int_{\vartheta' + \varepsilon}^b \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta \right\}.$$

Und mit Hinzufügung dieser Modification bleibt, wie Du Bois Reymond gezeigt hat,[2]) die Eindeutigkeit der Coefficienten-Bestimmung, also die Identität zwischen trigonometrischer beziehungsweise Potenz-Reihe einerseits und Fourier'scher Reihe andererseits bestehen. Ich möchte derartige Reihen als uneigentliche Fourier'sche Reihen

[1]) „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", Art. 12. (Ges. Werke, p. 244, 245.)

[2]) a. a. O. Art. 24, p. 37 ff.

bezeichnen und benütze diese Gelegenheit, um ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe mitzutheilen (s. § 5 dieses Aufsatzes), bei welcher die Convergenz durch ganz elementare Rechnung direct erwiesen werden kann, während die Divergenz der Coefficienten in der Fourier'schen Integralform ohne weiteres aus der Form der zu entwickelnden Function hervorgeht.

Im übrigen bleibt hier noch die Frage offen, ob die durch die convergente Reihe $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ nicht auch solche Singularitäten besitzen könnte, welche, ohne zu der eben betrachteten Kategorie zu gehören, die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben und damit die Darstellbarkeit der Reihen-Coefficienten in der Fourier'schen Form unmöglich machen würden? Ob dieser Fall in Wirklichkeit eintreten kann, muss vorläufig dahingestellt bleiben: das Gegentheil ist wenigstens, so viel ich weiss, bisher nicht bewiesen worden. —

Was nun endlich jene dritte — die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ verlangende — Voraussetzung betrifft, so dürfte man vielfach der Ansicht begegnen, dass man dieselbe ohne weiteres fallen lassen könne, sobald nur die Entwickelbarkeit von $f(e^{\vartheta i})$ in eine convergente Fourier'sche Reihe feststeht, und dass man geradezu aus der Existenz dieser letzteren auf die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ (und damit eo ipso auf die Identität der betreffenden beiden Reihen) schliessen dürfe. So sagt z. B. Herr Darboux in seinem „Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc." ganz ausdrücklich[1]): „Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est dé-

[1]) Journal de Mathém. 3ième Série, T. IV, p. 13.

veloppable en série trigonométrique,[1]) la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite." Dieser Ausspruch stammt zwar schon aus dem Jahre 1878, d. h. indessen immerhin aus einer Zeit, in welcher die in den Arbeiten der Herren Christoffel[2]), Prym[3]) und Schwarz[4]) (1871/72) zu Tage tretende schärfere Prüfung der Grundlagen des sog. Dirichlet'schen Principes bereits gegründete Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der obigen Behauptung hervorrufen konnte. Im übrigen glaube ich, dass auch heute noch viele Mathematiker jene Darboux'sche Ansicht theilen und die Frage nach der Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise schlechthin mit derjenigen nach der Entwickelbarkeit der betreffenden Randfunction in eine Fourier'sche Reihe identificiren. Eine strengere Behandlung dieser Frage ist mir nur in den Arbeiten des Herrn Thomé über lineare Differentialgleichungen[5]) und einer daran anknüpfenden Abhandlung „Ueber Convergenz und Divergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise" [6]) begegnet. Hier wird vor allem bewiesen, dass unter den über die Natur der singulären Stellen

---

[1]) Hierunter ist immer, wie aus dem ganzen Zusammenhange unzweideutig hervorgeht, eine Fourier'sche Reihe zu verstehen.

[2]) Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1871, p. 435.

[3]) Zur Integration der Differential-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 73, p. 360.

[4]) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 74, p. 218.

[5]) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen — Journ. f. Math. Bd. 91, p. 222 ff. s. besonders Art. 4, 9, 10. —. Desgl. Bd. 95, p. 44 ff. s. Art. 8.

[6]) Journ. f. Math. Bd. 100, p. 167.

gemachten Voraussetzungen die Coefficienten der Potenzreihe wirklich identisch sind mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten der Randfunction, und sodann erst aus der Convergenz dieser Fourier'schen Reihe auf diejenige der (auf dem Convergenzkreise mit ihr identischen) Potenzreihe geschlossen. Obschon nun aus dieser Art der Beweisführung die Meinung des Verfassers deutlich hervorgeht, dass es Fälle geben könnte, in denen die fragliche Schlussweise nicht zutrifft, so ist es doch weder hier, noch auch, so viel ich weiss, in anderen Arbeiten, deren Gegenstand dies nahe gelegt hätte,[1]) direct ausgesprochen worden, dass es derartige Fälle — und zwar solche von verhältnissmässig einfacher Natur — wirklich auch giebt. Ich will nun in diesem Aufsatze zeigen:

Es giebt thatsächlich Potenzreihen, welche auf ihrem Convergenzkreise *divergiren*, obschon die zugehörige Randfunction in eine convergente *Fourier*'sche Reihe entwickelt werden kann.

In den folgenden beiden Paragraphen theile ich zunächst die allgemeinen Ueberlegungen mit, welche mich zur Construction derartiger Functionen geführt haben und die sodann in § 4 zur Bildung bestimmter Beispiele benützt werden sollen.

§ 2.

Es seien die beiden Reihen:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \sum_{0}^{\infty} \nu\,(a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta) \\ \psi(\vartheta) = \sum_{0}^{\infty} \nu\,(-b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta) \end{cases}$$

---

[1]) z. B. Harnack, Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. — Math. Ann. Bd. 21, p. 305.

für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ durchweg oder wenigstens im allgemeinen convergent; dabei sollen die Coefficienten a_ν, b reelle Grössen von der Beschaffenheit sein, dass für $\nu = \infty$ der Grenzwerth bezw. die obere Unbestimmtheitsgrenze von mindestens einer der beiden Grössen $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, $|b_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ den Werth 1 hat, während der entsprechende Werth für die andere dieser Grössen auch < 1 sein darf. Setzt man sodann:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu + b_\nu i) \cdot x^{-\nu} = f_1(x),$$

so convergirt diese Reihe für $|x| > 1$, sie divergirt für $|x| < 1$, während sie für $|x| = 1$ übergeht in:

$$(3) \qquad \begin{aligned} f_1(e^{\vartheta i}) &= \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu + b_\nu i)(\cos \nu\vartheta - i \cdot \sin \nu\vartheta) \\ &= \varphi(\vartheta) - i \cdot \psi(\vartheta) \end{aligned}$$

also in Folge der gemachten Voraussetzung auf dem Convergenzkreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt.

Angenommen nun, $f_1(x)$ lasse sich über das gesammte Innere des Einheits-Kreises als eindeutige analytische Function ohne singuläre Stellen fortsetzen, so muss eine für $|x| < 1$ convergirende Potenzreihe existiren, deren Summe $f_1(x)$ ist, also:

$$(4) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu \qquad (|x| < 1).$$

Es ist nun leicht zu ersehen, dass diese Potenzreihe auf dem Einheitskreise nicht convergiren kann. Denn wäre dies der Fall, so hätte man:

$$(5) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

und die Vergleichung mit (3) würde ergeben, dass gleichzeitig:

$$A_\nu = a_\nu + b_\nu i \quad \text{und} \quad A_\nu = -(a_\nu + b_\nu i)$$

sein müsste, was unmöglich ist.

Man hätte also auf diese Weise in der That eine Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ gewonnen, welche die oben verlangte Eigenschaft hat, auf dem Einheitskreise zu divergiren, obschon daselbst eine convergente trigonometrische Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ vorhanden ist.

Diese letztere besitzt hier in gewisser Beziehung noch einen ganz speciellen Charakter: sie bildet nämlich die Grenze der Entwickelung von $f_1(x)$ nach negativen Potenzen von x. Man erkennt indessen, dass diese Eigenschaft durchaus unwesentlich und in Wahrheit auch leicht zu beseitigen ist. Bezeichnet man nämlich mit $f_2 x = \sum B_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe, deren Convergenzradius $\varrho \geq 1$ ist, und die im Falle $\varrho = 1$ auf dem Einheitskreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt, so wird offenbar die Reihe:

$$(6) \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu + B_\nu) \cdot x^\nu$$

für $x = e^{\vartheta i}$ gerade so divergiren, wie die Reihe $f_1(x)$, während

$$(7) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu \left\{ (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i} + B_\nu \cdot e^{\nu\vartheta i} \right\}$$

wird, und diese convergirende trigonometrische Reihe jetzt nicht mehr die Grenze der Entwickelung von $f(x)$ nach negativen, und im Falle $\varrho = 1$ auch nicht diejenige der Entwickelung von $f(x)$ nach positiven und negativen Potenzen von x bildet. Man erzielt dies z. B. am einfachsten, wenn man speciell setzt:

$$(8) \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu - b_\nu i) \cdot x^\nu$$

also:

$$(9) \qquad f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu - b_\nu i)(\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$
$$= \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta),$$

in welchem Falle dann $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ auf dem Einheitskreise durch die trigonometrische Reihe $2\,\varphi(\vartheta)$ bezw. $2\,i \cdot \psi(\vartheta)$ dargestellt wird.

Durch die vorstehende Betrachtung ist die Möglichkeit, Reihen der gedachten Art zu construiren, erwiesen, sobald es gelingt, Reihen nach negativen Potenzen von x, wie die oben mit $f_1(x)$ bezeichnete, herzustellen, welche auf dem Einheitskreise convergiren und in das Innere als eindeutige, durchweg reguläre Functionen von x fortgesetzt werden können. Um dies zu erreichen, wird man natürlich zunächst nicht wie oben von irgend einer bestimmten Annahme bezüglich der Coefficienten a_ν, b_ν ausgehen können, sondern vielmehr von einer Feststellung der Singularitäten, welche für $f_1(x)$ auf dem Einheitskreise erforderlich und zulässig erscheinen. Man erkennt aber ohne weiteres, dass hierbei ausserwesentlich singuläre Stellen, sowie algebraische und logarithmische Verzweigungspunkte jedenfalls von vornherein auszuschliessen sind, da die ersteren die Divergenz von $\sum (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i}$ nach sich ziehen, die letzteren die eindeutige Fortsetzbarkeit von $f_1(x)$ verhindern würden. Als möglicherweise zulässig bleiben daher nur wesentlich singuläre Stellen, welche noch die besondere Eigenschaft besitzen müssen, dass $f_1(x)$, falls die Variable x von aussen her oder längs der Peripherie des Einheitskreises sich einer solchen Stelle nähert, unter einer endlichen Grenze oder zum mindesten integrabel bleibt.

Der Einfluss, den eine derartige, auf dem Convergenzkreise einer Potenzreihe angenommene singuläre Stelle auf deren Convergenz und Divergenz ausübt, soll nun zunächst genauer untersucht werden.

§ 3.

Es sei $f(x)$ eindeutig und regulär für $|x| < R$, wo $R > 1$, mit Ausnahme einer einzigen Stelle auf dem Einheitskreise $x = a = e^{\alpha i}$. Bezüglich der Beschaffenheit dieser singulären Stelle $x = a$ unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

I. Es sei $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. das Integral $\int_{x_0}^{a} |f(x)| \cdot dx$ werde in diesem Falle mit $|x_0 - a|$ beliebig klein — eine Bedingung, welche z. B. stets erfüllt ist, wenn $|f(x)|$ im Innern und auf der Peripherie des Einheitskreises in jeder beliebigen Nähe der Stelle a stets unter einer festen Grenze bleibt.

Alsdann lässt sich zeigen, dass die zunächst für $|x| < 1$ geltende Potenzreihe für $f(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} A_\nu x^\nu$ noch für $|x| = 1$ mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = a$ convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist.

Um dies nachzuweisen, denke man sich den Einheitskreis (E) construirt und die Stelle a mit einem Kreise (K) von beliebig klein anzunehmendem Radius ϱ umgeben. Bezeichnet man sodann mit (C) diejenige Curve, welche aus dem Einheitskreise (E) entsteht, wenn man das kleine durch den Kreis (K) ausgeschnittene Bogenstück (e) durch das entsprechende, innerhalb (E) verlaufende Bogenstück (k) von (K) ersetzt, so hat man für alle Stellen x im Innern von (C), also sicher für $|x| < 1 - \varrho$:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wobei das Pluszeichen vor C die positive Integrationsrichtung andeuten soll. Da aber in Folge der gemachten Voraussetzung der von dem Bogenstücke (k) herrührende Bestandtheil dieses Integrals, gerade so wie ein über (e) zu erstreckendes mit (k) und (e) — also schliesslich mit ϱ — beliebig klein wird, und da andererseits $f(x)$ einen eindeutig bestimmten, von ϱ unabhängigen Werth hat, so kann man ohne weiteres das Integral über (k) durch das entsprechende über (e) ersetzen und erhält somit an Stelle der Beziehung (1) jetzt für $|x| < 1$ die folgende:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt, \tag{2}$$

und hieraus in der üblichen Weise:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} A_\nu x^\nu \tag{3}$$

wo:

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta \\ A_\nu &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{-\nu\eta i} \cdot d\eta \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Dabei lassen sich diese Coefficienten A_ν noch in folgender Weise umformen. Bezeichnet man wieder mit (C) den oben definirten Integrationsweg, so hat man offenbar:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, da man hier wieder genau wie oben den Integrationsweg (C) durch den Weg (E) ersetzen kann:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{\nu\eta i} \cdot d\eta = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

Durch Addition und Subtraction dieser letzten Gleichung lässt sich daher A_ν in die doppelte Form setzen:

$$(6)\quad A_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und man erhält daher, wenn man $x = r\cdot e^{\vartheta i}$ setzt und $r < 1$ annimmt, aus Gl. (3) die Entwickelung:

$$(7)\ f(r\cdot e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_\nu\, r^\nu\cdot\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu(\eta-\vartheta)\cdot d\eta$$

Andererseits muss sich $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen in eine mit eventuellem Ausschluss der einzigen Stelle $\vartheta = a$ convergirende Fourier'sche Reihe entwickeln lassen, nämlich:

$$(8)\quad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_\nu\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu(\eta-\vartheta)\cdot d\eta$$

und da die Reihe (7) für $r = 1$ in diese letztere übergeht, so folgt, dass in dem hier betrachteten Falle die Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ noch für $x = e^{\vartheta i}$ (mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$, $\vartheta = a$) convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist. —

II. Es sei jetzt $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, wenn der Integrationsweg dem Aeusseren oder der Peripherie des Einheitskreises angehört.

Für das Gebiet $1 < |x| < R$ existirt alsdann nach dem Laurent'schen Satze eine Entwickelung von der Form:

$$(9)\qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu + \sum_{1}^{\infty} A_{-\nu} x^{-\nu},$$

wobei die Reihe der positiven Potenzen (welche sich auf die Constante A_0 reducirt, wenn $f(x)$ überhaupt keine weitere singuläre Stelle ausser $x = a$ besitzt) für $|x| < R$, also insbesondere noch für $|x| = 1$ absolut convergirt. Setzt man also Gl. (9) in die Form:

$$(10)\qquad \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} A_{-\nu} x^{-\nu} = f(x) - \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu$$

so folgt mit Hülfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ aus dem Ergebnisse des Falles I ohne weiteres, dass $\sum A_{-\nu} x^{-\nu}$ noch auf dem Einheitskreise — mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$ — convergiren muss. Das Gleiche gilt somit von der Gesammtreihe (9), woraus dann auch wiederum die Identität von $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ sich ergiebt.

Daraus kann man aber mit Hilfe der in § 2 angestellten Betrachtung weiter schliessen, dass die im Innern des Einheitskreises geltende Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x auf dem Einheitskreise divergiren muss.

Um die Beschaffenheit dieser letzteren Reihe und ihre Beziehung zu der Fourier'schen Entwickelung von $f(e^{\vartheta i})$ genauer festzustellen, hat man auch hier wiederum für $|x| < 1 - \varrho$ zunächst:

$$(11)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$$

(wo ϱ und (C) die in I angegebene Bedeutung haben). Bezeichnet man sodann mit (k') das ausserhalb des Einheitskreises verlaufende Bogenstück des kleinen Kreises um a, so kann hier offenbar das über den aus (e) und (k') zusammengesetzten, geschlossenen Weg erstreckte Integral: $\int \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$ durch Verkleinerung von ϱ beliebig klein gemacht werden, muss also, da es einen von ϱ unabhängigen, bestimmten Werth besitzt, gleich Null sein. Addirt man dieses Integral zu dem in Gl. (11), so ergiebt sich:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt \tag{12}$$

für $|x| < 1 - \varrho$, bezw. für $|x| < 1$, wenn man schliesslich ϱ unendlich klein werden lässt.

Um zunächst das zweite Integral auszuwerthen, hat man:

$$\frac{1}{t-x} = -\frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-a}{x-a}} = -\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{(t-a)^{\nu-1}}{(x-a)^{\nu}}$$

und daher:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (x-a)^{-\nu} \cdot \int_{(+K)} f(t) \cdot (t-a)^{\nu-1} \cdot dt \\ &= \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} C_{-\nu} \cdot (x-a)^{-\nu}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Die rechte Seite lässt sich in eine für $|x| < |a|$ d. h. für $|x| < 1$ convergirende Reihe nach positiven Potenzen von x entwickeln, so dass sich ergiebt:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} B_{\nu} x^{\nu}, \tag{14}$$

wo:

$$B_{\nu} = \sum_{1}^{\infty}{}^{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \cdot (\varkappa + \nu - 1)_{\nu} \cdot C_{-\varkappa} a^{-(\varkappa+\nu)}. \tag{15}$$

Ferner hat man für $|x| < 1$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} B'_{\nu} x^{\nu} \tag{16}$$

wo:

$$(17)\begin{cases} B'_0 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{(+E)} \dfrac{f(t)}{t}\cdot dt = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta \\[2ex] B'_\nu = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{+E} \dfrac{f(t)}{t^{\nu+1}}\cdot dt = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{-\nu\eta i}\cdot d\eta \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Hiernach liefert Gl. (12) für $|x| < 1$ die folgende Entwickelung:

$$(18) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu + \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}(x-a)^{-\nu} \\ &= \sum_0^\infty{}^\nu (B'_\nu + B_\nu)\cdot x^\nu, \end{aligned}$$

deren zweiter Theil, wie die Form der Coefficienten $C_{-\nu}$ (s. Gl. (13)) lehrt, die Gesammtheit derjenigen Bestandtheile enthält, welche die Stelle a zu einer (wesentlich) singulären machen: es sind nämlich die Coefficienten $C_{-\nu}$ genau diejenigen, welche man als Coefficienten der negativen Potenzen von $x - a$ erhalten würde, wenn man $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ nach dem Laurent'schen Satze entwickelt. Hieraus folgt aber, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu = f(x) - \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}(x-a)^{-\nu}$$

noch für $x = a$, also schliesslich auf dem ganzen Einheitskreise sich regulär verhält. Sie besitzt somit einen Convergenzradius, der grösser als 1 sein muss (nämlich den Convergenzradius R[1])), so dass sie insbesondere für $|x| = 1$

---

[1]) Dabei ist $R = \infty$, wenn $f(x)$ keine weiteren singulären Stellen im Endlichen besitzt; und falls auch die Stelle $x = \infty$ keine singuläre ist, so reducirt sich jene Reihe auf das constante Anfangsglied:

$$\begin{aligned} B'_0 &= f(o) - \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}\cdot(-a)^{-\nu} \\ &= f(o) - B_0. \end{aligned}$$

noch absolut convergirt. Da aber die Gesammt-Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x, wie oben bemerkt, für $|x| = 1$ divergirt, so erkennt man, dass diese Divergenz ausschliesslich von jenem zweiten Bestandtheile $\sum_0^\infty{}^\nu B_\nu x^\nu$ herrührt.

Es lässt sich aber auch genau angeben, welche convergente Entwickelung für $x = e^{\vartheta i}$ an die Stelle jenes divergenten Bestandtheils tritt, dergestalt dass für $f(e^{\vartheta i})$ schliesslich eine convergente trigonometrische — nämlich die Fourier'sche — Reihe zu Stande kommt.

Hierzu bemerke man, dass die Coefficienten B'_ν zwar in (17) zunächst genau in derselben Integralform erscheinen, wie die A_ν im Falle I (s. Gl. (4)): aber es ist a priori klar, dass sie nicht, wie jene, mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten von $f(e^{\vartheta i})$ identisch sein können. Um den Zusammenhang mit diesen letzteren aufzuklären, hat man die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wofür man wiederum, analog wie oben, schreiben kann:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt$$

$$(19) \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{\nu\eta i}\cdot d\eta - D_\nu,$$

wo:

$$D_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} (a+(t-a))^{\nu-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\nu{}_\varkappa \int_{(K)} (\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot a^{\nu-\varkappa}\cdot (t-a)^{\varkappa-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$(20) \qquad D_\nu = \sum_1^\nu \varkappa (\nu - 1)_{\varkappa-1} C_{-\varkappa} \cdot a^{\nu-\varkappa}.$$

Durch Addition bezw. Subtraction von Gl. (17) und (19) folgt alsdann:

$$(21) \qquad B'_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta - D_\nu \\ \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta + D_\nu, \end{cases}$$

so dass die Entwickelung (18) für $x = r \cdot e^{\vartheta i}$ und $r < 1$ sich folgendermaassen schreiben lässt:

$$(22) \quad f(r e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \nu r^\nu \cdot \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$
$$- \sum_1^\infty \nu D_\nu r^\nu e^{-\nu\vartheta i} + \sum_0^\infty \nu B_\nu r^\nu \cdot e^{\nu\vartheta i}.$$

Da andererseits:

$$(23) \quad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

und in Gl. (22) für $r = 1$ alles mit Ausnahme des letzten Bestandtheils convergent bleibt, so folgt:

$$(24) \qquad \lim_{r=1} \left\{ \sum_0^\infty \nu B_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i} \right\} = \sum_1^\infty \nu D_\nu e^{-\nu\vartheta i},$$

womit die gesuchte Grenz-Entwickelung von $\sum B_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ gefunden ist.

§ 4.

I. Setzt man jetzt:

$$(1) \qquad f_1(x) = e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\,[1],$$

so erfüllt offenbar die einzige singuläre Stelle $x = 1$ dieser Function die im Art. I des vorigen Paragraphen eingeführten Bedingungen. Man hat nämlich, um das Verhalten von $f_1(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu erkennen:

$$(2) \qquad f_1(1 + \xi + \eta i) = e^{1 + \frac{\xi - \eta i}{\xi^2 + \eta^2}}$$

also:

$$(3) \qquad |f_1(1 + \xi + \eta i)| = e^{1 + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Gehört nun die Stelle $x = 1 + \xi + \eta i$ noch dem Innern des Einheitskreises an, so ist ξ wesentlich negativ und daher — was auch η bedeuten möge — stets: $|f_1(x)| < e$.

Gehört hingegen x der Peripherie des Einheitskreises an, so möge gesetzt werden $x = e^{\vartheta i}$, also:

$$x + 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} + e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2 e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$x - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2 i e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}$$

und:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}$$

folglich:

$$(4) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) \right\},$$

[1] Der Factor e ist nur hinzugefügt, um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Entwicklungs-Coefficienten zu erhalten (s. Gl. (9)).

so dass also in diesem Falle $|f_1(x)| = e^{\frac{1}{2}}$ wird — auch in beliebiger Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ d. h. $x = 1$.

Es muss daher nach Art. I des vorigen Paragraphen die zunächst für $|x| < 1$ geltende Entwickelung:

$$f_1(x) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu \tag{5}$$

noch für $|x| = 1$ — mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$ — convergiren, d. h. es gilt die Entwickelung:

$$f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot \frac{\vartheta}{2}} = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta) \tag{6}$$

für $0 < \vartheta < 2\pi$, und dieselbe ist mit der Fourier'schen Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ identisch.

Daraus folgt dann noch insbesondere, dass die Reihe für $\vartheta = 0$ divergirt.

Was die Coefficienten A_ν betrifft, so findet man aus:

$$e \cdot e^{\frac{1}{x-1}} = e \cdot \sum_0^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} (1-x)^{-\varkappa}$$

$$= e \left(1 + \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \sum_0^\infty {}^\nu (\varkappa + \nu - 1)_\nu \, x^\nu \right)$$

unmittelbar für $\nu \geqq 1$:

$$A_\nu = e \cdot \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\varkappa + \nu - 1)_\nu \tag{7}$$

$$= e \cdot \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} (\varkappa + \nu - 1)_{\varkappa - 1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und speciell: $A_0 = e \cdot \sum_0^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} = 1$. Man kann aber auch die hier in Form unendlicher Reihen erscheinenden Grössen A_ν mit Hülfe der Mac Laurin'schen Entwickelung in geschlossener Form darstellen.

Man findet auf diese Weise:

$$A_0 = f_1(0) = 1$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$A_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot f_1^{(\nu)}(0) = \frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \left(\frac{d^\nu e^{\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu}\right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu}\right)_{y=-1}.$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot \frac{d^\nu \varphi(y)}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \frac{d^\nu (y^{\nu-1} \cdot \varphi(y))}{d y^\nu}$$

$$= (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \sum_1^\nu \varkappa\, \nu_\varkappa \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\varkappa-1)!} \cdot y^{\varkappa-1} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

(8) $$= (-1)^\nu \cdot \sum_1^\nu \varkappa \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

und daher:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot e^{1+y} \cdot \sum_1^\nu \varkappa \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa},$$

also schliesslich:

(9) $$A_\nu = \sum_1^\nu \varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

II. Die Function:

(10) $$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = e \cdot e^{\frac{x}{x-1}},$$

welche zu der eben betrachteten in der zwiefachen Beziehung steht:

(11) $$f_2(x) = \begin{cases} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ e \cdot \dfrac{1}{f_1(x)} \end{cases},$$

genügt, wie leicht zu sehen, den in Art. II des vorigen Paragraphen statuirten Bedingungen. Da nämlich:

$$(12) \qquad f_2(1 + \xi + \eta i) = e^{-\frac{\xi - \eta i}{\xi^2 + \eta^2}}$$

also:

$$(13) \qquad |f_2(1 + \xi + \eta i)| = e^{-\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}$$

so wächst dieser absolute Betrag über alle Grenzen, falls $|\eta| \leq k \cdot |\xi|$ (k eine endliche positive Zahl) und ξ negativ, numerisch sehr klein genommen wird, also wenn x auf irgend einer geraden Linie aus dem Innern des Einheitskreises sich der Stelle 1 nähert. Da im übrigen $|f_2(x)|$, wie die erste der Beziehungen (11) lehrt, für Stellen ausserhalb oder auf der Peripherie des Einheitskreises auch in beliebiger Nähe der Stelle $x = 1$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus Art. II des vorigen Paragraphen, dass die für $|x| < 1$ geltende Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x| = 1$ divergiren muss, während andererseits $f_2(e^{\vartheta i})$ durch eine convergente trigonometrische Reihe mit ganz neuen Coefficienten darstellbar ist. Um diese letztere zu finden, kann man ohne weiteres die Formel (24) des vorigen Paragraphen anwenden. Man hat — unter Beibehaltung der dort angewendeten Bezeichnungen:

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} (x-1)^{-\nu}$$

also:

$$C_{-\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}$$

und daher (nach § 3, Gl. (20)):

$$D_\nu = \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} (\nu - 1)_{\varkappa - 1} \quad \text{d. h.} = A_\nu \text{ (Gl. (9))},$$

so dass jene Gl. (24) hier lauten würde:

$$\lim_{r=1} \left\{ \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu r^\nu e^{\nu \vartheta i} \right\} = \sum_1^\infty {}^\nu A_\nu e^{-\nu \vartheta i}. \tag{14}$$

Beachtet man jetzt noch, dass die in § 3 mit B'_ν bezeichneten Grössen für $\nu \geqq 1$ sämmtlich Null sind (da $f_2(x)$ keine singuläre Stelle ausser $x = 1$ besitzt) und dass (§ 3, Fussnote):

$$B'_0 = f_2(0) - \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} = e - (e-1) = 1 = A_0,$$

so kann man Gl. (14) mit Hinzufügung des Gliedes B'_0 folgendermaassen schreiben:

$$f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu \vartheta - i \cdot \sin \nu \vartheta), \tag{15}$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit man mit Hülfe der Gleichungen (11) und (6) sofort verificiren kann.

Es scheint mir auch nicht ohne Interesse, die aus den allgemeinen Ergebnissen des vorigen Paragraphen hergeleitete Divergenz der Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x| = 1$ nachträglich noch durch die Rechnung direct zu bestätigen.

Es werde gesetzt für $|x| < 1$:

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu x^\nu \tag{16}$$

(wobei also jetzt das im allgemeinen Falle und oben mit $B'_0 + B_0$ bezeichnete constante Glied der Einfachheit halber mit B_0 bezeichnet ist).

Alsdann hat man $B_0 = f_2(0) = e$ und für $\nu \geqq 1$ zunächst:

$$B_\nu = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^{-\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu} \right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^{-y}}{d \left(\frac{1}{y}\right)^\nu} \right)_{y=-1},$$

also mit Benützung von Gl. (8):

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu\cdot e^{-y}\cdot\sum_1^\nu{}^{\varkappa}(-1)^\varkappa\cdot\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot y^{\nu+\varkappa}$$

schliesslich:

$$(17)\qquad B_\nu = e\cdot\sum_1^\nu{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

Da hiernach:

$$B_\nu > e\left(1+\frac{\nu-1}{2}\right),$$

so wird mit $\nu=\infty$ auch $\lim B_\nu=\infty$, was dann nothwendig die Divergenz von $\sum B_\nu x^\nu$ für $|x|=1$ zur Folge hat.

III. Die soeben betrachtete trigonometrische Reihe für $f_2(e^{\vartheta i})$ convergirte mit Ausschluss der einen Stelle $\vartheta=0$. Man kann indessen aus den Ausdrücken $f_1(x)$, $f_2(x)$ leicht neue bilden, deren trigonometrische Entwickelung auf dem Einheitskreise ausnahmslos convergirt, während die betreffende Potenzreihe dort divergirt.

Setzt man zunächst:

$$(18)\qquad \begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x) - f_2(x) \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} - e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}}\right\} \\ &= 2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2i}\cdot\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

so wird die für $|x|<1$ geltende Potenzreihe:

$$(19)\qquad f_3(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu - B_\nu)\cdot x^\nu$$

wiederum für $x=e^{\vartheta i}$ divergiren. Dagegen wird die Reihe:

$$(20)\quad f_3(e^{\vartheta i}) = -2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) = 2i\sum_1^\infty{}^\nu A_\nu\cdot\sin\nu\vartheta$$

jetzt auch noch für $\vartheta = 0$, also ausnahmslos convergiren. Sie convergirt freilich in der Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ ungleichmässig — wegen der unendlich vielen Maxima und Minima, welche $f_3(e^{\vartheta i})$ daselbst besitzt.

Indessen auch diese Eigenschaft lässt sich noch beseitigen. Ich setze:

$$F_1(x) = (x-1)\cdot f_1(x) \tag{21}$$

so hat man für $|x| < 1$ nach Gl. (5):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (x-1)\cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} A_\nu x^\nu \\ &= -A_0 + \sum_0^\infty{}^{\nu} (A_\nu - A_{\nu+1})\, x^{\nu+1} \end{aligned} \tag{22}$$

und nach § 3, Art. I für $0 < \vartheta < 2\pi$:

$$\begin{aligned} F_1(e^{\vartheta i}) &= 2i\cdot\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\left(\vartheta-\cot\frac{\vartheta}{2}\right)} \\ &= -A_0 + \sum_0^\infty{}^{\nu}\left(A_\nu - A_{\nu+1}\right)\cdot e^{(\nu+1)\vartheta i}. \end{aligned} \tag{23}$$

Diese Reihe convergirt aber auch noch für $\vartheta = 0$ — nämlich gegen den Werth Null (da in Folge der bewiesenen Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ offenbar $\lim_{\nu=\infty} A_\nu = 0$ sein muss). Sie convergirt somit ausnahmslos und, da sie mit der Fourier'schen Reihe für die stetige Function $F_1(e^{\vartheta i})$ identisch ist, auch durchweg gleichmässig.

Betrachtet man nun ferner die Function:

$$F_2(x) = (x-1)\cdot f_2(x) \tag{24}$$

so wird für $|x| < 1$:

$$F_2(x) = (x-1)\sum_0^\infty{}^{\nu} B_\nu x^\nu = -B_0 + \sum_0^\infty{}^{\nu}(B_\nu - B_{\nu+1})\cdot x^{\nu+1} \tag{25}$$

und diese Reihe muss wiederum nach § 3, Art. II für $x = e^{\vartheta i}$ divergiren (da ja der Charakter der singulären Stelle $x = 1$ durch den Factor $(x - 1)$ keine wesentliche Veränderung erleidet).

Andererseits hat man aber für $|x| > 1$ nach Gl. (11) und (5):

$$F_2(x) = (x - 1) \cdot f_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= (x - 1) \cdot \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^{-\nu}$$

$$(26) \qquad = A_0 x - \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot x^{-\nu}$$

und da nach § 3, Art. I diese Reihe noch für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen convergiren muss:

$$(27) \qquad F_2(e^{\vartheta i}) = A_0 e^{\vartheta i} - \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot e^{-\nu\vartheta i}.$$

Die Vergleichung mit der Reihe (23) zeigt dann aber ohne weiteres, dass auch diese Reihe ausnahmslos und durchweg gleichmässig convergiren muss.

Hieraus erkennt man also, dass selbst in dem Falle, wo die Randfunction in eine ausnahmslos gleichmässig convergirende trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, man noch keineswegs ohne weiteres auf die Convergenz der im Innern geltenden Potenzreihe für die Stellen des Convergenzkreises schliessen darf.

§ 5.

Während das Charakteristische der in Art. II und III des vorigen Paragraphen betrachteten Beispiele darin bestand, dass die betreffenden Potenzreihen auf dem Convergenzkreise divergiren, obschon die zugehörige Randfunction durch eine convergente Fourier'sche Reihe darstellbar ist, will ich jetzt, wie in § 1 angekündigt wurde, ein Beispiel einer Potenzreihe geben, welche nachweislich auf dem Convergenzkreise (mit Ausschluss einer einzigen Stelle) noch convergirt, wohingegen die Existenz einer „eigentlichen" Fourier'sche Reihe, d. h. einer solchen mit schlechthin convergenten Integral-Coefficienten (vgl. § 1) nach der Natur der dargestellten Function definitiv ausgeschlossen erscheint.

Ich setze:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)\,lg\,(1-x)} \tag{1}$$

also für $|x| < 1$:

$$f(x) = \frac{\sum_0^\infty {}^\nu\, x^\nu}{\sum_0^\infty {}^\nu\, \frac{x^\nu}{\nu+1}} = \sum_0^\infty {}^\nu\, a_\nu\, x^\nu \tag{2}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \left(\frac{a_0}{\nu+1} + \frac{a_1}{\nu} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}}{2} + \frac{a_\nu}{1}\right) x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu\, x^\nu \tag{3}$$

so dass sich zur Bestimmung der Coefficienten a_ν die Recursionsformel ergiebt:

$$\sum_0^\nu {}^\varkappa\, \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

und hieraus speciell:

$$a_0 = 1. \tag{5}$$

Ich zeige nun, dass die Coefficienten a_ν sämmtlich positiv sind, mit wachsendem Index ν beständig abnehmen und für $\nu = \infty$ gegen Null convergiren.

Schreibt man in Gl. (2) $(\nu - 1)$ statt ν, also:

$$\sum_0^{\nu-1} {}^\varkappa\, \frac{a_\varkappa}{\nu-\varkappa} = 1, \tag{6}$$

und setzt Gl. (4) in die Form:

$$(7) \qquad \sum_0^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu + 1 - \varkappa} + a_\nu = 1,$$

so folgt durch Subtraction:

$$(8) \qquad a_\nu = \sum_0^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{(\nu - \varkappa)(\nu + 1 - \varkappa)}$$

Hieraus ergiebt sich, dass $a_\nu > 0$ ist, wenn das gleiche von $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ gilt. Da aber $a_0 = 1$, so folgt in der That allgemein: $a_\nu > 0$.

Schreibt man ferner die Gleichungen (4) und (6) folgendermaassen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\nu+1} + \displaystyle\sum_1^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu + 1 - \varkappa} = 1 \\ \displaystyle\sum_1^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1}}{\nu + 1 - \varkappa} = 1, \end{cases}$$

so folgt wiederum durch Subtraction und Multiplication mit $\nu + 1$:

$$(10) \qquad (\nu + 1) \sum_1^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1} - a_\varkappa}{\nu + 1 - \varkappa} = 1.$$

Setzt man hier $\nu - 1$ für ν, also:

$$(11) \qquad \nu \cdot \sum_1^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1} - a_\varkappa}{\nu - \varkappa} = 1$$

und subtrahirt diese Gleichung von der vorigen, so kommt:

$$\sum_1^{\nu-1} {}^{\varkappa} \left\{ \frac{\nu + 1}{\nu + 1 - \varkappa} - \frac{\nu}{\nu - \varkappa} \right\} (a_{\varkappa-1} - a)_\varkappa + (a_{\nu-1} - a_\nu) = 0,$$

oder anders geschrieben:

$$(12) \qquad a_{\nu-1} - a_\nu = \sum_1^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{\varkappa (a_{\varkappa-1} - a_\varkappa)}{(\nu - \varkappa)(\nu + 1 - \varkappa)},$$

d. h. $a_{\nu-1} - a_\nu$ ist sicher positiv, falls alle vorangehenden Differenzen es sind. Da aber aus Gl. (10) für $\nu = 1$:

$a_0 - a_1 = \frac{1}{2}$ sich ergiebt, so folgt wiederum, dass allgemein: $a_{\nu-1} - a_\nu > 0$ sein muss.

Da hiernach die positiven Grössen a_ν mit wachsendem ν beständig abnehmen, so besitzen sie für $\nu = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth. Dieser muss aber Null sein, da andernfalls die linke Seite der Recursionsformel (4) wegen der Divergenz der harmonischen Reihe mit ν in's Unendliche wachsen würde.

Aus den eben nachgewiesenen Eigenschaften der Coefficienten a_ν folgt aber bekanntlich die gleichmässige Convergenz der Reihen $\Sigma a_\nu \cos \nu \vartheta$, $\Sigma a_\nu \sin \nu \vartheta$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $\vartheta = 0$, also schliesslich die gleichmässige Convergenz von $\Sigma a_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$. Hier divergirt in der That die betrachtete Reihe, wie sich daraus ergiebt, dass $\lim\limits_{x=1} f(x) = +\infty$ wird, wenn x auf dem Radius der Stelle 1 zustrebt.

Andererseits erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ als Function von x in der Nähe der Stelle $x = 1$ nicht integrabel ist, da sie für $x = 1$ so unendlich wird, wie $\frac{d\, lg\, lg(1-x)}{dx}$. Es muss dann aber auch $f(e^{\vartheta i})$ als Function von ϑ an der Stelle $\vartheta = 0$ die Integrabilität verlieren, da $(e^{\vartheta i} - 1) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}$ für $\vartheta = 0$ gerade so von der ersten Ordnung verschwindet, wie $(x-1)$ für $x = 1$. Hieraus folgt dann aber, dass die Integral-Coefficienten der Fourier'schen Reihe im „eigentlichen" Sinne divergent werden müssen: die betreffende Reihe ist also eine „uneigentliche" Fourier'sche Reihe in dem oben (§ 1) näher definirten Sinne.