Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XX. Jahrgang 1890.

München.
Verlag der K. Akademie.
1891.

In Commission bei G. Franz.

Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche.[1])

Von S. Finsterwalder.

(*Eingelaufen 1. Februar.*)

C. v. Sonklar hat in seiner „Allgemeinen Orographie" ein Programm zur orometrischen Bearbeitung eines Gebirges aufgestellt, welches im Wesentlichen dem entspricht, das er selbst seinen früheren Untersuchungen über einzelne Gebirgsgruppen der Alpen zu grunde gelegt hat. Je mehr die darin enthaltenen Gesichtspunkte und vor allem vielleicht der Grundgedanke, für die auch beim blossen Anblick auffallenden Unterschiede in Gestaltung und Aufbau verschiedener Gebirge einen exakten und ziffernmässigen Ausdruck zu gewinnen, das Interesse der Geographen erwecken, umso weniger darf verkannt werden, dass die Einzelausführungen Sonklar's vielfach misslungen sind. Sie beziehen sich höchst einseitig auf Kettengebirge und lassen sich durchaus nicht auf Massen-

1) Kurz bevor das Manuskript dieser Arbeit der Akademie vorgelegt wurde, erschien in den Mittheilungen des Deutschen und Oesterreichischen Alpenvereins (15. Januar 1890) eine kurze Notiz des Herrn Carl Peuker, betitelt: „Der mittlere Neigungswinkel des Bodens,". in welcher die Hauptformel des folgenden I. Teiles ohne Beweis angeführt und die Arealsberechnung des III. Teiles angedeutet wird. Um die Unabhängigkeit meiner Untersuchungen gegenüber den erwähnten festzustellen, sei bemerkt, dass ich den Inhalt des I. Teiles bereits vor drei Jahren, den des III. Teiles vor einem Jahre in dem hiesigen mathematischen Vereine von Studierenden beider Hochschulen vorgetragen habe. Die Publikation verzögerte sich durch den Umstand, dass sie ursprünglich in einer geographischen Zeitschrift beabsichtigt war.

gebirge oder gar Hügelland übertragen. Aber auch in dem begrenzten Gebiete wusste Sonklar nur den einfacheren Begriffen, wie mittlere Gipfelhöhe, Sattelhöhe Schartung u. s. w. zutreffende Definitionen und daraus resultierende eindeutige Bestimmungsweisen zu geben; je weiter er sich in komplicierte Dinge, wie die Volumbestimmung oder die Berechnung des mittleren Abfallswinkels der Kammgehänge einliess, umso mehr verlor er den Boden unter den Füssen und schlug statt zwingender Definitionen und klarer Methoden schlecht motivierte Compromisse vor. Die ernsten Schwächen im Systeme Sonklar's, vor allem die unglückliche Verquickung des Abfallswinkels der Kammgehänge mit dem Volumen des Gebirgskammes sind zwar nicht verborgen geblieben, aber statt den Sonklarschen Weg aufzugeben, suchte man durch neue Compromisse und Aenderungen an den dehnbaren Begriffen von Sockelhöhe, Thalhöhe u. s. w. das bedenkliche System wieder gebrauchsfähig zu machen. Wie wenig dies aber gelingt, dürfte die fleissige, den Sonklar'schen Ideen auf seinem eigensten Gebiete sich möglichst anschmiegende Arbeit C. Gsaller's[1]) endgiltig gezeigt haben. Freilich ist man seitdem von der Volumberechnung Sonklar's gänzlich abgekommen und hat dieselbe durch die einwurfsfreie Ermittelung aus Höhenschichten ersetzt[2]), da man aber den bedenklichen Versuch nicht gescheut hat, aus dem richtig ermittelten Volumen mittels der als falsch erkannten Formel Sonklar's eine mittlere Neigung der Kammgehänge zu berechnen[3]), scheint es uns an der Zeit, durch eine auf mathe-

1) C. Gsaller: Studien aus den Stubayer Alpen. I. Zur Orometrie. Zeitschrift des Deutschen und Oesterreichischen Alpenvereines 1886. Mittheilungen desselben Vereines 1887.

2) Waltenberger: Orograghie des Wettersteingebirges. Augsburg 1882.

3) L. Neumann: Orometrie des Schwarzwaldes. Geographische Abhandlungen, hrsg. v. Prof. Dr. Penck, I. Bd. Heft 2, 1886.

matischer Basis geführte Untersuchung Klarheit in die verworrenen Verhältnisse zu bringen. Hiezu bestimmen uns ausserdem noch zwei in jüngster Zeit erschienene Arbeiten[1]) aus dem geographischen Institute der Wiener Universität, welche das fortdauernde Interesse der massgebenden Kreise an orometrischen Fragen bekunden. In beiden wird das Verhältniss der wahren Oberfläche F des Terrains zu ihrer Projektion (P) auf der Karte mit dem mittleren Böschungswinkel (α) nach der Formel $\cos\alpha = P : F$ in Zusammenhang gebracht. Während in der einen derselben Herr L. Kurowski auf einwurfsfreie, wenn auch mühsame Weise die wahre Oberfläche ermittelt und dann aus obiger Formel ein wohldefiniertes Mittel der Böschungen in dem später zu präcisierenden Sinne erhält, benützt Herr J. Beneš ein von Herrn Professor Penck herrührendes Näherungsverfahren, dessen Zulässigkeit erst durch eine mathematische Analyse festgestellt werden muss.

Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf die Bestimmung des mittleren Böschungswinkels als die verhältnismässig schwierigste und der Reform bedürftigste Aufgabe der Orometrie und werden in dem I. Teile eine neue Definition des mittleren Böschungswinkels geben und ein einfaches Verfahren zur Ausmittelung des so definierten Winkels herleiten. Im II. Teile soll ein allgemeiner Gesichtspunkt für die Bildung rationeller Mittelwerte aufgestellt, die Beziehungen der nach diesem Gesichtspunkte zulässigen Mittelwerte zu einander untersucht und zur gegenseitigen Vergleichung benützt werden. Im III. Teile wird

---

1) L. Kurowski: Das reducierte und wahre Areal der Oezthaler Gletscher.

J. Beneš: Die wahre Oberfläche des Böhmerwaldes im Vergleich zu ihrer Projektion. Bericht über das XIV. Vereinsjahr, erstattet vom Verein der Geographen an der Universität Wien. 1888.

aus diesen Beziehungen ein förderliches Näherungsverfahren zur Ermittelung des wahren Areals der topographischen Fläche abgeleitet und das Penck'sche Verfahren der Analyse unterzogen. Der bequemeren Lesbarkeit halber ist jeder Teil in zwei Abschnitte zerlegt, von denen der erste unter Ausschliessung höherer Rechnungsarten, namentlich der Integralrechnung die allgemeineren Ausführungen enthält, während der zweite der exakten Begründung gewidmet ist, wobei die Mathematik naturnotwendig in ihr Recht tritt.

Wir bemerken schliesslich noch, dass diese Studie eine Frucht unserer mehrjährigen Beschäftigung mit der Geometrie der topographischen Fläche ist und als Probe dafür angesehen werden möge, wie wir dieses Grenzgebiet der Mathematik und Geographie behandelt wissen wollen.

I. Teil.

Definition und Auswertung des mittleren Böschungswinkels; klinographische Curve.

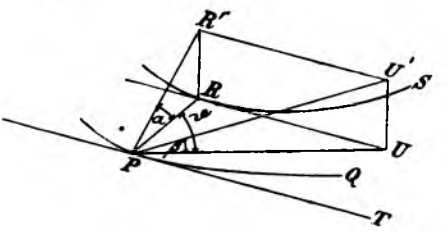
1.

Unter einer topographischen Fläche soll hier eine solche verstanden werden, deren Punkte durch das Lot zur Horizontalebene eindeutig auf diese abgebildet werden können.[1]) Es setzt dies voraus, dass die Fläche nirgends einen senkrechten Abfall oder gar einen Ueberhang besitzt. Ferner soll die Fläche durchweg stetig sein und in jedem Punkte eine Tangenitalebene besitzen. Beide Eigenschaften kommen den schematischen Terrainflächen zu, wie sie sich auf der

1) Diese zur Vereinfachung des Ausdruckes gemachte Annahme kommt auf die Vernachlässigung der Erdkrümmung hinaus. Dass der Einbeziehung der letzteren, so lange nur die Höhen verschwindende Teile der Krümmungsradien sind, kein Hindernis im Wege steht, braucht wohl nur angedeutet zu werden.

Karte darstellen lassen, nicht immer aber den in der Natur wirklich vorhandenen und nur auf erstere beziehen sich unsere folgenden Deductionen. Die Darstellung der Terrainflächen in der Karte erfolgt heutzutage fast ausschliesslich durch Niveaulinien oder Isohypsen, d. h. durch die Projection der Schnitte einer Schar paralleler aequidistanter Horizontalebenen mit der Fläche. Dieselben mögen in so geringen Abständen gegeben sein, dass alle noch in Betracht kommenden Besonderheiten des Terrains durch sie ausgedrückt werden. In einem beliebigen Punkte P der Fläche kann man dann die Tangenitalebene in folgender Weise konstruieren: Es sei PQ die Isohypse durch P, PT ihre Tangente, PR ihre Normale im Punkte P, R der Schnitt der letzteren mit der Nachbarisohypse RS. Man errichte in R ein Lot und trage die Aequidistanz (den Vertikalabstand zweier Isohypsen) RR' auf diesem ab. Die beiden Linien PT und PR' bestimmen die gesuchte Tangenitalebene. Die Richtung PT ist die Streichrichtung der Fläche (des „Gehänges") im Punkte P, die Richtung PR die Fallrichtung derselben; das Verhältnis RR' zu PR die Böschung, der Winkel $R'PR = \alpha$ der Böschungswinkel der Fläche in demselben Punkte P. Schneiden wir Fläche und Tangenitalebene durch eine lotrechte, durch P in der Richtung nach U gehende Profilebene, bezeichnet U den Schnitt dieser Ebene mit der Parallelen RU zur Tangente PT und U' den um die Aequidistanz senkrecht darüber liegenden Punkt, dann ist das Verhältnis von $U'U$ zu PU die Neigung des durch P gehenden Profiles gegen den Horizont und der Winkel $U'PU = \beta$

Fig. 1.



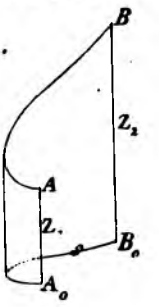
der Neigungswinkel des Profiles im Punkte P. Führen wir für die Aequidistanz $RR' = UU'$ das Zeichen Δz, und für den Horizontalabstand PR der Isohypsen $\Delta\sigma$ ein und nennen wir ferner den Winkel UPR der Profilebene mit der Ebene des Böschungswinkels ϑ, so haben wir für die Winkel α und β die Formeln:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{RR'}{PR} = \frac{\Delta z}{\Delta\sigma} \quad ; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{UU'}{PU} = \frac{\Delta z \cos\vartheta}{\Delta\sigma} \quad 1)$$

Der Profilwinkel ist kleiner als der Böschungswinkel.

Aus den verschiedenen Böschungswinkeln, welche den doppelt unendlich vielen Punkten der Terrainfläche zugehören, soll nun ein Mittel gebildet werden. Diese Aufgabe ist keineswegs eindeutig lösbar, wie wir in der Folge sehen werden. Um ihr aber eine bestimmte Lösung zu geben, wollen wir das Mittel aus den Böschungswinkeln einer Fläche genau so bilden, wie man allgemein und mit Recht das Mittel aus den Neigungswinkeln einer Linie bildet. Hat man nämlich auf einer topographischen Fläche eine Linie (Thalsohle, Hangprofil), die, ohne zu fallen, von einem tieferen Punkte A nach einem höheren Punkte B ansteigt, dann versteht man unter der mittleren Neigung derselben das Verhältnis des Höhenunterschiedes $Z_2 - Z_1$, der Punkte A und B zur Länge s der Projection der Linie, wie sie auf der Karte als (geradlinige oder krummlinige Verbindung) der Projectionen von A und B erscheint. Der mittlere Neigungswinkel ist dann durch die Formel:

Fig. 2.

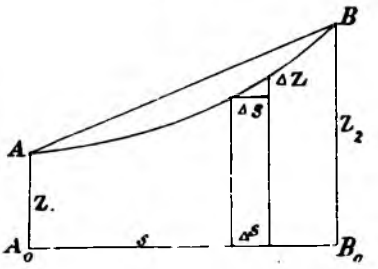


$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{Z_2 - Z_1}{s}$$ zu ermitteln.

Es erhebt sich nun die für die Ausdehnung auf die Fläche fundamentale Frage: In welcher Weise setzt sich dieses Mittel aus den Einzelcomponenten, den

Neigungswinkeln in den verschiedenen Punkten der Linie nämlich, zusammen? Dies ist leicht einzusehen. Wir denken uns zunächst den Cylinder, der aus den Projectionsloten der einzelnen Punkte der Linie gebildet wird, in die Ebene entwickelt, wobei die Projection s der Linie in eine Gerade $A_0 B_0$ gestreckt wird. Nun teilen wir diese Gerade in eine grosse Zahl gleicher oder ungleicher, aber kleiner Teile, von denen einer mit Δs und der zugehörige Höhenunterschied mit Δz bezeichnet werde. Dann ist $\Sigma \Delta s = A_0 B_0 = s$ und $\Sigma \Delta z = BB_0 - AA_0 = z_2 - z_1$, wobei das Zeichen Σ die Summation aller Teile Δs, resp. Δz zwischen A und B bedeutet. Der Quotient $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ nähert sich mit wachsender Kleinheit der Teile der Neigung: $\frac{dz}{ds} = \operatorname{tg}\alpha$, weshalb wir schreiben können:

Fig. 3.



$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{Z_2 - Z_1}{s} = \frac{\Sigma \Delta z}{\Sigma \Delta s} = \lim \frac{\Sigma \Delta s \operatorname{tg}\alpha}{\Sigma \Delta s} \qquad 2)$$

Hieraus geht hervor: Der mittlere Neigungswinkel einer Linie ist der Winkel, dessen Tangente gleich dem arithmetischen Mittel aus den Tangenten der Neigungswinkel der einzelnen Linienelemente ist, wobei jede Tangente mit einem Gewichte proportional der Horizontalprojection Δs des Elementes belastet erscheint.

Wir übertragen dieses, auf dem Gebiete einer Ausdehnung geltende Definitionsprincip ins zweidimensionale und teilen die Karte als Horizontalprojection der topographischen

Fläche in beliebig gestaltete, nach allen Richtungen hinreichend kleine Gebiete ΔO, so dass der Wechsel der Böschung innerhalb eines solchen vernachlässigt werden kann. Von jedem Gebiete bestimmen wir die Grösse sowie den darin herrschenden Böschungswinkel α und rechnen den mittleren Böschungswinkel A nach der Formel:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\Sigma \Delta O \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma \Delta O}. \qquad 3)$$

In obiger Formel liegt folgende Definition enthalten:

Der mittlere Böschungswinkel einer Fläche ist der Winkel, dessen Tangente gleich dem arithmetischen Mittel aus den Tangenten der Böschungswinkel der einzelnen Oberflächenelemente ist, wobei jede dieser Tangenten mit einem der Horizontalprojection des Elementes proportionalem Gewichte belastet erscheint.

Diese Definition würde der praktischen Bedeutung entbehren, wenn es uns nicht gelänge, den damit gegebenen mittleren Böschungswinkel auf einfache Weise aus den Daten zu bestimmen, die die Isohypsenkarte bietet. Es ist dies aber in der That möglich, wie nun gezeigt werden soll. Wir denken uns das Gebiet auf der Karte zunächst durch die Isohypsen in Streifen zerschnitten und dann diese Streifen wieder in kleine Rechtecke von den Seiten Δs in der Isohypse und $\Delta \sigma$ senkrecht hiezu zerteilt. Das Element der Horizontalprojection ΔO ist nun gleich: $\Delta s . \Delta \sigma$. Die Summe: $\Sigma \Delta s \Delta \sigma \operatorname{tg} \alpha$ kann dann so gebildet werden, dass man zunächst Teilsummen für die Rechtecke eines Streifens bildet und hierauf diese zu einer Gesammtsumme vereinigt. Bedenkt man, dass bei gehöriger Kleinheit der Einteilung schliesslich $\Delta \sigma \operatorname{tg} \alpha = \Delta z$ wird, so ergibt sich die Teilsumme für einen Isohypsenstreifen:

$$\Sigma' \Delta s \Delta \sigma \operatorname{tg} \alpha = \Sigma' \Delta s \Delta z$$

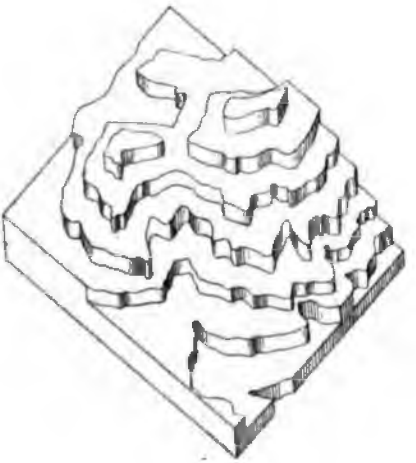
und bei Voraussetzung konstanter Aequidistanz Δz:

$$\Sigma' \Delta s \, \Delta z = \Delta z \, \Sigma' \Delta s,$$

d. h. gleich einem bandförmigen Streifen von der Länge s der Isohypse und der Breite der Aequidistanz Δz.

Alle diese bandförmigen Streifen kommen wirklich zur Erscheinung, wenn man sich die Fläche durch ein an den Isohypsen abgetrepptes Gerippe ersetzt denkt (siehe Figur 4), genau in der Art, wie man beim Modellieren des Terrains nach der Isohypsenkarte thatsächlich vorgeht. Es sind dies nämlich die vertikalen Flächen der Stufen des Treppenmodelles, deren horizontale Flächen durch die Streifen zwischen zwei Nachbarisohypsen gegeben sind. Letztere Streifen repräsentieren die Teilsummen $\Sigma' \Delta O$ und ihre Gesammtheit ist gegeben durch das Areal der Horizontalprojection der ganzen topographischen Fläche. Wir können nun folgenden Satz aussprechen:

Fig. 4.



Die Tangente des mittleren Böschungswinkels ist dargestellt durch das Verhältnis der Summe der vertikalen Flächen zur Summe der horizontalen Flächen der Stufen eines Treppenmodelles der topographischen Fläche.

Der mittlere Böschungswinkel A wird demnach aus folgender Formel berechnet:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{Aequidistanz} \times \text{Summe der Isohypsenlängen}}{\text{Fläche der Horizontalprojection.}}$$

Praktisch gestaltet sich die Aufsuchung des mittleren Böschungswinkels höchst einfach: Nachdem man das betreffende Gebiet auf der Karte umgrenzt hat, misst man mittels des Planimeters die Grösse der Horizontalprojection. Dieselbe sei O Quadratcentimeter. Dann bestimmt man mittels des Messrädchens[1]) die Gesammt-Länge P aller Isohypsen innerhalb der Umgrenzung in Centimetern ausgedrückt. Multipliciert man letztere mit der ebenfalls in Centimetern ausgedrückten, auf den Massstab der Karte reducierten Aequidistanz und dividiert man das Produkt durch O, so hat man die Tangente des gesuchten Winkels.

Falls man die Ausmessung aller Isohypsen scheut und sich mit geringerer Genauigkeit zufrieden gibt, kann man folgendes Verfahren anwenden, das dem von Herrn Professor Penck für die Cubatur der topographischen Flächen benützten analog ist.[2]) Man stelle die Abhängigkeit der Länge s der einzelnen Isohypsen von ihrer Höhe z durch eine Curve in rechtwinkeligen Coordinaten dar. Dann wird der Flächeninhalt zwischen dieser „klinographischen Curve", der Höhen(Z)axe und den zur grössten und kleinsten Höhe gehörigen Endordinaten die Summe $\Sigma s \cdot \Delta z$, d. h. gleich dem Zähler des Bruches, der die Tangente des mittleren Böschungswinkels gibt. Um die Curve, die im Allgemeinen stetig verlaufen wird, zu zeichnen, sind je nach der gewünschten Genauigkeit eine grössere oder geringere Anzahl von Punkten nötig, die durch Ausmessung einzelner Isohypsen erhalten werden können. Es ist indess wohl zu beachten, dass die klinographische Curve, so oft die Variable z eine Gipfel-

1) Ein weit praktischeres Instrument zum Messen von Curven ist in jüngster Zeit von E. Fleischhauer in Gotha konstruiert worden, welches bei L. Tesdorpf in Stuttgart ausgeführt wird (D. R.-P. Nr. 45727).

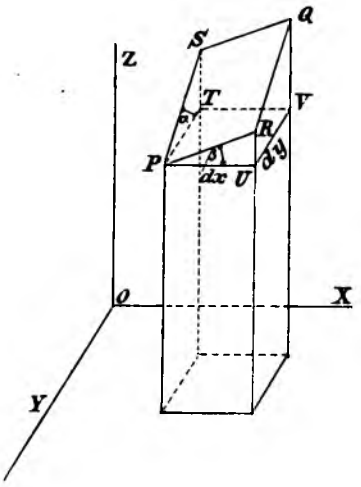
2) Vergl. Heiderich: Die mittlere Höhe Afrikas. Peterm. Mitteilungen. Bd. 34. 1888. Gleichzeitig ist diese „graphische Cubatur" von L. Neumann.

oder Sattelhöhe passiert, eine Knickung besizt, auch wenn die Fläche völlig stetig verläuft. Diese später nachzuweisende Eigentümlichkeit hat allerdings auf die Ermittelung des Flächeninhaltes und damit der mittleren Böschung so lange wenig Einfluss, als die Kuppen und Sättel klein im Vergleich zu dem übrigen Teil sind.[1])

2.

Um die im vorigen Abschnitte zur Sprache gebrachten Methoden eingehender zu begründen, müssen wir uns der Hilfmittel der analytischen Geometrie bedienen. Wir denken uns die Ebene des Kartenblattes als XY-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, dessen Z-axe daher die Richtung des Lotes hat. Die auf den Massstab der Karte reducierte Meereshöhe z eines jeden, durch die Coordinaten x und y dargestellten Punktes der Karte denken wir uns durch den Wert einer eindeutigen und stetigen Function $z = f(x\,y)$ dieser Coordinaten ausgedrückt und nennen diese Beziehung die Gleichung der topographischen Fläche. Setzen wir in derselben z gleich einem konstanten Wert h, so gibt $h = f(x\,y)$ den Zusammenhang zwischen den Coordi-

Fig. 5.



[1]) Aehnliche, bisher noch nicht bemerkte Eigentümlichkeiten kommen auch der „hypsographischen" Curve Penck-Neumann's zu, deren Einfluss auf die Volumbestimmung indess verhältnismässig noch geringer ist.

naten x und y der Punkte von der Meereshöhe h oder die Gleichung der Isohypse h. Geht man von einem Punkt P der Fläche zu einem nächstbenachbarten Q über, so besteht zwischen den Aenderungen dx, dy, dz der 3 Coordinaten die Differentialgleichung:

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad 4).$$

Die Grössen p und q sind hiebei die verhältnismässigen Aenderungen von z bei alleiniger Aenderung von x resp. y oder die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f(xy)}{\partial x}, \frac{\partial f(xy)}{\partial y}$. Geometrisch werden sie repräsentiert durch die Tangenten der Profilwinkel β und γ im Punkte P der Fläche und in der Richtung der X bez. der Yaxe, also:

$$p = \frac{RU}{PU} = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\beta \quad , \quad q = \frac{ST}{PT} = \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\gamma \qquad 5)$$

Der Böschungswinkel α im Punkte P, d. h. der Neigungswinkel der Tangentialebene gegen die XY-Ebene ist durch eine der drei Gleichungen gegeben:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{p^2+q^2} \qquad 6)$$

Für die Richtung der Tangente an die Isohypse (Streichrichtung des Hanges) gilt die Beziehung:

$$p\,dx + q\,dy = o$$

Für die Richtung der Normalen zur Isohypse (Fallrichtung): $q\,dx - p\,dy = o$

Bezeichnet man mit $d\sigma$ den kürzesten in der Fallrichtung gemessenen Horizontalabstand zweier Isohypsen vom Vertikalabstand dz, so ergibt sich:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

wobei, da es sich um Punkte auf der Fläche handelt:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

und wegen der Lage des Abstandes in der Fallrichtung:

$$o = q\,dx - q\,dy$$

ist. Durch Elimination von dy und dz folgt:

$$\frac{dz}{d\sigma} = \sqrt{p^2 + q^2} = \operatorname{tg}\alpha\,. \qquad 7)$$

Den mittleren Böschungswinkel A durch folgenden Grenzwert definiert:

$\operatorname{tg} A = \lim \frac{\Sigma \Delta O \operatorname{tg}\alpha}{\Sigma \Delta O}$, wobei die Elemente Horizontalprojection schliesslich beliebig klein werden sollen und die Summen sich über das abgegrenzte Gebiet der Karte (XY-Ebene erstrecken. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Art der Einteilung der XY-Ebene in Elemente ΔO und, wenn wir zunächst eine Einteilung durch Linien parallel zu den Coordinatenaxen annehmen, so können wir ihn folgendermassen als Integralquotient schreiben:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\int\int^0 dx\,dy \operatorname{tg}\alpha}{\int\int^0 dx\,dy}\,. \qquad 8)$$

Die Grenzen der Integrale sind hiebei durch die Curven gegeben, welche das zu untersuchende Gebiet auf der Karte umschliessen:

Ersetzen wir $\operatorname{tg}\alpha$ durch den oben ermittelten Wert, so folgt:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\int\int^0 dx\,dy \sqrt{p^2 + q^2}}{\int\int^0 dx\,dy} \qquad 9)$$

Die Transformation des Doppelintegrales Q im Zähler auf ein neues, krummliniges Coordinatensystem, in welchem die Gesammtheit der Isohypsen die eine Curvenschar bildet, wird uns zu einem strengen Beweise für den im vorigen Abschnitt geometrisch hergeleiteten Wert des Zählers verhelfen. Wir denken uns zuerst die Gleichung

$z = f(xy)$ durch Einführung einer neuen Variablen ξ in zwei $x = \varphi(z, \xi)$, $y = \psi(z, \xi)$ zerspalten, aus denen die ursprüngliche durch Elimination von ξ hervorgehen muss. Die Zuwächse der Variabeln beim Uebergang von einem Punkt der Fläche zu einem nächstbenachbarten müssen nun den Gleichungen:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi \text{ genügen.}$$

Eliminiert man hieraus $d\xi$, so ergibt sich:

$$dz = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} dx - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}} dy \quad 10)$$

Aus dem Vergleiche dieser Differentialgleichung der Fläche $z = f(xy)$ mit der ursprünglichen:

$dz = p\,dx - q\,dy$ schliessen wir:

$$p = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} \quad 11)$$

Bei der Transformation des Integrales Q aus dem System der x, y in das der z, ξ geht das Flächenelement:

$dx\,dy$ in $dz\,d\xi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)$ über und das transformierte Doppelintegral wird nach einigen Reductionen folgendes:

$$Q = \int\int^{0} dz\,d\xi \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} \quad 12)$$

Wir können nun die Grösse des Linienelementes ds der Horizontalcurve, für welche $dz = o$ ist durch $d\xi$ ausdrücken und erhalten hiefür:

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)_{dz=0} = \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)^2\right) d\varepsilon^2$$

$$\text{oder } ds = d\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)^2} \qquad 13)$$

Substituiert man diesen Wert in den Ausdruck für Q, so ergibt sich:

$$Q = \int \int^0 dz\, ds = \int dz \int ds \qquad 14)$$

Hiebei ist zu beachten, dass sich $\int ds$ auf $dz = o$, d. h. eine bestimmte Isohypse bezieht und nichts anderes als die Gesammtlänge s derselben innerhalb des abgegrenzten Bereiches O bedeutet. Berücksichtigen wir ferner den Umstand, dass die Karte die Isohypsen in gleichen Vertikalabständen dz gibt, so sehen wir das $Q = \int dz \int ds = \int s\, dz$ thatsächlich als Grenzwert des Produktes der Summe der Isohypsenlänge mit der Aequidistanz aufgefasst werden kann, zu welchem Resultat wir auch auf geometrischem Wege gekommen sind.

Was nun die Auswertung des Grenzwertes $Q = \int s\, dz$ betrifft, so ist bereits gesagt worden, dass sie auf planimetrischem Wege durch Ausmittelung des Flächeninhaltes zwischen der klinographischen Curve $s = \pi(z)$, welche die Abhängigkeit der Isohypsenlänge s von der Höhle z in einem rechtwinkligen SZ-Coordinatensysteme darstellt, der Z-axe und den Endordinaten s_1 und s_2, die zur kleinsten und grössten Höhe z_1 resp. z_2 gehören, geschehen kann.

Dabei wurde auch auf die Eigentümlichkeiten hingewiesen, welche die klinographische Curve für den Fall, dass die Z-Coordinate einer Gipfel- oder Sattelhöhe gleich ist, besitzt und welche bei der Zeichnung derselben aus einzelnen

Punkten berücksichtigt werden sollen, da sie unter Umständen die Auswertung von Q beeinflussen können.

Diese Eigentümlichkeiten lassen sich auf folgende Weise bestimmen. Es sei die Gleichung[1]) der topographischen Fläche in der Nähe des als flache Kuppe vorausgesetzten Gipfels von der Höhe z_0: $z_0 - Z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$. 15)

Schaltet man nun in der Nähe des Gipfels alle Isohypsen innerhalb derjenigen geschlossenen, welche der Höhe $z = z_1$ zugehört, aus, so wird sich die Länge der übrig bleibenden Teile der Isohypsen als Function von z: $s_1 = \pi_1(z)$ zwischen z_1 und z_0 und darüber hinaus bis gegen die nächste Gipfel- oder Sattelhöhe hin regulär verhalten und die Gesammtheit der Isohypsenlänge kann durch folgenden Ausdruck gegeben werden:

$$s = \pi_1(z) + \lambda \cdot U_1 \frac{\sqrt{z_0 - z}}{\sqrt{z_0 - z_1}} \qquad 16)$$

Hiebei bedeutet $\pi_1(z)$ eine stetige Function mit Differentialquotienten für $z = z_0$. Im zweiten Summand, der von den ausgeschalteten Isohypsenteilen herrührt, bezeichnet U_1 den Umfang der Ellipse $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z_0 - z_1$, $U_1 \frac{\sqrt{z_0 - z}}{\sqrt{z_0 - z_1}}$ dem-

1) In der Theorie der Flächenkrümmung beweist man, dass jede Fläche in der Umgebung nicht singulärer Punkte (als welche gewöhnliche Kuppen und Sättel zu gelten haben) genähert durch eine Gleichung $z_0 - z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ oder $z - z_0 = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}$ dargestellt werden kann, je nachdem dieselbe in dem Punkte nach allen Richtungen erhaben (wie beim Gipfel) oder zum Teil erhaben zum Teil hohl gekrümmt ist (wie beim Sattel). Ursprung des Coordinatensystems ist dabei der betrachtete Punkt, Z-Axe die Flächennormale, die bei Gipfeln und Sätteln mit dem Lote identisch ist.

nach den Umfang der ähnlichen Ellipse $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=z_0-z$.

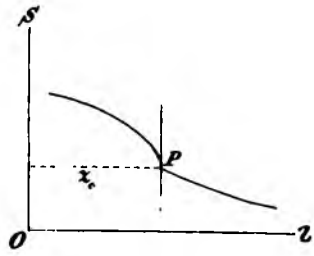
λ möge eine solche Function von z sein, die für $z<z_0$ gleich 1 für $z>z_0$ gleich o wird, entsprechend dem Verschwinden der geschlossenen Isohypsen über dem Gipfel $z=z_0$. Dieser Sprung in der Function λ alteriert die Stetigkeit von s nicht, da für die Sprungstelle der Faktor von λ verschwindet, wohl aber die Stetigkeit des Differentialquotienten

$$\frac{ds}{dz}=\pi_1'(z)-\frac{\lambda U_1}{2\sqrt{z_0-z}\sqrt{z_0-z_1}} \qquad 17)$$

der für $z=z_0$ von ∞ auf $\pi_1'(z_0)$ herabsinkt.

Die klinographische Curve hat demnach für jede Gipfelhöhe $z=z_0$ eine Knickung, deren eine Tangente vertikal steht.[1]) Um den Einfluss auf den Zähler $Q=\int s\,dz$ zu bestimmen, berechnen wir den Werth des Integrales $\int s\,dz$ für die ausgeschalteten Teile in der Nähe des Gipfels. Er ergibt sich zu:

Fig. 6.



$$Q_1=\int_{z_1}^{z_0} U_1\frac{\sqrt{z_0-z}}{\sqrt{z_0-z_1}}\,dz=\frac{2U_1}{3}(z_0-z_1) \qquad 18)$$

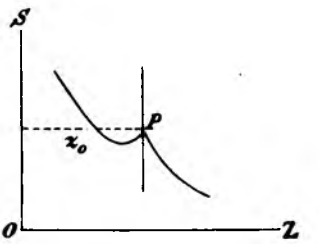
Dieser Wert gibt uns den Betrag des Fehlers in Q der durch die Vernachlässigung der über der letzten geschlossenen Isohypse sich erhebenden, die nächsthöhere Stufe nicht mehr erreichenden Kuppe entsteht. Derselbe ist gleich zwei

1) Wir denken uns dabei die Z-axe horizontal, die S-axe vertikal.

Dritteilen von dem Product aus dem Umfang jener Isohypse und der Erhebung des Kuppenscheitels über derselben.

In ähnlicher, wenn auch mehr Rechnung verursachender Weise kann man den Einfluss eines Sattels von der Höhe z_0, der durch die Gleichung $z_0 - z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}$ dargestellt wird, auf den Verlauf der klinographischen Curve und den Wert des Integrales Q studieren. Es ergibt sich hiebei, wie hier nur historisch angeführt werden soll, dass die klinographische Curve für jeden Sattelpunkt eine Spitze mit vertikaler Tangente erhält.

Fig. 7.

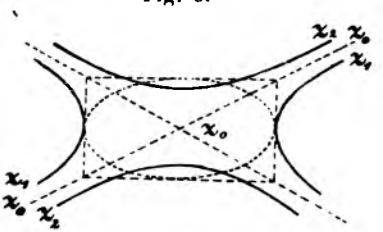


Denken wir uns den durch die Gleichung $z_0 - z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}$ näherungsweise definierten Sattel durch einen elliptischen Cylinder von der Gleichung: $z_0 - z_1 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ begrenzt, so sieht man aus der Formel $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{p^2 + q^2}$ leicht ein, dass die beiden Flächen:

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = z_0 - z \text{ und}$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z_0 - z,$$ welche Kuppe und Sattel repräsentieren, innerhalb ihrer Umgrenzung in Punkten von übereinstimmenden x und y auch gleiche Böschungswinkel besitzen und demnach auch um gleiche Beträge das Integral Q alterieren. Zu einem durch die benachbarten Isohypsen z_1, z_2 gegebenen Sattel findet man die zur Ausschaltung der Isohypsen dienende und zur Berechnung des Einflusses nötige Ellipse folgendermassen:

Fig. 8.



Nachdem man sich über den Verlauf der Isohypse z_0 im Sattelpunkt selbst orientiert hat, konstruiert man ein Rechteck, dessen Ecken in den Tangenten an die Isohypse z_0 des Sattelpunktes liegen und dessen Seiten die beiden Teile einer Nachbarisohypse, z. B. z_1 berühren. Die diesem Rechteck symmetrisch eingeschriebene Ellipse gibt dann die verlangte Abtrennung, aus derem Umfang U_1 und dem positiv genommenen Höhenunterschiede $z_0 - z_1$ sich der Einfluss der innerhalb der Ellipse gelegenen Teile des Sattels auf den Wert von Q nach der Formel 18

$$Q_1 = \frac{2}{3} U_1 (z_0 - z_1)$$ berechnen lässt.

II. Teil.

Grundlage orometrischer Mittelbildungen; Vergleich von Tangenten-, Sekanten- und Winkelmittel der Böschungswinkel.

1.

Man wird den Begriff des Mittels nicht weiter fassen dürfen, als es in folgender, den Mathematikern geläufigen Definition geschieht: Ein Mittel aus einer discreten oder continuierlichen Menge von Einzelwerten ist ein solcher Wert, der gleichzeitig grösser als der kleinste und kleiner als der grösste Einzelwert jener Menge ist. Diese Definition scheint selbstverständlich und trotzdem trifft sie für das Resultat der in bisherigen Arbeiten vorgeschlagenen orometrischen Mittelbildungen nicht immer zu, wie später an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Der Grund hievon liegt in der willkürlichen Art und Weise, auf der man zu

Mitteln zu gelangen sucht. Der Anschaulichkeit zu liebe wird nämlich irgend eine von wenigen Constanten abhängige „Idealfigur" (Prisma, Kegel), die mit dem zu untersuchenden Terraingebilde mehr oder weniger Aehnlichkeit besitzt, zu grunde gelegt und deren Dimensionen durch Vergleichung mit gewissen, ihnen ungefähr entsprechenden Abmessungen des Terrains bestimmt. Der so bestimmten Idealfigur werden nun neue, aus den Constanten infolgedessen zu berechnende Grössen entnommen und diese als Mittel für die entsprechenden Grössen des Terraingebildes proclamiert, häufig ohne Rücksicht darauf, ob die zur Vergleichung herangezogenen Abmessungen des Terraingebildes mit den Grössen, aus welchen das Mittel gezogen werden soll, in übersehbarem Zusammenhang stehen oder nicht.

So hatte bekanntlich Sonklar das Volumen und daraus die mittlere Höhe eines Kammgebirges dadurch ermitteln wollen, dass er (abgesehen vom sogenannten Sockel) die Gesammtheit der Kämme mit einem liegenden, dreiseitigen, gleichschenkligen Prisma verglich, dessen Länge gleich der Gesammtlänge aller Kämme, dessen Höhe gleich der sogenannten relativen mittleren Kammhöhe, dessen Basiswinkel gleich dem mittleren Abfallswinkel der Kammgehänge gesetzt wurde und dessen Volumen er schliesslich als Kammvolumen zur Berechnung der mittleren Höhe benützte. Herr Professor L. Neumann[1]) hat mit Andern die Unzuverlässigkeit des Verfahrens für die Volumbestimmung konstatiert, aber in enger Anlehnung an die Sonklar'sche Idealfigur dieselbe Formel, welche das Volumen des Prismas mit der Länge, der Höhe und dem Basiswinkel in Beziehung setzt, zur Berechnung eines mittleren Abfallswinkels der Kammgehänge (Basiswinkel des Prismas) aus dem nach Höhenschichten gerechneten Volumen des Gebirges benützt, in der

1) Orometrie des Schwarzwaldes, Seite 227. Wien 1886.

Hoffnung wenigstens vergleichbare Werte für die einzelnen Teile des Gebirges zu erhalten. In einer späteren Publikation[1]) hat derselbe Autor nicht weniger als 10 Methoden zur Berechnung des mittleren Neigungswinkels angegeben, worunter je vier auf der Idealfigur des Kegels und des dreiseitigen Prismas beruhen, die beiden übrigen aber arithmetische Mittel aus Profilwinkeln geben, deren näherungsweise Gleichstellung mit dem Neigungswinkel der Gehänge auch nur unter Voraussetzung angenäherter Prismengestalt des Terrains gerechtfertigt erscheint. Sechs von diesen Methoden werden von dem Autor selbst verworfen, da sie aus verschiedenen Gründen augenscheinlich zu kleine oder zu grosse Werte liefern. Unter den übrigen vier Methoden befindet sich eine, welche darum merkwürdig ist, weil sie leicht ersehen lässt, dass der von ihr gelieferte Mittel-Wert in manchen Fällen thatsächlich kleiner als der kleinste Böchungswinkel des betreffenden Terrains ist. Die Methode besteht darin, dass zunächst die Mittel aus den Böschungswinkeln der einzelnen Isohypsenstreifen genommen werden, welche dann zu einem Gesammtmittel zu vereinigen sind. Ein Mittel aus den Böschungswinkeln eines Isohypsenstreifens wird dadurch gebildet, dass für jede von den Horizonten zweier benachbarter Isohypsen aus dem Terrain ausgeschnittene Scheibe ein Kegelstumpf von gleichem Areal der Endflächen, gleicher Höhe und somit auch gleichem Volumen substituiert wird, dessen Mantellinien mit den Endflächen den gesuchten mittleren Böschungswinkel einschliessen sollen. Bezeichnet nun a den Unterschied der Areale der Grenzisohypsen, b den Umfang einer derselben, c den Umfang des Kreises, der mit dieser gleiches Areal hat und d die Aequidistanz, dann ist

1) Orometrische Studien im Anschluss an die Untersuchung des Kaiserstuhlgebirges. S. 376. Zeitschrift für wissenschaftliche Geographie. 1889.

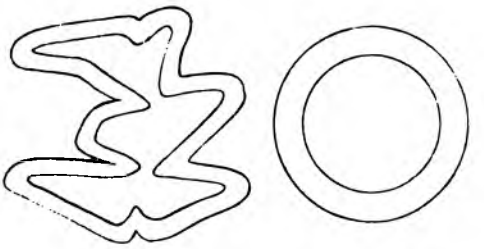
der Neigungswinkel φ_0 der Mantellinien jenes Kegels durch folgende Formel gegeben:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{d \cdot c}{a}$$

Die Grösse a ist jedenfalls kleiner als $b \cdot e$, wenn e die zur kleinsten Neigung im Streifen gehörige Horizontaldistanz der Isohypsen bezeichnet, ferner ist b jedenfalls grösser als c, da der Kreis bei gleichem Inhalt den kleinsten Umfang hat. Damit also das „Mittel": $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{dc}{a}$ grösser als die kleinste Böschung: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{e}$ sei, muss $\frac{a}{c}$ kleiner als e oder e grösser als $\frac{a}{c}$ sein. Da aber e nur an die Bedingung gebunden ist, grösser zu sein als die, wegen b grösser als c, kleinere Zahl $\frac{a}{b}$, so ist kein Grund vorhanden, warum $\operatorname{tg} \varphi_0$ grösser als $\operatorname{tg} \varphi$, mithin φ_0 grösser als φ sein soll. Im Gegenteil lassen sich Fälle genug angeben, in welchem dies nicht zutrifft. Ein besonders lehrreicher ist der Fall einer Fläche gleicher Böschung. Hier haben die Isohypsen überall gleichen Horizontalabstand und es wäre wohl zu erwarten, dass die allen Punkten gemeinsame Böschung auch in dem sogenannten Mittel herauskäme. Ein Blick auf die Figur 9, worin zwei solche parallele Nachbarisohypsen mit den hiefür substituierten koncentrischen Kreisen von gleichem Areal (den Endflächen des Kegelstumpfes) gegenübergestellt sind, wird mehr als viele Worte die Unmöglichkeit hievon klar machen. Es ist eben in Betracht zu ziehen, dass der Kreis bei gegebenem Inhalt den kleinsten Umfang hat, eine Isohypse von gleichem Inhalt dagegen einen beliebig grossen, mit der Complicierheit des Terrains stets wachsenden Umfang haben kann. Wenn aber die Teilmittel aus den Isohypsenstreifen schon unter den kleinsten Einzel-

wert herabsinken, besteht keinerlei Garantie dafür, dass dies nicht auch beim Gesammtmittel der Fall sei und speciell bei Flächen gleicher Böschung (den geraden Kegel ausgenommen) wird es immer so sein. Was von dieser Methode nachgewiesen wurde, gilt mehr oder minder von allen zehn bei Neumann angegebenen; namentlich liefern sie im Falle eines durchwegs gleichförmig geböschten Terrains in der Regel nicht den hier einzig vorkommenden Böschungswinkel als Mittel, sondern, soweit wir uns überzeugt haben, einen zu kleinen Wert. Da dieselben mithin schon in diesem — in gewissem Sinne — allein kontrolierbaren Falle im Stiche lassen, dürfte ihre Unbrauchbarkeit erwiesen sein.

Fig. 9.



Um den vielen Unzukömmlichkeiten, die den bisherigen Methoden, Mittel zu bilden, anhaften, zu entgehen, müssen wir vor allem mit dem Principe der Idealfigur brechen. Wir müssen vielmehr jedem Einzelwert einen ganz bestimmt definierten Einfluss auf den Mittelwert gönnen und je nach der Art dieses Einflusses haben wir dann den resultierenden Mittelwert zu beurteilen und weiter zu verwenden.

Dieser Forderung scheint uns einfach und allgemein genug die Methode gerecht zu werden, welche wir im I. Teil zur Bildung des mittleren Böschungswinkels benützt haben. Indem wir dieselbe ihrer speciellen Anwendung entkleiden, formulieren wir sie folgendermassen: Um zu einem be-

stimmt definierten Mittelwerte aus einer discreten oder kontinuierlichen Reihe von Einzelwerten a: a_1, a_2, a_3, ... zu gelangen, wähle man eine eindeutige Function $\varphi(a)$ dieser Werte, welche nur der Einschränkung unterliegen soll, dass sie im Bereiche der a mit wachsenden Werten a entweder stets zu- oder stets abnimmt, bilde dann aus den Funktionswerten $\varphi(a)$: $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\varphi(a_3)$, ... unter Zugrundelegung irgend welcher positiver Gewichte p: p_1, p_2, p_3 ... das arithmetische Mittel nach der Formel: $\frac{\Sigma p \cdot \varphi(a)}{\Sigma p}$ und suche schliesslich denjenigen Wert a_0, für welchen $\varphi(a_0)$ gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{\Sigma p \cdot \varphi(a)}{\Sigma p}$ ist. Diesen Wert a_0 nennen wir den unter Zugrundelegung der Funktion φ und der Gewichte p gebildeten **rationellen** Mittelwert der Grössen a. Ein ganz specieller Fall tritt dann ein, wenn an Stelle der Funktion φ die Identität gesetzt wird und die Gewichte einander gleich gewählt werden, dann führt nämlich bei einer diskreten Menge das Verfahren auf das gemeine arithmetische Mittel.

Wir gewinnen durch Annahme der so formulierten Methode folgende Vorteile:

1) Jeder hiedurch erzielte Mittelwert ist stets grösser als der kleinste und kleiner als der grösste der Einzelwerte. Im Uebrigen kann bei entsprechender Wahl der Function φ und der Gewichte jeder zwischen den Extremen liegende Wert als Mittelwert erhalten werden.

2) Die Veränderung, die ein bestimmter Mittelwert bei gegebenen Aenderungen der Einzelwerte erleidet, lässt sich (ohne Neurechnung des Mittelwertes) exact bestimmen, nicht nur schätzen.

3) Sind für 2 Reihen von Einzelwerten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ $b_1, b_2, b_3 \ldots$ die (gleichgebildeten) Mittelwerte M_a M_b bekannt, so kann man den gleichgebildeten Mittelwert $M_{a\,b}$ für beide Reihen zusammen durch einfaches Mittelziehen aus M_a und M_b unter Berücksichtigung der Gewichte genau ebenso erhalten, wie wenn man das Verfahren auf die Summe der beiden Reihen angewendet hätte. Es ist nämlich:

$$M_{a\,b} = \frac{\Sigma(p_a \varphi(a) + p_b \varphi(b))}{\Sigma(p_a + p_b)} = \frac{M_a \cdot \Sigma p_a + M_b \Sigma p_b}{\Sigma p_a + \Sigma p_b} \quad 19)$$

Dieser associative Charakter unserer Mittelbildungen ist für die Möglichkeit, grosse Gebiete durch Arbeitsteilung zu bewältigen, von ausschlaggebendem Wert.

4) Die Methode liefert bei richtiger Annahme der Funktion φ und der Gewichte p für eine Anzahl der wichtigsten orometrischen Mittelwerte die bisher üblichen Zahlen; so z. B. für die mittlere Höhe des Gebirges, mittlere Kammhöhe, mittlere Neigung eines Profils, mittlere Thalhöhe und Thalneigung und natürlich für alle Mittel aus discreten Mengen, wie Gipfel- und Sattelhöhen.

Wenn man sich zur Annahme dieser Art von Mittelbildung entschliesst, wird man natürlich solange weder von einem wahren Mittelwerte, noch von einer oberen oder unteren Grenze desselben reden können — es sei denn, man verstünde darunter die Extreme der Einzelwerte — als man nicht eine bestimmte Funktion und bestimmte Gewichte als massgebend für die Bestimmung desselben angegeben hat. Meist wird, wie in dem uns speciell beschäftigenden Falle des mittleren Böschungswinkels, die Wahl der Gewichte nicht zweifelhaft sein, umsomehr, als ihr Einfluss durch die Wahl der Funktion zum Teil kompensiert werden kann; es werden sich daher verschiedene Mittelbildungen in der Regel nur durch die Funktion unterscheiden, die dabei benützt wurde. So haben wir uns bei Bildung des mittleren Böschungs-

winkels der Tangente dieses Winkels bedient, während z. B. das Verfahren von Herrn Kurowski, nach welchem derselbe die Neigung der Oetzthaler Gletscher ermittelt, auch als rationelle Mittelbildung in unserm Sinne gedeutet werden kann, wobei indessen an Stelle der Tangente des Böschungswinkels die Sekante tritt. Herr Kurowski hat nämlich das Gebiet auf der Karte in kleine Bezirke ΔO geteilt, in jedem den Böschungswinkel α aufgesucht und das Mittel A' nach der Formel $\frac{\Sigma \Delta O \sec \alpha}{\Sigma \Delta O} = \sec A'$ gerechnet. Wie man beim Vergleich mit unserer Formel $\frac{\Sigma \Delta O \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma \Delta O} = \operatorname{tg} A$ sieht, sind die Gewichte ΔO für beide Mittel des Böschungswinkels, die wir als Tangenten- und Sekantenmittel unterscheiden wollen, dieselben, der Unterschied liegt ausschliesslich in den Funktionen. Infolge der Verschiedenheit derselben hat z. B. von zwei gleich grossen Parzellen mit den Böschungswinkeln 5° und 10° die zweite auf das Tangentenmittel circa doppelt so grossen Einfluss als die erste, während auf das Sekantenmittel beide fast gleich wirken. Es können demnach auch Tangenten- und Sekantenmittel des Böschungswinkels einander nicht gleich sein, sie stehen jedoch in gesetzmässigem und überseibarem Zusammenhange und wir können das eine aus dem andern berechnen. Dieser Umstand ist aber desshalb wichtig, weil das Tangentenmittel, wie wir gezeigt haben, eine leichte und genaue Auswertung auf der Isohypsenkarte erlaubt, während das Sekantenmittel nur durch weit umständlichere Manipulationen gefunden werden kann.

2.

Unter den Mitteln, welche mit bestimmten Gewichten aber verschiedenen Funktionen gebildet werden können, zeichnet sich eines durch Einfachheit der Definition besonders

aus, nämlich dasjenige, bei welchem an Stelle der Funktion das Argument gesetzt wird. Dieses Mittel, welches wir in dem speciellen Falle des Böschungswinkels als Winkelmittel im Gegensatze zu dem Tangentenmittel und Sekantenmittel bezeichnen wollen, ist durch folgende Formel

$$A_0 = \frac{\Sigma \Delta O \cdot \alpha}{\Sigma \Delta O}$$

gegeben, oder, wenn wir gleich auf die unendlich kleine Einteilung in Rechtecke parallel den Axen des Coordinatensystems zurückgehen, durch:

$$A_0 = \frac{\int\int^0 \alpha \cdot dx\,dy}{\int\int^0 dx\,dy} \qquad 20)$$

Mit diesem Winkelmittel sollen nun Tangenten- und Sekantenmittel verglichen werden, welche in nachstehenden Formeln definiert sind:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\int\int^0 \operatorname{tg}\alpha\,dx\,dy}{\int\int^0 dx\,dy} \qquad \sec A' = \frac{\int\int^0 \sec\alpha\,dx\,dy}{\int\int^0 dx\,dy} \qquad 21)$$

Dazu dient uns ein kürzlich von Herrn Professor Hölder[1]) bewiesener Satz, der also lautet:

„Bedeutet $\varphi(\alpha)$ eine Funktion einer reellen Veränderlichen α mit zunehmenden (abnehmenden) Differentialquotienten, so ist das arithmetische Mittel aus einer beliebigen Zahl von Functionswerten stets grösser (kleiner) als der Funktionswert, welcher dem auf gleiche Weise gebildeten Mittelwert der Argumente entspricht."

[1]) Ueber einen Mittelwertssatz v. O. Hölder. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften an der Universität Göttingen. 1889. Ehe wir Kenntnis von diesem schönen Satz hatten, erledigten wir die Fragen der folgenden Abschnitte durch Reihenentwickelungen.

Werden die zur Mittelbildung aus α_1, α_2, α_3 .... verwendeten Gewichte entsprechend mit p_1, p_2, p_3 .... bezeichnet, so drückt sich der Satz in folgender Formel aus:

$$\frac{p_1\varphi(a_1)+p_2\varphi(a_2)+p_3\varphi(a_3)+\ldots}{p_1+p_2+p_3+\ldots} \gtrless \varphi\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3+\ldots}{p_1+p_2+p_3+\ldots}\right)$$

oder abgekürzt:

$$\frac{\Sigma p\,\varphi(\alpha)}{\Sigma p} \gtrless \varphi\left(\frac{\Sigma p\,\alpha}{\Sigma p}\right)$$

je nachdem die zweite Ableitung der Funktion $\varphi''(\alpha) \gtrless o$ ist.

Hiezu gehört noch das für unsere Zwecke wichtige Corollar: Wenn $\varphi''(\alpha)$ zwischen zwei endlichen Grenzen, der unteren N und der oberen M bleibt, dann kann man die Differenz stets in die folgende Form bringen:

$$\frac{\Sigma p\,\varphi(\alpha)}{\Sigma p} - \varphi\left(\frac{\Sigma p\,\alpha}{\Sigma p}\right) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}(\varphi''\alpha)\,\frac{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} p_\mu p_\nu(\alpha_\mu-\alpha_\nu)^2}{(\Sigma p)^2 = \sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} p_\mu p_\nu}, \quad 22)$$

wobei $\mathfrak{M}$ einen Wert zwischen M und N bedeutet.

Bezeichnen wir $\frac{\Sigma p\,\alpha}{\Sigma p}$ mit $\mathfrak{A}_0$ und $\frac{\Sigma p\,\varphi(\alpha)}{\Sigma p}$ mit $\varphi(\mathfrak{A})$, nehmen wir ferner an, dass die erste Ableitung $\varphi'(\alpha)$ innerhalb des Intervalles des α sein Zeichen nicht ändert und zwischen zwei endlichen Grenzen m und n bleibt, so können wir nach dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung auch schreiben:

$$\frac{\Sigma p\,\varphi(\alpha)}{\Sigma p} - \varphi\left(\frac{\Sigma p\,\alpha}{\Sigma p}\right) = \varphi(\mathfrak{A}) - \varphi(\mathfrak{A}_0) = (\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{m}(\varphi'\alpha),$$

wobei $\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)$ einen Wert zwischen m und n bezeichnet.

Für den Unterschied zwischen dem Argumente des Funktionsmittels und dem Mittel der Argumente ergibt sich demnach folgender Ausdruck:

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_0 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{M}(\varphi''\alpha)}{\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)}\,\frac{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} p_\mu p_\nu(\alpha_\mu-\alpha_\nu)^2}{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} p_\mu p_\nu} \quad 23)$$

$\mathfrak{M}(\varphi''\alpha)$ und $\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)$ haben, wie bereits bemerkt, die Bedeutung von Mittelwerten zwischen den Extremen des zweiten und ersten Differentialquotienten der Funktion. Der Summenquotient aber auf der rechten Seite der Gleichung ist nichts anderes als ein arithmetisches Mittel aus den Differenzquadraten irgend zweier Argumente, gleiche nicht ausgenommen. Man sieht aus dieser Formel alsbald, dass, wenn die Differenzen zwischen den Componenten des Mittels unendlich klein von der ersten Grössenordnung sind, die beiden Mittel sich im Allgemeinen nur um ein Unendlich kleines von der zweiten Grössenordnung unterscheiden, welches gegenüber den Differenzen der Componenten verschwindet; in diesem Falle sind also alle Mittel einander gleich, mit welcher Funktion sie auch gebildet sein mögen. Eine Ausnahme tritt aber immer ein, sobald $\varphi'(\alpha)$ innerhalb des Intervalles der α gleich o wird, dieses also auch möglicherweise mit $\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)$ statthat; in diesem Falle können die Mittel bis zur Differenz der Extreme von einander abweichen.

Der Höldersche Satz und die daran angeschlossenen Betrachtungen lassen eine unmittelbare Anwendung auf die Reduktion des Tangenten- und Sekantenmittels der Böschungswinkel auf das Winkelmittel zu, wenn wir in den Formeln die Gewichte p durch die Flächenelemente $\Delta O = dx\,dy = d\xi\,d\eta$ der Horizontalprojection ersetzen. Da wir es aber durchaus mit Mitteln aus unendlich vielen mit unendlich kleinen Gewichten begabten Elementen zu thun haben, so müssen an die Stelle der Summen Integrale treten:

$$A - A_0 = \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{M}(\varphi''\alpha)}{\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)} \cdot \frac{\int\int^{0}\int\int^{0} dx\,dy \cdot d\xi\,d\eta\,(\alpha(xy) - \alpha(\xi\eta))^2}{\left(\int\int^{0} dx\,dy\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{M}(\varphi''\alpha)}{\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)} M(\alpha(xy) - \alpha(\xi\eta))^2 \ldots\ldots \quad 24)$$

Die Reduktionsgrösse $A - A_0$ ist demnach von zwei wesentlich verschiedenen Dingen abhängig, was in den beiden Faktoren $\frac{\mathfrak{M}(\varphi''\alpha)}{\mathfrak{m}(\varphi'\alpha)}$ und $M(\alpha(xy) - \alpha(\xi\eta))^2$ seinen mathematischen Ausdruck findet. Erstens nämlich von der zur Mittelbildung gewählten Funktion, zweitens aber auch von der Art und Weise, wie die Böschungen auf dem Gebiete verteilt sind und davon, welche Abweichungen die einzelnen Böschungen unter sich aufweisen.

Der Wert von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}}$ ist massgebend für die Art und Grösse des Unterschiedes zweier mit Zugrundelegung verschiedener Funktionen $\varphi(\alpha)$ gerechneter Mittel gegenüber dem einfachen Winkelmittel bei vorausgesetzter Verteilung der Böschungswinkel α über die Fläche der Horizontalprojection. Der Einfluss dieser Verteilung selbst auf die Grösse des Unterschiedes wird durch den Quotienten M der Integrale ausgedrückt. Derselbe stellt hier das Mittel aus den Quadraten der Differenzen der Böschungswinkel zweier beliebiger Punkte dar, wobei jedes Differenzenquadrat mit einem Gewichte gleich dem Produkte der Flächenelemente der Horizontalprojection beider Componenten der Differenz behaftet erscheint. Zur näherungsweisen Bestimmung vom $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}}$ stehen uns die Extreme von $\varphi''(\alpha)$ und $\varphi'(\alpha)$ zu Gebote, mit Hilfe deren wir $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}}$ in zwei Grenzen einschliessen können. Die Berechnung des Mittels M aus den Quadraten der Böschungsunterschiede nach obiger Formel würde allerdings weit mehr Arbeit erfordern als die Berechnung irgend eines Böschungsmittels überhaupt; in Anbetracht des Umstandes aber, dass die Kenntnis von M uns nur zur Bestimmung von $A - A_0$, was den Charakter eines Correctionsgliedes trägt, dienen soll, können wir uns mit einer Schätzung be-

gnügen, die sich, wie wir sehen werden, innerhalb verhältnismässig enger Grenzen bewegt.

Nehmen wir an, dass die grösste Differenz zweier Böschungswinkel innerhalb des in Betracht kommenden Intervalles gleich D sei, dann kann jenes Mittel M nur dann den Wert $\frac{1}{2} D^2$ erreichen, wenn überhaupt nur zweierlei Böschungen, die um D verschieden sind, vorkommen und sich gleichheitlich in die Fläche der Horizontalprojection teilen. Wenn aber das eine Extrem den weitaus grössten Teil der Fläche, das andere nur den verschwindenden Rest einnimmt, nähert sich M der Null. Sind alle Böschungswinkel gleichheitlich über die Horizontalprojection verteilt, so beträgt das Mittel M der Quadrate ihrer Differenzen $\frac{1}{6} D^2$, in dem Falle, dass die extremen Böschungen breiteren Raum einnehmen mehr, in dem in der Natur regelmässig auftretenden Falle, wo die mittleren Böschungen vorherrschen, weniger. Um hiefür noch nähere Anhaltspunkte zu geben, sei angenommen, dass sich die Areale der sanfteren, der mittleren und der steileren Böschungen, wie $p_1 : p_2 : p_3$ verhalten, dass ferner die sanfteren Böschungen die Maximaldifferenz d_1, die mittleren d_2, die steileren d_3 ($d_1 + d_2 + d_3 = D$) umfassen und im übrigen gleichmässig auf ihrem Areal verteilt sein mögen. Dann bestimmt sich das Mittel M durch folgenden Ausdruck:

$$M = \frac{1}{6(p_1+p_2+p_3)} \Big[p_1^3 d_1^2 + p_2^3 d_2^2 + p_3^3 d_3^2 + \\ + 2 p_1 p_2 (2(d_1^2 + d_2^2) + 3 d_1 d_2) + 2 p_2 p_3 (2(d_2^2 + d_3^2) + 3 d_2 d_3) \\ + 2 p_1 p_3 (2(d_1^2 + d_3^2) + 3 d_1 d_3 + 6 d_2 (d_1 + d_2 + d_3)) \Big] \quad 25)$$

Dieses vorausgeschickt, betrachten wir die folgende Tabelle der Funktionen $\operatorname{tg} \alpha$, $\sec \alpha$ und ihrer ersten und zweiten Ableitungen.

Aus derselben entnehmen wir, dass die ersten und zweiten Ableitungen beider Funktionen innerhalb des be-

trachteten Intervalles positiv sind und daher Tangenten- wie Sekantenmittel dem Hölderschen Satz zufolge grösser als das Winkelmittel ist.

Tabelle I.

α	0^0	10^0	25^0	45^0
$\operatorname{tg}\alpha$	0,0000	0,1768	0,4663	1,0000
$\frac{d}{d\alpha}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	1,0000	1,0311	1,2174	2,0000
$\frac{d^2}{d\alpha^2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$	0,0000	0,3636	1,1354	4,0000
$\sec\alpha$	1,0000	1,0154	1,1034	1,4142
$\frac{d}{d\alpha}\sec\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$	0,0000	0,1790	0,5145	1,4142
$\frac{d^2}{d\alpha^2}\sec\alpha = \frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$	1,0000	1,0952	1,7468	6,0000

Um über den Betrag des Unterschiedes Aufschluss zu erhalten, denken wir uns das Intervall von 0^0 bis 45^0 in 3 Teile: 0^0—10^0, 10^0—25^0, 25^0—45^0 zerlegt und für jeden einzelnen Teil den Vergleich des Tangenten- und Sekantenmittels mit dem Winkelmittel vorgenommen. Das Resultat des Vergleiches ist in folgender Tabelle niedergelegt. Dabei wurde als Mittel M aus den Quadraten der Böschungsunterschiede $\frac{1}{6} D^2$ zu grunde gelegt; der zugehörige Winkelwert ist in der zweiten Zeile der Tabelle angegeben. Aus der Tabelle für die Ableitungen entnehmen wir die oberen und unteren Grenzen für den Quotienten $\frac{\mathfrak{M}}{m}$ und berechnen hiemit obere und untere Grenzen für die Differenzen $A - A_0$ und $A' - A_0$ nach der Formel 24. Endlich rechnen wir noch den Wert der Differenz für den bestimmten Fall, dass die Böschungen des Intervalles gleichförmig über die Hori-

zontalprojection verteilt sind, welcher Wert (mit „Medium" in der Tabelle bezeichnet) sich dann natürlich zwischen den äussersten Grenzen liegend ergeben muss.

Tabelle II.

Intervall		0^0—10^0	10^0—25^0	25^0—45^0
Unterschied der Böschungswinkel.	Grösster	10^0	15^0	20^0
	Mittlerer	$4^0\,5'$	$6^0\,7'$	$8^0\,10'$
Unterschied zwischen Tangenten- und Winkelmittel des Böschungswinkels.	Obere Grenze	$0^0\,2'$	$0^0\,11'$	$0^0\,57'$
	Untere Grenze	$0^0\,0'$	$0^0\,3'$	$0^0\,10'$
	Medium	$0^0\,1'$	$0^0\,6'$	$0^0\,25'$
Unterschied zwischen Sekanten und Winkelmittel des Böschungswinkels.	Obere Grenze	$10^0\,0'$	$1^0\,36'$	$3^0\,24'$
	Untere Grenze	$0^0\,24'$	$0^0\,21'$	$0^0\,22'$
	Medium	$0^0\,49'$	$0^0\,37'$	$0^0\,49$

Das Studium dieser Zahlenreihen bestätigt, was nach dem früher Gesagten zu erwarten war, dass sich innerhalb mässiger Intervalle die Abweichungen der verschiedenen Mittel im Allgemeinen in engen Grenzen bewegen, nur beim Sekantenmittel tritt der schon erwähnte Ausnahmefall ein, dass die obere Grenze der Abweichung wegen dem Verschwinden von $\varphi'\alpha$ für $\alpha = o$ bis an den äussersten Wert der Differenz der Böschungswinkel gerückt wird.

III. Teil.

Näherungsverfahren zur Auswertung der wahren Oberfläche.

1.

Im engsten Zusammenhang mit der Theorie des Sekantenmittels der Böschungswinkel steht das neuerdings von Professor Penck in das orometrische Programm aufgenommene

Problem der Ermittelung des wahren Areals der krummen Landoberfläche. Bezeichnen wir nämlich mit $\Delta\omega$ ein Flächenelement jener krummen Oberfläche und mit ΔO das entsprechende der Horizontalprojektion, so findet die Beziehung $\Delta\omega = \frac{\Delta O}{\cos\alpha} = \Delta O \sec\alpha$ statt. Die Summe aller Elemente $\Delta\omega$ gibt das gesuchte krumme Areal und dieses ist also gleich $\Sigma\Delta\omega = \Sigma\Delta O \sec\alpha$. Wird dieselbe durch die Summe der Elemente der Horizontalprojection $\Sigma\Delta O$ dividiert, so ist der Quotient $\frac{\Sigma\Delta O \sec\alpha}{\Sigma\Delta O}$, der den Arealüberschuss der krummen Fläche gegenüber der Horizontalprojection anzeigt, ersichtlich gleich der Sekante des sogenannten Sekantenmittels der Böschungswinkel. Wenn es uns demnach gelingt, auf einfache Weise das Sekantenmittel auszuwerten, so haben wir das in Rede stehende Problem auf die Ermittelung des ebenen Areals der Horizontalprojection zurückgeführt und damit gelöst. Hiezu sind aber die im vorigen Abschnitt entwickelten Methoden zur Reduktion der mittels verschiedener Funktionen gebildeten Mittel der Böschungswinkel auf einfache Winkelmittel und umgekehrt sehr geeignet. Das Tangentenmittel ist, wie im I. Teile ausgeführt wurde, völlig exakt und einfach zu bestimmen; dasselbe kann mit grosser Annäherung (wenigstens innerhalb mässiger Intervalle) auf das Winkelmittel reduciert werden und dieses wiederum lässt sich auf das gewünschte Sekantenmittel umrechnen. Mit der Sekante des letzteren Mittels ist dann das Areal der Horizontalprojection zu multiplicieren, um das Areal der krummen Oberfläche zu erhalten. Die doppelte Umrechnung des Tangentenmittels kann man sich indessen, wie im nächsten Abschnitte genauer erörtert werden soll, sparen, indem man eine direkte Reduktion der Sekante des Tangentenmittels auf die Sekante des Sekantenmittels durchführt, wodurch auch einige Bedenken bezüglich

der Reducierbarkeit des Sekantenmittels kleiner Böschungen auf Winkelmittel beseitigt werden und eine Schätzung der erreichbaren Genauigkeit möglich wird. Indem wir hier zum Teile Resultate von Entwickelungen des nächsten Abschnittes anticipieren, kommen wir zu folgendem Vorschlage der näherungsweisen Bestimmung des Areals einer topographischen Fläche:

Man zerlege die Horizontalprojektion auf der Karte in dreierlei Gebiete von den Arealen P_1, P_2, P_3, welche der Hauptsache nach Böschungen von 0^0-10^0, 10^0-25^0, 25^0-45^0 enthalten, suche in jedem Gebiete für sich das Tangenmittel der Böschungswinkel A_1, A_2, A_3 durch Ausmessung der Isohypsenlängen und der Areale der Gebiete P_1, P_2, P_3. Dann bilde man $\sec A_1$, $\sec A_2$, $\sec A_3$ und korrigiere diese Ausdrücke durch Anfügung der Faktoren 1,0013, 1,0028, 1,0053 zu den entsprechenden Funktionen des Sekantenmittels: $\sec A_1' = 1{,}0013 \sec A_1$; $\sec A_2' = 1{,}0028 \sec A_2$, $\sec A_3' = 1{,}0053 \sec A_3$. Hieraus berechnet sich das gesuchte Areal F nach der Formel:

$$F = P_1 \sec A_1' + P_2 \sec A_2' + P_3 \sec A_3' \qquad 26)$$
$$= 1{,}0013\, P_1 \sec A_1 + 1{,}0028\, P_2 \sec A_2 + 1{,}0053\, P_3 \sec A_3 \ldots.$$

Statt der drei angegebenen Faktoren, die mittleren Verhältnissen entsprechen, müssen in Fällen ausnahmsweiser Verteilung der Böschungswinkel des Gebietes auch andere, zwischen der Einheit und 1,0038; 1,0085, 1,0160 liegende gewählt werden, worüber das im vorigen Abschnitte Gesagte und jedenfalls die Formel 25 genügenden Aufschluss gibt.

Bezüglich der Einteilung in die Gebiete P_1, P_2, P_3 ist zu bemerken, dass es nur von geringem Einfluss ist, wenn ein Gebiet z. B. P_1 kleinere Partien mit Böschungen enthält, die eigentlich in das nächste Gebiet P_2 gehörten; denn dieselben machen ihren Einfluss auf das Tangentenmittel A_1,

im entgegengesetzten Sinne und genau in derselben Grösse geltend, wie sie es beim Mittel A_2 gethan hätten. Nur bei der Umrechnung auf das Sekantenmittel treten sie mit einem etwas veränderten Reduktionsfaktor in Verbindung, so dass sie die Summe thatsächlich, wenn auch nur wenig alterieren. Man braucht also bei Abgrenzung der drei Gebiete P_1, P_2, P_3 nicht allzuängstlich zu sein und umsoweniger, als sich die kleinen Fehler, die durch Uebergreifen des einen Gebietes in's Bereich des anderen entstehen, immer dann teilweise aufheben, wenn solche Uebergriffe wechselseitig, d. h. vom steileren Gebiet in's flachere und umgekehrt erfolgen. Dagegen dürfen horizontale oder nahezu horizontale Partien nie mit ganz steilen zu einem Mittel vereinigt werden und man wird gut thun, vor der Mittelbildung alle innerhalb steiler Partien liegenden horizontalen Flächen auszusondern und mit der Area ihrer Horizontalprojection separat in die Summe F eingehen zu lassen.

Wir haben die Näherungsmethode so vorgetragen, wie sie uns für geographische Zwecke hinreichend genau (auf ca. 0,5 % der auszuwertenden Fläche) erscheint. Man kann dieselbe natürlich durch Einführung der doppelten Zahl von Gebieten, in welchen die Mittel der Böschungswinkel genommen werden weit genauer, nämlich mindestens viermal so genau machen. Denn, erstens ist der Reduktionsfaktor beider Mittel aufeinander unter sonst gleichen Umständen dem Quadrate der Böschungsunterschiede (die nunmehr nur halb so gross sein werden) proportional, zweitens sind die Grenzen, innerhalb der sich der Reduktionsfaktor infolge der Variabilität der Differentialquotienten bewegen kann, enger und drittens hat die für die Auswahl des Reduktionsfaktors im Allgemeinen massgebende Annahme gleichmässiger Verteilung der Böschungen in kleineren Gebieten mehr Wahrscheinlichkeit für sich. Bezüglich weiterer Ausführung und strenger Begründung des hier Vorgebrachten verweisen wir

auf den zweiten Abschnitt dieses Teiles und wenden uns nun zur Besprechung des Näherungsverfahrens, das Herr Professor Penck zur Ermittelung der wahren Oberfläche und mittleren Böschungswinkel vorschlägt.

Die Idee des Zusammenhanges zwischen mittlerer Böschung und Ueberschuss des wahren Areales gegenüber der Projektion, welche unserem Näherungsverfahren zu Grunde liegt, bildet auch das Fundament der Ausführungen Pencks über denselben Gegenstand. Derselbe ist aber im Gegensatze zu unserer Auffassung der Meinung, dass es geratener sei, den Arealüberschuss der krummen Fläche über die Horizontalprojektion direkt zu bestimmen und ihn alsdann zur Berechnung des mittleren Böschungswinkels zu verwenden. Anknüpfend an das umständliche, aber von theoretischem Standpunkte aus tadellose Verfahren von J. Brück [1]) schreibt Penck: [2])

„Weniger zuverlässig, aber rascher durchführbar ist folgendes Verfahren: Man entwirft von der Gegend, deren wahre Oberfläche bestimmt werden soll, ein Netz sich rechtwinklig kreuzender Höhenprofile in gleichem Masstabe von Länge und Höhe und misst auf denselben die wellige Landoberfläche. Daraus berechnet man die mittlere Längszunahme von Schnitten der Landoberfläche in jeder der beiden Profilrichtungen. Durch Multiplikation beider Zunahmen erhält man sodann die Arealzunahme der wahren Landoberfläche gegenüber ihrer Projektion. Je mehr Profile man zieht und je kleiner die Areale sind, deren Oberflächen-

1) Vergleich der aus den Vermessungen hervorgehenden Flächenräume mit jenen, welche in der Natur wirklich vorhanden sind. Mitteilungen des k. k. militärgeographischen Institutes VII. Bd. 1887. Wien.

2) Folgende Stelle aus der noch nicht publicierten „Morphologie der Erdoberfläche" von Penck ist nach dem Citate von J. Beneš (siehe Einleitung) gegeben.

berechnung durchgeführt wird, desto genauere Ergebnisse sind erhaltbar."

Später wird dann das Verhältnis von der Horizontalprojektion zur wahren Oberfläche gleich dem Cosinus eines mittleren Böschungswinkels geseszt, der als „wahrer" bezeichnet wird.

Ein Beweis für die Zulässigkeit des Näherungsverfahrens ist an der citierten Stelle nicht erbracht. Um über diese Zulässigkeit zu entscheiden, thut man gut, sein Augenmerk auf zweierlei Punkte zu lenken. Der erste Punkt betrifft die Zulässigkeit des Verfahrens in einem unendlich kleinen Gebiet. Diese ist, wenn wir den Schlusssatz von Pencks Ausführung richtig deuten, unbedingt behauptet worden. Der zweite Punkt bezieht sich auf den associativen Charakter des Verfahrens, von dem die Berechtigung, aus der Giltigkeit im unendlich kleinen Gebiete auf die Giltigkeit im Endlichen zu schliessen, abhängt. Nach beiden Richtungen hin erweist sich nun das Näherungsverfahren nur für flacheres Gebiet mit kleinen Profilwinkeln als zulässig, wie aus folgender Analyse hervorgeht. Es ist zunächst leicht nachzuweisen, dass selbst bei unendlich vielen Profilen und unendlich kleinen Arealen durch das Penck'sche Verfahren die Arealzunahme der wahren Oberfläche gegenüber der Projektion nicht erhalten wird. Wenden wir dasselbe nämlich auf eine gleichmässig geböschte Ebene an, die übrigens so gross oder so klein sein kann, wie sie will, so zeigt sich Folgendes: Es sei β der Neigungswinkel eines Profiles, das mit der Fallrichtung der Ebene einen Winkel ϑ einschliesst, γ der des dazu senkrechten Profiles, α der Böschungswinkel der Ebene, so ergibt sich aus den rechtwinkligen Dreikanten die von der schiefen Ebene, der Horizontalebene und je einer der Profilebenen gebildet wird (siehe Fig. 1):

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \sin\vartheta \qquad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cos\vartheta$$

Die Längszunahmen in den beiden Profilrichtungen werden:

$$\left.\begin{aligned} &\sec\beta = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\vartheta}\,;\ \sec\gamma = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\vartheta} \\ &\text{Das Produkt beider:} \\ &\sec\beta\cdot\sec\gamma = \sec\alpha\sqrt{1+\sin^4\alpha\cdot\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\vartheta\sec^2\alpha} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 26)$$

soll nach Penck die Arealzunahme der schiefen Ebene gegenüber der Horizontalprojection geben, während dieselbe doch thatsächlich durch $\sec\alpha$ dargestellt wird. Da der Wert der Wurzel — ausgenommen für $\cos\vartheta = o$ oder $\sin\vartheta = o$ — stets grösser als die Einheit ist, so gibt das Produkt $\sec\beta\cdot\sec\gamma$ in der Regel einen zu grossen und noch dazu von der Wahl der Profilrichtungen abhängigen Wert. Würde man aus ihm nach Pencks Vorschrift den wahren mittleren Böschungswinkel A'' nach der Formel $\sec\beta\cdot\sec\gamma = \sec A''$ berechnen, so müsste man A'' in der Regel grösser finden als den wirklichen Böschungswinkel α, z. B. statt 30° möglicherweise gleich 31°. Hieraus ist leicht zu entnehmen, dass das Penck'sche Verfahren unter Umständen ein Mittel der Böschungswinkel ergibt, das (im Gegensatze zu dem von Neumann) grösser als der grösste Böschungswinkel ist. Andrerseits ist zu bemerken, dass der Fehler, den man bei Anwendung des Verfahrens auf die schiefe Ebene begeht, für mässige Böschungen sehr gering ist und bis zu solchen von 30° den Betrag von 1° nicht übersteigt. Damit ist allerdings die Zulässigkeit des Verfahrens für mässig geböschte Terrainflächen noch nicht bewiesen, sondern hiezu bedarf es noch einer Untersuchung des zweiten Punktes, nämlich darüber, ob das Verfahren den früher betonten associativen Charakter besitzt, das heisst auf die Summe zweier Gebiete angewendet denselben Wert ergibt, wie die Summation der Einzelwerte jedes Gebietes. Ist dieses der Fall, so können wir aus der näherungsweisen Giltigkeit des Verfahrens für ein unendlich kleines ebenes Flächenelement auf die Giltigkeit für zwei, drei und beliebig viele solche schliessen und damit die Zulässigkeit für jede krumme Fläche,

die als Polyeder von unendlich vielen kleinen Facetten aufgefasst werden kann, beweisen.

Es seien O_1 und O_2 zwei unendlich kleine Gebiete mit den Böschungswinkeln α_1 und α_2 und den Profilwinkeln in zwei zu einander senkrechten Richtungen $\beta_1\ \gamma_1$, $\beta_2\ \gamma_2$. Die wahre Arealzunahme wird dann durch $\frac{O_1 \sec \alpha_1 + O_2 \sec \alpha_2}{O_1 + O_2}$ dargestellt. Sie ist unter Voraussetzung kleiner Böschungswinkel genähert gleich:

$$\frac{O_1 \sec \beta_1 \sec \gamma_1 + O_2 \sec \beta_2 \sec \gamma_2}{O_1 + O_2} \qquad 27)$$

Die beiden Mittel aus den Längszunahmen der Profile sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\frac{O_1 \sec \beta_1 + O_2 \sec \beta_2}{O_1 + O_2}\ ,\ \frac{O_1 \sec \gamma_1 + O_2 \sec \gamma_2}{O_1 + O_2}\ .$$

Ihr Produkt

$$\frac{(O_1 \sec \beta_1 + O_2 \sec \beta_2)(O_1 \sec \gamma_1 + O_2 \sec \gamma_2)}{(O_1 + O_2)^2}$$

müsste nach Penck der Arealzunahme:

$$\frac{O_1 \sec \beta_1 \sec \gamma_1 + O_2 \sec \beta_2 \sec \gamma_2}{O_1 + O_2}\ .$$

gleich sein. Das ist aber in der That nicht der Fall; die Differenz ν der beiden gleich sein sollenden Ausdrücke ist vielmehr:

$$\nu = \frac{O_1 O_2}{(O_1 + O_2)^2}(\sec \beta_1 - \sec \beta_2)(\sec \gamma_2 - \sec \gamma_1)$$

$$= \frac{4 O_1 O_2}{(O_1 + O_2)^2} \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \sin \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \qquad \ldots\ 28)$$

Wie man sieht, ist die Bedingung der Associativität im Allgemeinen nicht streng erfüllt; nur in dem speciellen Falle, wo $\beta_1 = \beta_2$ oder $\gamma_1 = \gamma_2$ ist, d. h. wenn in beiden Gebieten die Profilwinkel in einer Richtung gleich sind, trifft dies zu.

Es würde hiernach nur für Terrainflächen, die die Gestalt eines geneigten Cylinders haben, die Methode nach dieser Richtung einwurfsfrei sein. In Wirklichkeit ist aber der Ausdruck ν solange immer klein, und somit die Associativitätsbedingung $\nu = o$ näherungsweise erfüllt, als die Profilwinkel eine gewisse Grösse (ca. 20^0) nicht überschreiten. Denn der Wert von ν ist annähernd proportional den vierten Potenzen der Profilwinkel, diese in Teilen des Radius gemessen. Für $20^0 = 0{,}35$ beträgt aber diese vierte Potenz nur mehr 0,015.

Somit muss dem Näherungsverfahren Pencks im Gebiete flacherer Böschungen die Anwendungsberechtigung zuerkant werden.

2.

Behufs tieferer Begründung des zu Beginn des vorigen Abschnittes vorgetragenen Näherungsverfahrens zur Auswertung des wahren Areals ist es zweckmässig, einen direkten Vergleich von Tangenten- und Sekantenmittel des Böschungswinkels durchzuführen. Hiezu kann wieder der Hölder'sche Satz benützt werden, wenn wir die Sekante als Funktion der Tangente ausdrücken. Wird demnach $\operatorname{tg}\alpha = v$, $\sec\alpha = u$ gesetzt, so ist die gesuchte Beziehung $u = \psi(v) = \sqrt{1+v^2}$ und diese hat in der Formel 22 an Stelle von $\varphi(\alpha)$ zu treten, so wie v an Stelle von α selbst. Bezeichnen wir analog dem Früheren:

$$\sec A' = \frac{\iint^0 \psi(v)\,dx\,dy}{\iint^0 dx\,dy} \quad \text{mit } \psi(V'), \text{ wobei } V' = \operatorname{tg} A' \text{ und}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\iint^0 v\,dx\,dy}{\iint^0 dx\,dy} \quad \text{mit } V, \text{ so lautet der Hölder'sche Satz:}$$

$$\psi(V') - \psi(V) = \sec A' - \sec A = \frac{\mathfrak{M}\,\psi''(v)}{4} M\,(v(xy) - v(\zeta\eta))^2 \quad 29)$$

Wird statt der Differenz auf der linken Seite successive $V'-V$ und $A'-A$ eingeführt, so ergibt sich nach zweimaliger Anwendung des Fundamentalsatzes der Differentialrechnung:

$$\psi(V')-\psi(V)=(V'-V)\,\mathfrak{m}(\psi'(v))$$
$$=(A'-A)\,\mu(v'(\alpha))\cdot\mathfrak{m}(\psi'(v))$$

Hieraus folgt für die Differenz der beiden Mittel:

$$A'-A=\frac{\mathfrak{M}(\psi''(v))}{4\,\mathfrak{m}(\psi'(v))\cdot\mu(v'(\alpha))}\,M(v(xy)-v(\zeta\eta))^2 \ldots . \quad 30$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{M}(\psi''(v))$, $\mathfrak{m}(\psi'(v))$, $\mu(v'(\alpha))$ Werte der betreffenden Ableitungen, die zwischen den Extremen innerhalb des Intervalles liegen und $M(v(xy)-v(\zeta\eta))^2$ das Mittel aus den Quadraten der Differenzen der Tangenten zweier beliebiger Böschungswinkel. Wir stellen nun wieder eine Tabelle der Funktionen v, $\psi(v)$ und ihrer Differentialquotienten für die schon früher beobachteten Intervalle zusammen.

Tabelle III.

α	0^0	10^0	25^0	45^0
$v=\operatorname{tg}\alpha$	0,0000	0,1763	0,4663	1,0000
$u=\sec\alpha$	1,0000	1,0154	1,1034	1,4142
$\frac{du}{dv}=\sin\alpha$	0,0000	0,1736	0,4226	0,7071
$\frac{d^2u}{dv^2}=\cos^3\alpha$	1,0000	0,9551	0,7445	0,3536
$\frac{dv}{d\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	1,0000	1,0311	1,2174	2,0000

Dieselbe lehrt uns, dass im ganzen Intervall ψ'', ψ', v' positiv sind, infolgedessen auch die Differenz $A'-A$ positiv wird. Daher ist das Sekantenmittel stets grösser als das Tangentenmittel.

Um die Grösse des Unterschiedes auszuwerten, sollen wieder die extremen Werte des Quotienten $\frac{\mathfrak{M}}{m \cdot \mu}$ in den drei Teilintervallen $0-10^0$, $10^0—25^0$, $25^0—45^0$ berechnet werden, was mit Hilfe obiger Tabelle leicht geschehen kann. Das Mittel M aus den Differenzenquadraten der Böschungen werde zu $\frac{1}{6}$ des Quadrates der grössten Differenz des Intervalles angenommen.[1]) Dann ergeben sich die in folgender Tabelle zusammengestellten Grenzwerte für die Differenz beider Mittel. Ihnen ist noch diejenige (mittlere) Differenz beigefügt, welche sich herausstellt, wenn die Böschungswinkel so verteilt sind, dass gleichen Differenzen ihrer Tangenten gleiche Areale der Horizontalprojektion entsprechen. Diese Verteilung ist etwas, doch nicht allzusehr verschieden von der früher angenommenen, wo gleichen Differenzen der Winkel gleiche Areale der Horizontalprojektion zugehörten, daher stimmen auch die dort angegebenen Unterschiede von $A-A_0$ und $A'-A_0$ nahezu mit der Differenz $A'-A$ der folgenden Tabelle überein. Die drei letzten Zeilen der Tabelle sind bestimmt, über die Grösse des Fehlers zu belehren, den man begeht, wenn man zur Berechnung des wahren Areals der Terrainoberfläche an Stelle des Sekantenmittels das Tangentenmittel setzt. Hiezu dient uns die Formel 29, durch welche der Unterschied von $\sec A'$ und $\sec A$ ausgedrückt oder, genauer gesagt, in 2 Grenzen eingeschlossen wird. Das Verhältnis der obern und untern Grenze dieses Unterschiedes zu $\sec \alpha$ in der Mitte des betreffenden Intervalles haben wir in Procenten ausgedrückt und den beiden vorletzten Rubriken der Tabelle einverleibt. Da wir aber auf die Kenntnis des Tangentenmittels allein nicht beschränkt sind, sondern den Unterschied gegenüber dem Sekantenmittel mit ziemlicher Annäherung berechnen können, so werden wir bei der Areal-

1) Vergleiche II. Teil, 2. Abschnitt, Seite 65.

bestimmung an $\sec A$ eine Correktion anbringen und dadurch den Fehler noch bedeutend herabmindern. Wir wählen für dieselbe das Mittel aus der oberen und unteren Grenze der Differenz $\sec A' - \sec A$, d. h. für die 3 betrachteten Intervalle, also 0,126 %, 0,284 %, 0,534 % und kommen damit zu den im vorigen Abschnitt benützten, angenäherten Correktionsformeln:

$$\sec A'_1 = 1{,}0013 \sec A;\ \sec A'_2 = 1{,}0023 \sec A;\ \sec A'_3 = 1{,}0053 \sec A_3.$$

Tabelle IV.

Intervall		0^0-10^0	10^0-25^0	25^0-45^0
Grösster Unterschied	der Tangenten	0,1763	0,2900	0,5337
	der Winkel	10^0	15^0	20^0
Mittlerer Unterschied	der Tangenten	0,0720	0,1184	0,2179
	der Winkel	ca. 4^0	ca. 6^0	ca. $8^0\ 30'$
Unterschied von Sekanten- und Tangentenmittel der Böschungswinkel	Obere Grenze	$10^0\ 0'$	$1^0\ 4'$	$0^0\ 59'$
	Untere Grenze	$0^0\ 24'$	$0^0\ 17'$	$0^0\ 10'$
	Medium	$0^0\ 45'$	$0^0\ 31'$	$0^0\ 23'$
Fehler bei der genäherten Arealsberechnung	Obere Grenze	0,129 %	0,319 %	0,724 %
	Untere Grenze	0,123 %	0,249 %	0,344 %
	Mit Correktur	0,003 %	0,035 %	0,190 %

Die letzte Zeile der Tabelle gibt die noch verbleibende Unsicherheit, wenn $\sec A$ um das Mittel der oberen und unteren Grenze der Differenz $\sec A' - \sec A$ vergrössert wird. Aus der Tabelle IV ersehen wir, dass die Differenz von Sekanten- und Tangentenmittel in flacheren Partien sehr erheblich werden kann, in steilen dagegen geringer bleibt, was wieder mit dem Verschwinden von $\psi'(v)$ für $v = o$ zusammenhängt. Dagegen ist der Unterschied von $\sec A' - \sec A$, der für die Arealauswertung massgebend ist, verhältnismässig unbedeutend und in Anbetracht des Umstandes, dass obige

Intervalle sich wie 2:3:4, ihre Quadrate aber, die jenen Unterschied mitbestimmen, wie 4:9:16 verhalten, sehr konstant. Ganz unbeträchtlich sind die in der Unsicherheit der Correktion der Mittel auf einander begründeten Differenzen. Dabei ist im Auge zu behalten, einerseits, dass die in der Tabelle angeführten Procentzahlen für den angenommenen Mittelwert von $M = \frac{D^2}{6}$ zwar den äussersten Wert darstellen, andrerseits aber, dass jener Mittelwert nur bei annähernd gleicher Verteilung der Böschungen vollkommen richtig ist, bei gleichmässigem und ausschliesslichem Vorherrschen der beiden extremen Böschungen des Intervalles dreimal so gross werden und beim Vorherrschen einer Böschung nahezu verschwinden kann. Immerhin dürfte bei einiger Aufmerksamkeit der nach Anbringung der Correktur zu befürchtende Fehler einer Arealsauswertung unter 0,5 % bleiben. Würde man den drei in Betracht gezogenen Intervallen ein viertes hinzufügen, das Böschungen von 45° bis 70° umfasst, so würde selbst für dieses die Differenz $\sec A' - \sec A$ nur 1,2 % und die Unsicherheit derselben 0,8 % ausmachen, obwohl das Intervall auf 25° ausgedehnt ist.

Es ist übrigens durchaus nicht nötig, sich bei Anwendung unseres Verfahrens sklavisch an die gegebenen Intervalle zu halten, die unter Berücksichtigung allgemeiner Verhältnisse mehr zur Exemplifikation gewählt wurden. In speciellen Fällen werden sich vielfach andere Intervalle naturgemäss darbieten. Die Ausführungen dieses Abschnittes gestatten dann eine einfache Berechnung der wahrscheinlichsten Correktur, die zur Arealsberechnung an die Sekante des Tangentenmittels anzubringen ist.

Am Schlusse unserer Ausführungen angelangt, wollen wir noch zu der naheliegenden Frage Stellung nehmen, ob das Tangenten- oder das Sekantenmittel des Böschungswinkels

zum allgemeinen Gebrauche als Mass für die Neigung des Terrains zu empfehlen sei. Obwohl wir theoretisch beide Mittel als rationelle und wohldefinierte völlig gleich stellen, müssen wir die Frage unbedingt zu Gunsten des Tangentenmittels beantworten und zwar aus zweierlei Gründen, die sich einerseits auf die Bedeutung der Mittel, andrerseits auf die Auswertung derselben beziehen. In Bezug auf erstere ist zu bemerken, dass, was immer für Eigentümlichkeiten des Terrains man auch durch den mittleren Böschungswinkel wird ausdrücken wollen, sei es die Ungangbarkeit desselben, die Wildheit der Gewässer, die Erhabenheit der Formen, immer werden zur Hervorbringung dieser Eigentümlichkeiten die einzelnen Teile in einem Masse beitragen, das weit eher mit der Tangente als der Sekante des betreffenden Böschungswinkels zusammenhängt, wenigstens gilt dies für flachere Böschungen. Die Schwierigkeiten, z. B. bei Anlage und Gebrauch eines Weges in Böschungen von 1° und 10° verhalten sich eher wie 1 : 10 (entsprechend den Tangenten) als wie 1 : 1,015 (entsprechend den Sekanten), ein Gleiches gilt von der Erosionsfähigkeit des Meteorwassers und der landschaftliche Eindruck eines welligen Rückens mit wechselnden Neigungen von 5° ist jedenfalls eher 6,6 als 1,15 mal geringer, wie der eines Gebirgskammes, welcher Neigungen von 30° aufweist. Was nun die Auswertung betrifft, so ist zu Gunsten des Tangentenmittels anzuführen, dass es durch Messung einer einfachen Reihe schon vorgezeichneter Linien, der Isohypsen nämlich, so genau bestimmt werden kann, als die Isohypsen das Terrain auszudrücken vermögen. Hiemit kann das Sekantenmittel überhaupt nur mehr insofern konkurrieren, als es durch das abkürzende Verfahren Pencks gefunden werden kann und nicht etwas wie bei Kurowski durch vorgängige Aufsuchung einer doppelt ausgedehnten Reihe von Einzelböschungen. Aber selbst jenes Näherungsverfahren verlangt, abgesehen davon, dass es nur

in flacheren Gebieten gilt, die Messung zweier einfacher Reihen erst zu konstruierender Curven, der Profile nämlich, von welchen eine ungleich grössere Zahl nötig ist, um das Terrain ebenso genau auszudrücken, wie es durch Isohypsen geschieht. Die Einwendungen gegen den ausschliesslichen Gebrauch des Sekantenmittels lassen sich somit in dem Satz zusammenfassen, dass dasselbe in flacheren Gebieten, wo es noch einigermassen einfach ausgewertet werden kann, kein richtiges Mass darstellt und in steileren Partien, wo jener Vorwurf nicht gilt, seine Ausmittelung zu schwierig ist. Dass das Penck'sche Verfahren zur Berechnung des wahren Areals flacher Gebiete tauglich ist, soll dabei nicht bestritten werden.

Der Vorwurf einer zu langwierigen Auswertung wird auch dem von uns befürworteten Tangentenmittel nicht durchwegs erspart bleiben. Zwar ist die nach der Sonklar'schen und verwandten Methoden nötige Ausmessung eines Hunderts von Profilwinkeln keine kleine Arbeit, aber immerhin wird sie Vielen näher liegen als das Verfolgen eines Dutzend vielfach gewundener Niveaulinien mit dem Messrädchen. Hingegen ist zu betonen, dass die Mittelbildungen aus Profilwinkeln ein durchaus subjektives Moment enthalten, das in der Richtung der Profile, in der Wahl der obern und untern Endpunkte und vor allem aber in der Verteilung über die Fläche begründet ist. Dieses subjektive Moment durch Regeln einschränken zu wollen, deren Anwendung und Berechtigung in allen Fällen zweifellos ist, wird bei der Mannigfaltigkeit der natürlichen Terrainformen und bei der Fülle der unmerklichen Uebergänge von einer zur andern nie gelingen. Die erhaltenen Zahlen gelten dann nur soweit, als sie der Augenschein bestätigt, wo er widerspricht, wird stets die Ursache in die Methode verlegt werden. Thatsächlich finden sich in der orometrischen Literatur Belege dafür, dass unerwartete Böschungsmittel hinterher durch

die tiefe Lage eines entfernten Thales, das mit zur Bildung der Sockelhöhe benützt oder eines niederen Rückens, der in die Kammhöhe einbezogen wurde, durch mangelhafte Dachform der Kämme und dergleichen mehr plausibel gemacht werden mussten. Solch' zweifelhafter Stützen bedarf das Tangentenmittel nicht; es ist eine für jedes Gebiet klar definirte Grösse, die in gesetzmässiger und unparteiischer Weise jede Einzelheit berücksichtigt. Die Unterschiede in den Tangentenmitteln verschiedener Gebiete haben demnach, sobald sie den Betrag des leicht kontrolierbaren Messungsfehlers überschreiten, eine tiefere, im Aufbau des Terrains begründete Bedeutung und berechtigen zu Schlüssen.

Man wird vielleicht einwenden, es handle sich ja gar nicht um die Berücksichtigung aller regellosen Einzelheiten; es seien vielmehr die grossen Formen, an welchen man Gesetze nachweisen will, zu berücksichtigen und gerade hiefür seien Methoden geeignet, die dem subjektiven Ermessen eine passende Unterdrückung nebensächlicher Details gestatten. Auch diesem Standpunkt kann sich unsere Methode anschmiegen. Man entwerfe nur eine Curvenkarte, die durch Wahl einer grossen Aequidistanz und Weglassung unnötiger Krümmungen der Isohypsen entsprechend schematisiert ist und wende auf diese die angegebene Methode an. Die Arbeit der Auswertung kann hiebei durch weitgehende Schematisierung beliebig klein gemacht werden. Die Verantwortung dafür, dass die gezogenen Schlüsse nicht durch die Art und den Grad der Schematisierung beeinflusst sind, möge dann dem Kartenzeichner zufallen, die mathematische Methode der Mittelbildung aber bleibe rein von persönlicher Willkür.