Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft II
Juli- bis Dezembersitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Vossschen Arbeit: Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen.

Von **O. Volk** in Kaunas (Litauen).

Vorgelegt in Vertretung von Herrn A. Voss von O. Perron in der Sitzung am 13. Dezember 1924.

Vor kurzem hat A. Voss in diesen Berichten[1]) eine neue Methode gegeben zur Bestimmung von Kurvennetzen in der Ebene, indem er die Aufgabe auf die Lösung einer Laplaceschen Differentialgleichung zurückführt und diese für den Fall weiter behandelt, daß eine der Invarianten verschwindet. Im besonderen behandelt Voss u. a. die isogonalen (§ V und § VIII) und die geradlinigen rhombischen Netzkurven (§ IX), wozu im folgenden einige ergänzende Bemerkungen gemacht sein mögen.

§ 1. Isogonale Netzkurven.

Die Laplacesche Differentialgleichung für C lautet[2]):

$$(1) \qquad C_{uv} - \left(\varphi_v \operatorname{cotg} \omega + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) C_u + \varphi_u \operatorname{cotg} \omega \cdot C_v + c\, C = 0,$$

wo φ eine willkürliche Funktion von u, v, ω der konstante Winkel und

$$c = \varphi_u \varphi_v + \operatorname{cotg} \omega \cdot \varphi_{uv} - \operatorname{cotg} \omega \cdot \frac{\varphi_u}{\varphi_v} \varphi_{vv}$$

ist. Das Verschwinden der Invariante J_2 erfordert:

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) + 2 \operatorname{cotg} \omega\, \varphi_{uv} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \varphi_u \varphi_v = 0.$$

---

[1]) Jahrgang 1924, S. 39 ff.

[2]) Vgl. Voss, l. c., S. 47 ff.

Um eine Lösung dieser Gleichung zu erhalten, setzt Voss:

$$\varphi = f(u+v), \quad u+v=s, \quad f' = e^{\zeta},$$

und erhält, indem er ζ zur unabhängigen Veränderlichen macht und $\sigma = \frac{ds}{d\zeta}$ setzt:

$$-\frac{d\sigma}{d\zeta} + 2\operatorname{cotg}\omega\, e^{\zeta}\sigma^2 + \frac{1}{\sin^2\omega} e^{2\zeta}\sigma^3 = 0, \tag{3}$$

eine Gleichung, die Voss nicht weiter behandelt. Setzt man:

$$w = \sigma e^{\zeta},$$

so erhält man aus (3):

$$\frac{dw}{d\zeta} - w - 2\operatorname{cotg}\omega\, w^2 - \frac{1}{\sin^2\omega} w^3 = 0. \tag{4}$$

Durch die Substitution:

$$\operatorname{tg} t = \frac{w + \sin\omega\cos\omega}{\sin^2\omega}$$

findet man hieraus:

$$e^{\zeta} = C_1 e^{-\operatorname{cotg}\omega t}\cos(\omega + t).$$

Es wird nun:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{ds} = C_1 e^{-\operatorname{cotg}\omega t}\cos(\omega+t) = f'(u+v), \tag{5}$$

also:

$$f = t + \gamma,$$

und die Gleichung (1) für C wird:

$$\frac{\partial}{\partial u}\lg\{C_v + C_1 e^{-\operatorname{cotg}\omega t}\sin(\omega+t)C\} + C_1\operatorname{cotg}\omega\, e^{-\operatorname{cotg}\omega t}\cos(\omega+t) = 0;$$

die Integration ergibt:

$$C = \cos(\omega+t)\int\frac{Ve^{-\operatorname{cotg}\omega t}}{\cos(\omega+t)}dv + U\cos(\omega+t), \tag{6}$$

wo U, V willkürliche Funktionen von u bzw. v sind.

Aus:

$$A = \frac{\sin\omega\, C_u + \cos\omega\,\varphi_u C}{\varphi_v} \tag{7}$$

ergibt sich:

$$A = \cos(2\omega + t)\left\{\int \frac{V e^{-\operatorname{cotg}\omega t}}{\cos(\omega + t)} dv + U\right\}$$
$$+ \frac{\sin\omega}{c_1} e^{\operatorname{cotg}\omega t}\left\{U' - \int \frac{V' e^{-\operatorname{cotg}\omega t}}{\cos(\omega + t)} dv\right\} + \frac{\sin\omega}{c_1 \cos(\omega + t)} V.$$

Um nun aus:

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2\cos\omega\, A c\, du\, dv + c^2 dv^2$$

x, y zu bestimmen, setze man mit Voss:

$$\begin{aligned} x_u &= A\cos\Phi, & y_u &= A\sin\Phi, \\ x_v &= C\cos\Psi, & y_v &= C\sin\Psi, \end{aligned} \qquad \Psi - \Phi = \omega. \tag{8}$$

Die Integrabilitätsbedingungen ergeben dann:

$$A_v \cos\Phi - A\sin\Phi\,\Phi_v = C_u \cos(\omega + \Phi) - C\sin(\omega + \Phi)\,\Phi_u,$$
$$A_v \sin\Phi + A\cos\Phi\,\Phi_v = C_u \sin(\omega + \Phi) + C\cos(\omega + \Phi)\,\Phi_u.$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $-\sin\Phi$, der zweiten mit $\cos\Phi$, bzw. mit $-\sin(\omega + \Phi)$ und $\cos(\omega + \Phi)$ und jeweilige Addition erhält man:

$$A\,\Phi_v = \sin\omega\, C_u + \cos\omega\, C\,\Phi_u,$$
$$C\,\Phi_u = -\sin\omega\, A_v + \cos\omega\, A\,\Phi_v,$$

woraus folgt (bei Beachtung der Gl. (2) des § I der Vossschen Arbeit (S. 40)):

$$\Phi_u = \frac{C_u \cos\omega - A_v}{\sin\omega\, C} = \varphi_u,$$

$$\Psi_v = \frac{C_u - \cos\omega\, A_v}{\sin\omega\, A} = \varphi_v,$$

also: $\Phi = \varphi, \quad \Psi = \varphi + \omega.$

Da $f = \varphi = t + \gamma$, so wird jetzt:

$$x = \int A\cos(t + \gamma)\, du + \int C\cos(t + \omega + \gamma)\, dv,$$
$$y = \int A\sin(t + \gamma)\, du + \int C\sin(t + \omega + \gamma)\, dv.$$

Setzt man $\gamma = \omega$ (was keine Spezialisierung bedeutet), so erhält man bei Benutzung der Gl. (5) und (7) und Zerlegung von $\cos(t + 2\omega)$ und $\sin(t + 2\omega)$ in die entsprechenden Produkte von $\cos(t + \omega)$ usw. durch partielle Integration:

$$(9)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\sin\omega}{C_1}\left[e^{\operatorname{cotg}\omega t} C - \int V\,dv\right], \\ y = \dfrac{\sin\omega}{C_1}\left[\operatorname{tg}(\omega+t)e^{\operatorname{cotg}\omega t} C - \int V \operatorname{tg}(\omega+t)\,dv - C_1 \int U\,du\right]. \end{cases}$$

Man hat nun t als Funktion von $s = u + v$ aus (5) zu bestimmen. Zunächst ist:

$$\cos(\omega+t)\,e^{-\operatorname{cotg}\omega t} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\cos(\nu-1)\,\omega}{\nu!\,\sin^{\nu}\omega}\,t^{\nu}.$$

Setzt man:

$$s = \frac{1}{C_1}\left[a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots\right],$$

so erhält man:

$$a_1\cos\omega = 1,\quad \frac{(-1)^n\cos(n-1)\,\omega}{n!\,\sin^n\omega}\,a_1 + \frac{(-1)^{n-1}\cos(n-2)\,\omega}{(n-1)!\,\sin(n-1)\,\omega}\,2\,a_2$$
$$+ \cdots + (n+1)\,a_{n+1}\cos\omega = 0.$$

Es wird also für $t = 0$ $s = 0$. Setzen wir nun:

$$t = \gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \gamma_3 s^3 + \cdots,$$

so wird nach (5):

$$\gamma_1 = \left.\frac{dt}{ds}\right|_{s=0} = C_1\cos\omega,$$

$$\gamma_2 = \left.\frac{1}{2!}\frac{d^2 t}{ds^2}\right|_{s=0} = -\frac{C_1^2}{2!}\operatorname{cotg}\omega.$$

. . . .

In der gleichen Weise findet man:

$$\frac{e^{-\operatorname{cotg}\omega t}}{\cos(\omega+t)} = \frac{1}{\cos\omega} - C_1\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\,s + \frac{C_1^2}{2!}\,\frac{\sin^2\omega + 2\cos^2\omega\cos 2\omega}{\cos\omega\sin\omega}\,s^2 + \cdots$$

und:

$$\operatorname{tg}(\omega+t) = C_1\int\frac{e^{-\operatorname{cotg}\omega t}}{\cos(\omega+t)}\,ds = \frac{C_1}{\cos\omega}\,s - \frac{C_1^2}{2!}\,\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\,s^2 + \cdots.$$

Setzt man diese Werte in (9) ein, so kann man die entsprechenden Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. berechnen. Infolge der Willkürlichkeit von C_1 machen dabei die Konvergenzvorschriften keine Schwierigkeit. Wir erhalten so isogonale Kurvennetze mit zwei willkürlichen Funktionen U und V.

Wird $\omega = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = C_2\, e^{-C_1 s}$$

und es wird:

$$C = \frac{1}{C_2 e^{-C_1(u+v)} + \frac{1}{C_2} e^{C_1(u+v)}} \int V\left(C_2 e^{-C_1(u+v)} + \frac{1}{C_2} e^{C_1(u+v)}\right) dv$$
$$- \frac{2}{C_2 e^{-C_1(u+v)} + \frac{1}{C_2} e^{C_1(u+v)}}\, U;$$

dieser Wert stimmt mit dem von Voss gefundenen (§ VIII) überein. Für x und y ergibt sich, wenn man noch $V = v_0$ und $U = 0$ setzt:

$$x = \frac{v_0}{C_1^2}\cos t - \frac{v_0 v}{C_1},$$
$$y = -\frac{v_0}{C_1^2}\sin t.$$

$v =$ konst. gibt Kreise mit konstantem Radius, was Voss mittels direkter Bestimmung des Krümmungsradius erkannte. Für die Kurven $u =$ konst. findet man:

$$x = \frac{v_0}{C_1^2}\left\{\sqrt{1 - \frac{C_1^4}{v_0^2}y^2} - \lg\left(1 + \sqrt{1 - \frac{C_1^4}{v_0^2}y^2}\right) + C_1 u\right\}.$$

§ 2. Geradlinige rhombische Netzkurven.

Die allgemeine geradlinige rhombische Teilung ist gegeben durch[1]):

(1) $$\omega = U - V,$$

(2) $$-\frac{C_u}{C} = \frac{\omega_v + \omega_u \cos\omega}{\sin\omega}, \quad -\frac{C_v}{C} = \frac{\omega_v \cos\omega + \omega_u}{\sin\omega}$$

mit der Bedingung für ω:

(3) $$\omega_{vv} - \omega_v^2 \operatorname{cotg}\omega = \omega_{uu} - \omega_u^2 \operatorname{cotg}\omega$$

[1]) Vgl. Voss, l. c., § IX, S. 59 ff. Wir schreiben $-V$ statt V, was Voss ebenfalls auf S. 61 tut.

oder infolge von (1):

$$U'' + V'' = (U'^2 - V'^2)\operatorname{cotg}(U - V). \tag{4}$$

Diese Funktionalgleichung, die Voss nach einer von Perron gegebenen Methode löst, wobei sich aber schon für U' elliptische Funktionen ergeben, weshalb sie zur weiteren Behandlung nicht zweckmäßig ist, läßt sich in der folgenden Weise einfach und brauchbar behandeln.

Multipliziert man mit $\sin(U - V)$ und wendet hernach das Additionstheorem an, so erhält man:

$$\begin{aligned}&(U''\sin U - U'^2\cos U)\cos V - (U''\cos U + U'^2\sin U)\sin V\\ &-(V''\sin V - V'^2\cos V)\cos U + (V''\cos V + V'^2\sin V)\sin U = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man:

$$\begin{cases} U''\sin U - U'^2\cos U = a\cos U + b\sin U,\\ V''\sin V - V'^2\cos V = a\cos V + b\sin V,\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} U''\cos U + U'^2\sin U = a_1\sin U - b\cos U,\\ V''\cos V + V'^2\sin V = a_1\sin V - b\cos V,\end{cases} \tag{7}$$

so erhält man durch Elimination:

$$\begin{cases} U'^2 = a_1\sin^2 U - a\cos^2 U - b\sin 2U,\\ U'' = (a + a_1)\sin U\cos U - b\cos 2U,\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} V'^2 = a_1\sin^2 V - a\cos^2 V - b\sin 2V,\\ V'' = (a + a_1)\sin V\cos V - b\cos 2V.\end{cases} \tag{9}$$

Die zweiten Gleichungen in (8) und (9) gehen jeweils aus den ersten durch Differentiation hervor; der Ansatz (6) und (7) ist also widerspruchsfrei. Durch (6) und (7) wird (5) identisch befriedigt. Es ist aber dieser Ansatz auch der allgemeinste[1]). Setzt man nämlich:

$$\begin{cases} U''\sin U - U'^2\cos U = F(u), & U''\cos U + U'^2\sin U = G(u),\\ V''\sin V - V'^2\cos V = P(v), & V''\cos V + V'^2\sin V = Q(v),\end{cases} \tag{10}$$

[1]) Hierauf wurde ich von Professor Perron in München aufmerksam gemacht, dessen gütigen Mitteilungen ich auch den nachfolgenden Beweis entnehme. Man könnte übrigens auch $a_1 = -a$ setzen, ohne die Allgemeinheit zu stören, wie man sofort erkennt, wenn man U durch $U_1 + \gamma$, V durch $V_1 + \gamma$ ersetzt und γ passend wählt. Dabei ändert sich ja die Funktionalgleichung (4) nicht.

so folgt aus (5):

$$F(u)\cos V - G(u)\sin V = P(v)\cos U - Q(v)\sin U. \tag{11}$$

Durch Differentiation nach v erhält man:

$$-F(u)\sin V\, V' - G(u)\cos V\, V' = P'(v)\cos U - Q'(v)\sin U. \tag{12}$$

Löst man die Gleichungen (11) und (12) nach $F(u)$, $G(u)$ auf, so folgt:

$$F(u) = a\cos U + b\sin U, \quad G(u) = a_1 \sin U + b_1 \cos U, \tag{13}$$

wo a, b, a_1, b_1 nur von v abhängen. Da die Gleichungen (13) für beliebige v gelten, so bleiben sie richtig, wenn man irgend einen Spezialwert für v einsetzt; dadurch erhält man dieselben Gleichungen (13), wobei aber a, b, a_1, b_1 jetzt Konstanten sind.

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$P(v) = a_2 \cos V + b_2 \sin V, \quad Q(v) = a_3 \sin V + b_3 \cos V. \tag{14}$$

Setzt man für $F(u)$, $G(u)$, $P(v)$, $Q(v)$ ihre Werte aus (10) ein, so erhält man die folgenden Gleichungen als notwendige Folgen aus (5):

$$\left\{\begin{aligned} U''\sin U - U'^2 \cos U &= a\cos U + b\sin U, \\ U''\cos U + U'^2 \sin U &= a_1 \sin U + b_1 \cos U, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} V''\sin V - V'^2 \cos V &= a_2 \cos V + b_2 \sin V, \\ V''\cos V + V'^2 \sin V &= a_3 \sin V + b_3 \cos V, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

wo a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3 Konstanten sind.

Diese Gleichungen dürfen sich zunächst nicht widersprechen. Die Auflösung von (15) nach U'' und U'^2 ergibt:

$$U'^2 = \frac{b_1 - b}{2}\sin 2U - \frac{a + a_1}{2}\cos 2U + \frac{a_1 - a}{2},$$

$$U'' = \frac{a + a_1}{2}\cos 2U + \frac{b_1 - b}{2}\cos 2U - \frac{b + b_1}{2}.$$

Indem man die erste differentiiert und mit der zweiten vergleicht, findet man:

$$b_1 = -b.$$

Verfährt man mit den Gleichungen (16) analog, so ergibt sich:

$$b_3 = -b_2.$$

Durch Einsetzen von (15) und (16) in (5) findet man schließlich noch:

$$a_2 = a, \qquad b_2 = b, \qquad a_3 = a_1.$$

Man erhält also in der Tat den Ansatz (6) und (7), der damit als der allgemeinste erscheint.

Aus (8) und (9) erhält man nun:

$$(17) \qquad du = \frac{dU}{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}},$$

$$(18) \qquad dv = \frac{dV}{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}}.$$

Nach (2) ist:

$$(19) \qquad \lg \frac{1}{C} = \int \frac{U' dv - V' du}{\sin(U - V)} + \lg \sin(U - V) - \lg C_1,$$

wo C_1 eine Konstante.

Infolge der Gleichungen (17) und (18) wird nun:

$$U' dv - V' du$$
$$= \sqrt{\frac{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}}\, dV - \sqrt{\frac{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}}\, dU.$$

Setzt man:

$$(20) \qquad \begin{cases} \zeta = \dfrac{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U} - \sqrt{a_1} \sin U}{\cos U} \\[2ex] \eta = \dfrac{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V} - \sqrt{a_1} \sin V}{\cos V} \end{cases}$$

so wird:

$$(21) \qquad \operatorname{tg} U = -\frac{\zeta^2 + a}{2(b + \sqrt{a_1}\,\zeta)}, \qquad \operatorname{tg} V = -\frac{\eta^2 + a}{2(b + \sqrt{a_1}\,\eta)},$$

$$(22) \qquad \begin{cases} d \operatorname{tg} U = -\dfrac{\sqrt{a_1}\,\zeta^2 + 2b\zeta - a\sqrt{a_1}}{2(b + \sqrt{a_1}\,\zeta)^2}\, d\zeta, \\[2ex] d \operatorname{tg} V = -\dfrac{\sqrt{a_1}\,\eta^2 + 2b\eta - a\sqrt{a_1}}{2(b + \sqrt{a_1}\,\eta)^2}\, d\eta, \end{cases}$$

$$(23)\qquad \frac{\sin(U-V)}{\cos U \cos V} = \operatorname{tg} U - \operatorname{tg} V = \frac{(\eta-\zeta)(\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1})}{2(b+\sqrt{a_1}\,\zeta)(b+\sqrt{a_1}\,\eta)},$$

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a_1}\sin^2 U - a\cos^2 U - b\sin 2U}{\cos U} = \dfrac{\sqrt{a_1}\,\zeta^2 + 2b\zeta - a\sqrt{a_1}}{2(b+\sqrt{a_1}\,\zeta)}, \\ \dfrac{\sqrt{a_1}\sin^2 V - a\cos^2 V - b\sin 2V}{\cos V} = \dfrac{\sqrt{a_1}\,\eta^2 + 2b\eta - a\sqrt{a_1}}{2(b+\sqrt{a_1}\,\eta)}, \end{cases}$$

daher:

$$(25\,\mathrm{a})\qquad \sqrt{\frac{a_1\sin^2 U - a\cos^2 U - b\sin 2U}{a_1\sin^2 V - a\cos^2 V - b\sin 2V}}\,\frac{dV}{\sin(U-V)}$$
$$= \frac{\sqrt{a_1}\,\zeta^2 + 2b\zeta - a\sqrt{a_1}}{(\zeta-\eta)(\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1})}\,d\eta$$
$$= \frac{d\eta}{\zeta-\eta} + \frac{\sqrt{a_1}\,\zeta + b}{\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1}}\,d\eta,$$

$$(25\,\mathrm{b})\qquad -\sqrt{\frac{a_1\sin^2 V - a\cos^2 V - b\sin 2V}{a_1\sin^2 U - a\cos^2 U - b\sin 2U}}\,\frac{dU}{\sin(U-V)}$$
$$= \frac{d\zeta}{\eta-\zeta} + \frac{\sqrt{a_1}\,\eta + b}{\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1}}\,d\zeta.$$

Man erhält also:

$$\int\frac{U'dv - V'du}{\sin(U-V)} = -\int\frac{d(\zeta-\eta)}{\zeta-\eta} + \int\frac{(\sqrt{a_1}\,\eta+b)\,d\zeta + (\sqrt{a_1}\,\zeta+b)\,d\eta}{\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\zeta+\eta) - a\sqrt{a_1}}$$
$$= \lg\frac{\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1}}{\zeta-\eta},$$

folglich:

$$\lg\frac{1}{C} = \lg\frac{\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1}}{(\zeta-\eta)}\sin(U-V) - \lg C_1$$

oder mit Berücksichtigung von (23):

$$\lg\frac{1}{C} = \lg\frac{(\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1})^2\cos U\cos V}{2(b+\sqrt{a_1}\,\zeta)(b+\sqrt{a_1}\,\eta)} - \lg C_1,$$

$$(26)\qquad C = \frac{2C_1(b+\sqrt{a_1}\,\zeta)(b+\sqrt{a_1}\,\eta)}{(\sqrt{a_1}\,\eta\zeta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1})^2\cos U\cos V}.$$

Um x, y zu berechnen, setzen wir mit Voss:

$$x_u = C \cos \Phi, \qquad x_v = C \cos \Psi,$$
$$y_u = C \sin \Phi, \qquad y_v = C \sin \Psi,$$
$$\Phi - \Psi = \omega = U - V.$$

Die Integrabilitätsbedingungen liefern (wie in § 1):

$$\Phi_u = -\frac{C_u}{C} \operatorname{cotg}(U - V) + \frac{C_v}{C \sin(U - V)} + U' = \omega_u + U' = 0,$$

$$\Phi_v = -\frac{C_u}{C \sin(U - V)} + \frac{C_v}{C} \operatorname{cotg}(U - V) = \omega_v = -V';$$

man findet also:

$$\Phi = -V, \qquad \Psi = -U.$$

Es wird daher[1]):

$$x = \int (C \cos V \, du + C \cos U \, dv),$$
$$y = -\int (C \sin V \, du + C \sin U \, dv),$$

oder bei Beachtung der Gleichungen (17) und (18):

$$x = \int \Bigl(\cos V \frac{C}{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}} dU$$
$$+ \cos U \frac{C}{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}} dV\Bigr),$$

$$y = -\int \Bigl(\sin V \frac{C}{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}} dU$$
$$+ \sin U \frac{C}{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}} dV\Bigr).$$

Setzt man für C seinen Wert aus (26) ein und benützt die Gleichungen (21), (22) und (24), so erhält man:

$$x = -2 C_1 \int \frac{(\sqrt{a_1}\, \eta + b)\, d\zeta + (\sqrt{a_1}\, \zeta + b)\, d\eta}{(\sqrt{a_1}\, \zeta \eta + b(\zeta + \eta) - a \sqrt{a_1})^2}$$
$$= \frac{2 C_1}{\sqrt{a_1}\, \zeta \eta + b(\zeta + \eta) - a \sqrt{a_1}},$$

[1]) Von den Integrationskonstanten sehen wir im folgenden ab.

$$y = 2\,C_1 \operatorname{tg} V \int \frac{(\sqrt{a_1}\,\eta + b)\,d\zeta}{(\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1})^2}$$

$$+ 2\,C_1 \operatorname{tg} U \int \frac{(\sqrt{a_1}\,\zeta + b)\,d\eta}{(\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1})^2}$$

$$= - \frac{2\,b_1 \operatorname{tg} V}{\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\zeta+\eta) - a\sqrt{a_1}} + \frac{2\,C_1(\operatorname{tg} V - \operatorname{tg} U_0)}{\sqrt{a_1}\,\zeta_0\eta + b(\eta+\zeta) - a\sqrt{a_1}}.$$

Nun ist nach (23):

$$\operatorname{tg} V - \operatorname{tg} U_0 = \frac{(\zeta_0 - \eta)(\sqrt{a_1}\,\zeta_0\eta + b(\eta+\zeta_0) - a\sqrt{a_1})}{2(\sqrt{a_1}\,\zeta_0 + b)(\sqrt{a_1}\,\eta + b)},$$

also:

$$\frac{2(\operatorname{tg} V - \operatorname{tg} U_0)}{\sqrt{a_1}\,\zeta_0\eta + b(\zeta_0+\eta) - a\sqrt{a_1}} = \frac{(\zeta_0 - \eta)}{(\sqrt{a_1}\,\zeta_0 + b)(\sqrt{a_1}\,\eta + b)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}\,\eta + b)} - \frac{1}{\sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}\,\zeta_0 + b)}$$

und daher bei Benützung der Gleichung (21):

$$y = \frac{C_1(\eta^2 + a)}{(b + \sqrt{a_1}\,\eta)(\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\zeta+\eta) - a\sqrt{a_1})} + \frac{C_1}{\sqrt{a_1}(b + \sqrt{a_1}\,\eta)},$$

$$y = \frac{C_1(\zeta+\eta)}{\sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\zeta+\eta) - a\sqrt{a_1})}.$$

Wird $a_1 = 0$, so erhält man:

$$x = \frac{2\,C_1}{b(\zeta+\eta)}, \quad y = \frac{C_1(\eta^2 + a)}{b^2(\zeta+\eta)} - \frac{C_1\eta}{b^2} = \frac{C_1(a - \zeta\eta)}{b^2(\zeta+\eta)}.$$

Ist also nicht gleichzeitig $a_1 = b = 0$, so erhalten wir:

$$(27) \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\,C_1}{\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\zeta+\eta) - a\sqrt{a_1}}, \\[2ex] y = \dfrac{C_1(\zeta+\eta)}{\sqrt{a_1}\,\zeta\eta + b(\zeta+\eta) - a\sqrt{a_1}}, \quad (a_1 \neq 0), \end{cases}$$

$$(28) \quad x = \frac{2\,C_1}{b(\zeta+\eta)}, \quad y = \frac{C_1(a - \zeta\eta)}{b^2(\zeta+\eta)} \quad (a_1 = 0).$$

Man erkennt nun sofort, daß die Gleichungen (27) und (28) für $\zeta =$ konst. oder $\eta =$ konst. d. h. für $u =$ konst.

oder $v =$ konst. Geraden darstellen, die ein und denselben Kegelschnitt umhüllen.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, wo $a_1 = b = 0$ ist.

Ist $a \neq 0$, so ist dieser Fall im wesentlichen derselbe wie $a = 0$, $b = 0$; man braucht in (8) und (9) nur $U = \frac{\pi}{2} - U_1$, $V = \frac{\pi}{2} - V_1$ zu setzen. Der Fall $a = b = 0$ ist aber in (27) enthalten.

Ist aber außerdem $a = 0$, so erhalten wir ein wesentlich anderes Resultat. Aus den Gleichungen (8) und (9) folgt zunächst:

$$U' = 0, \quad V' = 0; \quad U = \varkappa, \quad V = \lambda.$$

Man erhält nun:

$$C = \frac{C_1}{\sin(\varkappa - \lambda)},$$

$$(29) \qquad \begin{cases} x = (u \cos \lambda + v \cos \varkappa) \dfrac{C_1}{\sin(\varkappa - \lambda)}, \\ y = -(u \sin \lambda + v \sin \varkappa) \dfrac{C_1}{\sin(\varkappa - \lambda)}, \end{cases}$$

oder:

$$(30) \qquad \begin{cases} y \cos \varkappa + x \sin \varkappa = C_1 u, \\ y \cos \lambda + x \sin \lambda = C_1 v. \end{cases}$$

$u =$ konst. und $v =$ konst. geben also bei festem $\varkappa$, λ zwei parallele Geradenscharen.

Es genügt aber, entweder $U' = 0$ oder $V' = 0$ zu setzen und die andere Funktion direkt aus (4) zu berechnen.

$U' = 0$, $U = \varkappa$ ergibt:

$$V' = C_1 \sin(\varkappa - V),$$

$$C = e^{C_1 u} \cdot \frac{C_2}{\sin(\varkappa - V)},$$

$$(31) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 u} \dfrac{\cos V}{\sin(\varkappa - V)}, \\ y = -\dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 u} \dfrac{\sin V}{\sin(\varkappa - V)}. \end{cases}$$

Das sind im wesentlichen die Gleichungen, die Voss auf S. 61 für $U = 0$ erhält.

Für $V' = 0$, $V = \lambda$ erhält man in ähnlicher Weise (man braucht nur u mit v, U mit V zu vertauschen):

$$
(32)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 v} \dfrac{\cos U}{\sin(\lambda - U)}, \\ y = -\dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 v} \dfrac{\sin U}{\sin(\lambda - U)}. \end{cases}
$$

Aus (31) und (32) erhält man:

$$
(33)\qquad \begin{cases} y = -\operatorname{tg} V \cdot x, \\ x \operatorname{tg} \varkappa + y = \dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 u}, \end{cases}
$$

$$
(34)\qquad \begin{cases} y = -\operatorname{tg} U \cdot x, \\ x \operatorname{tg} \lambda + y = \dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 v}. \end{cases}
$$

Sind $\varkappa$, λ fest, so stellen die Gleichungen (33) und (34) für $u =$ konst. und $v =$ konst. ein Geradenbüschel mit einem endlichen Zentrum und eines mit einem solchen im Unendlichen dar.

Wir haben bisher in (17) und (18) die gleichen Vorzeichen der Wurzeln vorausgesetzt. Nimmt man aber die Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$
(17\text{a})\qquad du = \pm \frac{dU}{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}},
$$

$$
(18\text{a})\qquad dv = \mp \frac{dV}{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}},
$$

so erhält man:

$$
U' dv - V' du = -\sqrt{\frac{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}}\, dV + \sqrt{\frac{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}}\, dU,
$$

also:

$$
\int (U' dv - V' du) = \lg \frac{\zeta - \eta}{\sqrt{a_1 \zeta \eta + b(\eta + \zeta) - a \sqrt{a_1}}},
$$

daher:

$$
C = \frac{2 C_1 (b + \sqrt{a_1} \zeta)(b + \sqrt{a_1} \eta)}{(\zeta - \eta)^2} \frac{1}{\cos U \cdot \cos V}.
$$

So findet man:

$$\pm x = \cos V \int \frac{C\,dU}{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}}$$

$$- \cos U \int \frac{C\,dV}{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}},$$

$$\pm y = - \operatorname{tg} V \int \frac{C\,dU}{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U}}$$

$$+ \operatorname{tg} U \int \frac{C\,dV}{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V}},$$

oder:

$$\pm x = -2C_1 \int \frac{b + \sqrt{a_1}\,\eta}{(\zeta - \eta)^2}\,d\zeta + 2C_1 \int \frac{b + \sqrt{a_1}\,\zeta}{(\zeta - \eta)^2}\,d\eta,$$

$$\pm x = \frac{2C_1(b + \sqrt{a_1}\,\eta)}{\zeta - \eta} = \frac{C_1(2b + \sqrt{a_1}(\eta + \zeta) + \sqrt{a_1}(\eta - \zeta))}{\zeta - \eta},$$

$$\pm x + \sqrt{a_1}\,C_1 = \frac{C_1(2b + \sqrt{a_1}(\eta + \zeta))}{\zeta - \eta};$$

und:

$$\pm y = 2C_1 \operatorname{tg} V \int \frac{b + \sqrt{a_1}\,\eta}{(\zeta - \eta)^2}\,d\zeta - 2C_1 \operatorname{tg} U \int \frac{b + \sqrt{a_1}\,\zeta}{(\zeta - \eta)^2}\,d\eta,$$

$$\pm y = \frac{C_1(a + \zeta\eta)}{\zeta - \eta}.$$

Sehen wir von den Integrationskonstanten und dem $\pm$ Zeichen ab, so erhalten wir:

$$x = \frac{C_1(2b + \sqrt{a_1}(\zeta + \eta))}{\zeta - \eta}, \quad y = \frac{C_1(a + \zeta\eta)}{\zeta - \eta}. \tag{35}$$

Aus (35) erkennt man leicht, daß die Kurven $\zeta =$ konst. und $\eta =$ konst. Geraden sind und im allgemeinen ein und denselben Kegelschnitt berühren. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn gleichzeitig $a = b = 0$ ist. Es folgt dann zunächst aus den Gl. (20) $\zeta = 0$, $\eta = 0$. Ersetzt man aber (20) durch die Gleichungen:

$$\text{(20a)} \quad \begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{\sqrt{a_1 \sin^2 U - a \cos^2 U - b \sin 2U} + \sqrt{a_1} \sin U}{\cos U}, \\[2ex] \eta_1 = \dfrac{\sqrt{a_1 \sin^2 V - a \cos^2 V - b \sin 2V} + \sqrt{a_1} \sin V}{\cos V}, \end{cases}$$

also $+\sqrt{a_1}$ durch $-\sqrt{a_1}$, so ändert sich außer dem Vorzeichen von $\sqrt{a_1}$ nichts; man erhält dann:

$$
\text{(35a)} \quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{C_1(2b - \sqrt{a_1}(\zeta_1 + \eta_1))}{\xi_1 - \eta_1}, \\
y &= \frac{C_1(a + \zeta_1 \eta_1)}{\zeta_1 - \eta_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Für $a = b = 0$ wird nun:

$$\zeta_1 = 2\sqrt{a_1}\,\mathrm{tg}\,U, \qquad \eta_1 = 2\sqrt{a_1}\,\mathrm{tg}\,V$$

und man erhält schließlich:

$$
\text{(36)} \quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{C_1\sqrt{a_1}(\mathrm{tg}\,U + \mathrm{tg}\,V)}{\mathrm{tg}\,V - \mathrm{tg}\,U}, \\
y &= \frac{2C_1\sqrt{a_1}\,\mathrm{tg}\,U \cdot \mathrm{tg}\,V}{\mathrm{tg}\,U - \mathrm{tg}\,V}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Elimination von $\mathrm{tg}\,V$ bzw. $\mathrm{tg}\,U$ ergibt:

$$
\text{(37)} \quad \left\{
\begin{aligned}
y &= -(x + C_1\sqrt{a_1})\,\mathrm{tg}\,U, \\
y &= -(x - C_1\sqrt{a_1})\,\mathrm{tg}\,V;
\end{aligned}
\right.
$$

wir erhalten also Zentralbüschel. Beachtet man, daß nach den Gl. (17a) und (18a) ist:

$$\mathrm{tg}\,\frac{U}{2} = \varkappa_1 e^{\pm\sqrt{a_1}u}, \qquad \mathrm{tg}\,\frac{V}{2} = \varkappa_2 e^{\mp\sqrt{a_1}v},$$

also:

$$\mathrm{tg}\,U = \frac{2}{\frac{1}{\varkappa_1}e^{+\sqrt{a_1}u} - \varkappa_1 e^{+\sqrt{a_1}}}, \qquad \mathrm{tg}\,V = \frac{2}{\frac{1}{\varkappa_2}e^{+\sqrt{a_1}v} - \varkappa_2 e^{+\sqrt{a_1}v}},$$

so erkennt man in (37) die von Voss eingangs (S. 57 f.) gefundenen Formeln. Wir erhalten also den Satz:

Zwei Geradenscharen bilden ein rhombisches Netz, wenn sie entweder identisch sind und denselben Kegelschnitt umhüllen oder zwei Büschel bilden.

Die Kegelschnitte sind die einzigen Kurven, deren Tangenten ein rhombisches Netz bilden.