Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVIII. Jahrgang 1908.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1909.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 20. März.*)

In einer früher in diesen Berichten[1]) veröffentlichten Abhandlung: „Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen" habe ich verschiedene Typen von Kriterien angegeben, welche zur Beurteilung der absoluten Konvergenz oder Divergenz unendlicher Doppelreihen dienen sollen. Wié ich neuerdings bemerkt habe, gestatten Herleitung und Formulierung dieser Kriterien gewisse Verbesserungen, auch lassen sie sich mit Leichtigkeit auf den Fall beliebig vielfacher Reihen übertragen. Dies im einzelnen auszuführen, ist der Zweck der folgenden Mitteilung.

---

1. Es bezeichne $a_\mu^{(\nu)} > 0 \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ das allgemeine Glied einer beliebig vorgelegten, $c_\mu^{(\nu)} > 0$ bzw. $d_\mu^{(\nu)} > 0$ dasjenige einer bereits als konvergent bzw. divergent erkannten Doppelreihe.

Denkt man sich die Doppelreihe der $a_\mu^{(\nu)}$, wie auch diejenige der $c_\mu^{(\nu)}$ nach „Diagonalen", d. h. in der Form

---

[1]) Bd. 27 (1897), p. 101—152.

$$\sum_0^\infty {}_\lambda \left(a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda-1)} + \cdots + a_\lambda^{(0)}\right)$$

$$\sum_0^\infty {}_\lambda \left(c_0^{(\lambda)} + c_1^{(\lambda-1)} + \cdots + c_\lambda^{(0)}\right)$$

als einfache unendliche Reihe angeordnet, so tritt offenbar ein beliebiger Term $a_\mu^{(\nu)}$ bzw. $c_\mu^{(\nu)}$ in der durch den Index $\lambda = \mu + \nu$ charakterisierten Gliedergruppe auf; und es erscheint demnach für die Konvergenz jener aus den $a_\mu^{(\nu)}$ gebildeten einfachen Reihe, also auch für diejenige der ursprünglichen Doppelreihe hinreichend, wenn nur von einer bestimmten Gliedergruppe ab, etwa für $\mu + \nu \geqq l$ eine Beziehung von der Form besteht:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu^{(\nu)}, \tag{1}$$

unter G eine (beliebig große) positive Zahl verstanden, oder auch, nach Substitution von

$$c_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{C_\mu^{(\nu)}},$$

wenn:

$$C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \qquad (\mu + \nu \geqq l), \tag{2}$$

und diese Konvergenz-Bedingung läßt sich schließlich in die Form setzen:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}}\, C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \quad \text{(d. h. nicht unendlich).[1]} \tag{A}$$

[1] Bei dem früher von mir benützten Schlußverfahren treten an die Stelle dieser einen Bedingung die folgenden drei, dem Umfange nach damit völlig äquivalenten:

$$\overline{\lim_{\mu=\infty}}\, C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\, C_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty.$$

(Vgl. a. a. O., p. 144.) Dabei bedeutet die Bezeichnung $\mu, \nu = \infty$ allemal soviel, wie: $\mu = \infty$, $\nu = \infty$.

Die nämliche Schlußweise würde bei Vergleichung von $a_\mu^{(\nu)}$ mit $d_\mu^{(\nu)} = \dfrac{1}{D_\mu^{(\nu)}}$ die Beziehung

$$\text{(3)} \qquad \varliminf_{\mu+\nu=\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0$$

als hinreichende Bedingung für die Divergenz ergeben. Unterwirft man indessen die zum Vergleiche herangezogene Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} d_\mu^{(\nu)}$ der gewissermaßen selbstverständlichen Bedingung, daß ihre Divergenz nicht lediglich durch die Divergenz irgend einer endlichen Anzahl von Zeilen oder Kolonnen zustande kommen soll, also durch Weglassung der betreffenden Zeilen bzw. Kolonnen beseitigt werden könnte, daß vielmehr $\sum_{\mu,\nu} d_\mu^{(\nu)}$ auch nach Weglassung jeder beliebigen endlichen Anzahl von Zeilen und Kolonnen stets divergent bleiben soll (während dann im Gegenteil keine einzige Zeile oder Kolonne zu divergieren braucht), so erscheint offenbar die Divergenz von $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ gesichert, wenn nur von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ eine Beziehung von der Form besteht:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq g \cdot d_\mu^{(\nu)} \qquad (\text{wo } g > 0),$$

anders geschrieben:

$$D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \qquad (\text{für } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n),$$

d. h. schließlich:

$$\text{(B)} \qquad \varliminf_{\mu,\nu=\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0,\text{[1]}$$

eine Bedingung, die offenbar weniger verlangt, als die durch Ungleichung (3) dargestellte.[2]

---

[1] Über den Begriff des unteren und oberen Doppel-Limes s. meine Abhandlung Math. Ann. 53 (1900), p. 296.

[2] Die Ungleichung (3) enthält außer der Bedingung (B) auch noch die beiden folgenden in sich:

2. Um für die Kriterien-Bildung geeignete $C_\mu^{(\nu)}$, $D_\mu^{(\nu)}$ zu gewinnen, verfährt man am einfachsten folgendermaßen. Es sei $c_\lambda > 0$ bzw. $d_\lambda > 0$ das allgemeine Glied einer konvergenten bzw. divergenten einfach unendlichen Reihe, so daß also auch die Reihe:

$$c_0 + \sum_1^\infty{}_\lambda \frac{\lambda+1}{\lambda} c_\lambda \text{ konvergiert,}$$

$$d_0 + \sum_1^\infty{}_\lambda \frac{\lambda+1}{\lambda} d_\lambda \text{ divergiert.}$$

Man kann daher setzen:

$$(4)\quad \begin{cases} c_0^{(0)} = c_0, \text{ im übrigen: } c_\mu^{(\nu)} = \dfrac{1}{\mu+\nu} \cdot c_{\mu+\nu}, \\ d_0^{(0)} = d_0, \quad \text{„} \quad\quad \text{„} \quad\quad d_\mu^{(\nu)} = \dfrac{1}{\mu+\nu} \cdot d_{\mu+\nu}. \end{cases}$$

Denn da sich hieraus ergibt:

$$(5)\quad \begin{cases} c_0^{(\mu+\nu)} + \cdots + c_\mu^{(\nu)} + \cdots + c_{\mu+\nu}^{(0)} = \dfrac{\mu+\nu+1}{\mu+\nu} \cdot c_{\mu+\nu}, \\ d_0^{(\mu+\nu)} + \cdots + d_\mu^{(\nu)} + \cdots + d_{\mu+\nu}^{(0)} = \dfrac{\mu+\nu+1}{\mu+\nu} \cdot d_{\mu+\nu}, \end{cases}$$

so erkennt man durch Summation nach „Diagonalen", daß von den beiden Doppelreihen $\sum_{\mu,\nu} c_\mu^{(\nu)}$, $\sum_{\mu,\nu} d_\mu^{(\nu)}$ die erste in der Tat konvergiert, die zweite divergiert.

Mit Benützung der Ausdrücke (4) liefern, wenn man wiederum noch

$$c_\nu = \frac{1}{C_\nu}, \quad d_\nu = \frac{1}{D_\nu}$$

$$\varliminf_{\mu=\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\varliminf_{\nu=\infty} D_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

(Vgl. die Fußnote auf p. 42.)

setzt, die allgemeinen Kriterien (A), (B) das folgende speziellere Ergebnis:

Die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$

(I^a) konvergiert, wenn $\overline{\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)\cdot C_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty$,

(I^b) divergiert, wenn $\underline{\lim\limits_{\mu,\,\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0$.

Wählt man, wie bei der Bildung der De Morganschen (alias Bonnet-Bertrandschen) Kriterien-Skala, der Reihe nach:

$$c_\nu = \frac{1}{\nu^{1+\varrho}},\ \frac{1}{\nu\cdot(lg\,\nu)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{\nu\cdot lg\,\nu\cdot(lg_2\,\nu)^{1+\varrho}},\ \ldots \qquad (\varrho > 0)$$

$$d_\nu = \frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\nu\cdot lg\,\nu},\ \frac{1}{\nu\cdot lg\,\nu\cdot lg_2\,\nu},\ \ldots$$

so ergeben sich als hinreichende Bedingungen für die Konvergenz von $\sum\limits_{\mu,\,\nu} a_\mu^{(\nu)}$:

$$(6^a)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)^{2+\varrho}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty, \\ \overline{\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot(lg\,(\mu+\nu))^{1+\varrho}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty, \\ \overline{\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot lg\,(\mu+\nu)\cdot(lg_2\,(\mu+\nu))^{1+\varrho}\cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

desgleichen für die Divergenz:

$$(6^b)\quad \left\{\begin{array}{l} \underline{\lim\limits_{\mu,\,\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0, \\ \underline{\lim\limits_{\mu,\,\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot lg\,(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0, \\ \underline{\lim\limits_{\mu,\,\nu=\infty}}\,(\mu+\nu)^2\cdot lg\,(\mu+\nu)\cdot lg_2\,(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Einen anderen für die Bildung von Konvergenz-Bedingungen zweckmäßigen Typus von Vergleichs-Doppelreihen gewinnt man durch die Bemerkung,[1]) daß die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, c_\mu \cdot c_\nu$ als Quadrat von $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, c_\nu$ offenbar konvergiert, so daß man also auch setzen kann:

$$c_\mu^{(\nu)} = c_\mu \cdot c_\nu, \quad C_\mu^{(\nu)} = C_\mu \cdot C_\nu, \tag{7}$$

und daher aus dem allgemeinen Konvergenz-Kriterium (A) wiederum noch das folgende speziellere erhält:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}}\, C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \tag{II^a}$$

Danach ergibt sich z. B., wenn gesetzt wird $C_\nu = (\nu+1)^{1+\varrho}$ (wo $\varrho > 0$), als hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}}\, ((\mu+1)(\nu+1))^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty,$$

oder auch, wenn man noch ausdrücklich voraussetzt, daß die Anfangszeile und -kolonne, d. h. $\sum_0^\infty{}^{\mu}\, a_\mu^{(0)}$, $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_0^{(\nu)}$, konvergieren, etwas einfacher geschrieben:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}}\, (\mu\,\nu)^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \tag{8}$$

Die entsprechende Verwendung von divergenten Doppelreihen von der Form $\sum_{\mu,\nu} c_\mu \cdot d_\nu$ oder gar $\sum_{\mu,\nu} d_\mu \cdot d_\nu$ erweist sich als unzweckmäßig,[2]) da durch die auf diesem Wege zu erzielenden Kriterien überhaupt nur solche Doppelreihen getroffen werden könnten, bei welchen alle Zeilen oder (bzw. und) Kolonnen, zum mindesten von einer bestimmten ab divergieren, während der für Doppelreihen als solche charakteristische Fall von Divergenz gerade bei gleichzeitiger Konvergenz aller Zeilen und Kolonnen in die Erscheinung tritt.

Andererseits möge ausdrücklich bemerkt werden, daß das

[1]) A. a. O. (Bd. 27), p. 143.
[2]) A. a. O., p. 147.

Konvergenz-Kriterium (8) eine etwas größere Tragweite besitzt, als das ihm entsprechende (d. h. gleichfalls auf der Wahl $c_\nu = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\varrho}$ beruhende) Anfangs-Kriterium der Skala (6^a). Man findet nämlich:

$$
\begin{aligned}
(\mu+\nu)^{2+\varrho} &= \left((\mu+\nu)^{1+\frac{1}{2}\varrho}\right)^2 \\
&\geqq \left(\mu^{1+\frac{1}{2}\varrho} + \nu^{1+\frac{1}{2}\varrho}\right)^2 \text{ [1]} \\
&> 2(\mu\nu)^{1+\frac{1}{2}\varrho} \text{ (für jedes } \mu, \nu).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Reagiert also $a_\mu^{(\nu)}$ für irgend einen bestimmten Wert $\varrho > 0$ auf das Anfangs-Kriterium (6^a), so findet das gleiche bezüglich des Kriteriums (8) statt, sofern man daselbst ϱ durch $\frac{1}{2}\varrho$ ersetzt.

Andererseits ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{(\mu+\nu)^2}{(\mu\nu)^{1+\varrho}} &= \frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}} + \frac{2}{(\mu\nu)^\varrho} \\
&> \frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Ist sodann $\varrho < 1$ und wird eine positive Zahl G beliebig groß vorgeschrieben, so hat man:

$$\frac{\mu^{1-\varrho}}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{\nu^{1-\varrho}}{\mu^{1+\varrho}} > G,$$

wenn zwischen μ und ν eine der beiden Beziehungen besteht:

$$\mu \geqq G^{\frac{1}{1-\varrho}} \cdot \nu^{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}} \quad \text{oder:} \quad \nu \geqq G^{\frac{1}{1-\varrho}} \cdot \mu^{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}}, \tag{11}$$

was offenbar stets für unendlich viele Wertepaare (μ, ν) der Fall ist. Infolgedessen ergibt sich aus Ungleichung (10), daß:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \frac{(\mu+\nu)^2}{(\mu\nu)^{1+\varrho}} = \infty,$$

[1] Wegen der Beziehung

$$(\mu+\nu)^{1+\frac{1}{2}\varrho} > \mu^{1+\frac{1}{2}\varrho} + \nu^{1+\frac{1}{2}\varrho}$$

siehe Nr. 5.

und man erkennt somit, daß nicht nur das Anfangs-Kriterium, sondern sogar die ganze Skala (6^a) versagen kann, auch wenn das Kriterium (8) eine Entscheidung liefert.[1])

3. Wählt man speziell $c_\mu^{(\nu)} = a^{\mu+\nu}$ (wo $0 < a < 1$) — eine Festsetzung, deren Zulässigkeit sich ergibt, wenn man in der Formel $c_\mu^{(\nu)} = \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu+\nu}$ (Gl. (4)) $c_\lambda = \lambda \cdot a^\lambda$ oder aber in der Formel $c_\mu^{(\nu)} = c_\mu \cdot c_\nu$ (Gl. (7)) $c_\lambda = a^\lambda$ setzt —, so folgt, daß die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ konvergiert, wenn für $\mu + \nu \geqq l$:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq a^{\mu+\nu}, \text{ anders geschrieben: } (a_\mu^{(\nu)})^{\frac{1}{\mu+\nu}} \leqq a,$$

also schließlich, wenn:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} (a_\mu^{(\nu)})^{\frac{1}{\mu+\nu}} < a, \text{ d. h. } < 1. \tag{12^a}$$

Da andererseits die Divergenz der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ schon feststeht, wenn nur überhaupt für unendlich viele Terme $a_\mu^{(\nu)}$ die Beziehung besteht:

$$(a_\mu^{(\nu)})^{\frac{1}{\mu+\nu}} \geqq 1,$$

also a fortiori, wenn:

---

[1]) Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, daß die Konvergenz der Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^{-\sigma}$

$$(a > 0,\ c > 0,\ b^2 - ac < 0,\ \sigma > 1),$$

welche in der mehrfach zitierten Abhandlung mit Hilfe des Kriteriums (8) erwiesen wurde (a. a. O., p. 151), immerhin auch vermöge des Anfangs-Kriteriums (6^a) erkannt werden kann. Man findet nämlich (s. a. a. O., Formel (32)):

$$\begin{aligned} a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 &\geqq \frac{\Delta}{a+c}(\mu^2+\nu^2) \\ &\geqq \frac{2\Delta}{a+c}(\mu+\nu)^2, \end{aligned}$$

woraus dann alles Weitere unmittelbar hervorgeht.

$$(12^b) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \left(a_\mu^{(\nu)}\right)^{\frac{1}{\mu+\nu}} > 1,$$

so gewinnt man durch Zusammenfassung von (12^a) und (12^b) dasjenige disjunktive Doppel-Kriterium, welches dem Cauchyschen Fundamental-Kriterium erster Art für einfach unendliche Reihen entspricht und welches für die Bestimmung des wahren Konvergenz-Bereiches einer Potenzreihe von der Form $\sum_{\mu,\nu} A_\mu^{(\nu)} \cdot x^\mu \cdot y^\nu$, wo $|A_\mu^{(\nu)}| = a_\mu^{(\nu)}$, die analoge Bedeutung besitzt, wie jenes letztere in der Theorie der Potenzreihen mit einer Veränderlichen.

4. Bedeutet jetzt $a_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_p}$, wo jeder der Indizes $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p$ alle Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ... zu durchlaufen hat, das allgemeine Glied einer p-fach unendlichen Folge positiver Zahlen, ferner

$$c_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_p} \equiv C^{-1}_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_p} > 0 \text{ bzw. } d_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_p} \equiv D^{-1}_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_p} > 0$$

das allgemeine Glied einer als konvergent bzw. divergent erkannten p-fach unendlichen Reihe, so ergibt sich ganz analog, wie in Nr. 1 für den dort betrachteten Fall $p = 2$, für die p-fach unendliche Reihe $\sum^{\nu_1\ldots\nu_p} a_{\nu_1\ldots\nu_p}$:

(A) Konvergenz, wenn $\overline{\lim_{\nu_1+\cdots+\nu_p=\infty}} C_{\nu_1\ldots\nu_p} \cdot a_{\nu_1\ldots\nu_p} < \infty$,

(B) Divergenz, wenn $\underline{\lim_{\nu_1,\ldots\nu_p=\infty}} D_{\nu_1\ldots\nu_p} \cdot a_{\nu_1\ldots\nu_p} > 0$.[1])

Ordnet man nun eine p-fach unendliche Reihe nach „Diagonalen", d. h. nach Gliedergruppen mit konstanter Indexsumme $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = \lambda$ (wo der Reihe nach $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$), so enthält die durch irgend ein bestimmtes λ charakterisierte Gruppe, wie leicht durch vollständige Induktion bewiesen wird,

---

[1]) Dabei steht wiederum

$$\nu_1, \ldots \nu_p = \infty$$

zur Abkürzung für:

$$\nu_1 = \infty, \quad \nu_2 = \infty, \quad \ldots \quad \nu_p = \infty.$$

im ganzen $\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+p-1)}{1\cdot 2\ldots(p-1)}$ Terme. Da andererseits gleichzeitig

mit $\sum c_\lambda$ auch $\sum \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+p-1)}{1\cdot 2\ldots(p-1)}\cdot\frac{c_\lambda}{\lambda^{p-1}}$

konvergiert,

mit $\sum d_\lambda$ auch $\sum \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+p-1)}{1\cdot 2\ldots(p-1)}\cdot\frac{d_\lambda}{\lambda^{p-1}}$

divergiert,

so lassen sich Zahlen vom Charakter $c_{\nu_1\ldots\nu_p}$ bzw. $d_{\nu_1\ldots\nu_p}$ in folgender Weise definieren:

$$(13)\quad\begin{cases} c_{0\ldots 0}=c_0, \text{ im übrigen: } c_{\nu_1\ldots\nu_p}=\dfrac{c_{\nu_1+\ldots+\nu_p}}{(\nu_1+\cdots+\nu_p)^{p-1}}, \\ d_{0\ldots 0}=d_0, \quad " \quad\quad " \quad d_{\nu_1\ldots\nu_p}=\dfrac{d_{\nu_1+\ldots+\nu_p}}{(\nu_1+\cdots+\nu_p)^{p-1}}, \end{cases}$$

da die aus diesen $c_{\nu_1\ldots\nu_p}$ bzw. $d_{\nu_1\ldots\nu_p}$ gebildeten p-fach unendlichen Reihen, nach „Diagonalen": $\nu_1+\cdots+\nu_p=\lambda$ summiert, in die soeben als konvergent bzw. divergent erkannten Reihen übergehen.

Durch Einführung der Ausdrücke (13) in die allgemeinen Kriterien (A), (B) nehmen diese die folgende Spezialform an:

Konvergenz, wenn:

$$(\mathrm{I}^\alpha)\quad \overline{\lim_{\nu_1+\ldots+\nu_p=\infty}}\,(\nu_1+\cdots+\nu_p)^{p-1}\cdot C_{\nu_1+\ldots+\nu_p}\cdot a_{\nu_1\ldots\nu_p}<\infty.$$

Divergenz, wenn:

$$(\mathrm{I}^\beta)\quad \underline{\lim_{\nu_1,\ldots\nu_p=\infty}}\,(\nu_1+\cdots+\nu_p)^{p-1}\cdot D_{\nu_1+\ldots+\nu_p}\cdot a_{\nu_1\ldots\nu_p}>0.$$

Einen zweiten Typus von Konvergenz-Kriterien gewinnt man wiederum durch die Bemerkung, daß die p^{te} Potenz einer konvergenten Reihe $\sum_0^\infty c_\nu$ die folgende konvergente p-fach unendliche Reihe liefert:

(14) $$\sum_0^\infty{}_{\nu_1 \ldots \nu_p} c_{\nu_1} c_{\nu_2} \ldots c_{\nu_p}.$$

Es ergibt sich daher für die p-fach unendliche Reihe $\sum_{\nu_1 \ldots \nu_p} a_{\nu_1 \ldots \nu_p}$ Konvergenz, wenn:

(II$^\alpha$) $$\overline{\lim_{\nu_1 + \ldots + \nu_p = \infty}} C_{\nu_1} \cdot C_{\nu_2} \ldots C_{\nu_p} \cdot a_{\nu_1 \ldots \nu_p} < \infty.$$

Die Wahl $c_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \alpha^{\nu_1 + \cdots + \nu_p}$ (wo $0 < \alpha < 1$), deren Zulässigkeit sich wiederum ergibt, sowohl wenn man in (13) $c_\lambda = \lambda^{p-1} \cdot \alpha^\lambda$ als auch wenn man in (14) $c_\lambda = \alpha^\lambda$ setzt, liefert zunächst für die Konvergenz die Bedingung:

(15^a) $$\overline{\lim_{\nu_1 + \ldots + \nu_p = \infty}} (a_{\nu_1 \ldots \nu_p})^{\frac{1}{\nu_1 + \ldots + \nu_p}} < \alpha, \text{ d. h. } < 1.$$

Da andererseits die Divergenz offenbar schon gesichert ist, wenn:

(15^b) $$\overline{\lim_{\nu_1 + \ldots + \nu_p = \infty}} (a_{\nu_1 \ldots \nu_p})^{\frac{1}{\nu_1 + \ldots + \nu_p}} > 1,$$

so ergibt sich auf diese Weise wiederum das für die Theorie der Potenzreihen mit p Veränderlichen grundlegende Analogon zum Cauchyschen Fundamental-Kriterien erster Art.

Setzt man noch in (I$^\alpha$): $C_\lambda = \lambda^{1+\varrho}$ (wo $\varrho > 0$), in (I$^\beta$): $D_\lambda = \lambda$, so erhält man als Anfangs-Kriterium einer in bekannter Weise beliebig weit fortsetzbaren Skala (s. (6^a), (6^b)):

Konvergenz, wenn:

(16^a) $$\overline{\lim_{\nu_1 + \ldots + \nu_p = \infty}} (\nu_1 + \cdots + \nu_p)^{p+\varrho} \cdot a_{\nu_1 \ldots \nu_p} < \infty,$$

Divergenz, wenn:

(16^b) $$\lim_{\underline{\nu_1, \ldots \nu_p = \infty}} (\nu_1 + \cdots + \nu_p)^p \cdot a_{\nu_1 \ldots \nu_p} > 0.$$

Ebenso aus (II$^\alpha$) durch die Substitution $C_\lambda = (\lambda + 1)^{1+\varrho}$:

Konvergenz, wenn:

(17) $$\overline{\lim_{\nu_1 + \ldots + \nu_p = \infty}} ((\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \ldots (\nu_p + 1))^{1+\varrho} \cdot a_{\nu_1 \ldots \nu_p} < \infty.$$

5. Um die Kriterien (16^a), (16^b) auf einen besonderen Fall anzuwenden, schicke ich zunächst noch den folgenden, wohl auch an und für sich nicht ganz uninteressanten Hilfssatz voraus:

Sind $x_1, x_2 \ldots x_n$ durchweg $\geqq 0$, so hat man[1]) für $\varkappa > 1$:

$$(18) \quad x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa \begin{cases} < (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa \\ \geqq \dfrac{1}{n^{1-\varkappa}} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa \end{cases}$$

(wobei das Gleichheitszeichen ausschließlich im Falle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ gilt). Ist dagegen $0 < \varkappa < 1$, so vertauschen die Zeichen $<$ und $>$ lediglich ihre Reihenfolge.

Man hat daher, falls $\lim (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \infty$ für **jedes**[2]) positive $\varkappa$:

$$(19) \qquad x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa \sim (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa.$$

Beweis. Setzt man $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s_n$, so ist für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$\frac{x_\nu}{s_n} < 1,$$

also, wenn $\varkappa > 1$, auch:

$$\left(\frac{x_\nu}{s_n}\right)^{\varkappa - 1} < 1,$$

und daher, wenn man diese letzte Ungleichung mit $\frac{x_\nu}{s_n}$ multipliziert:

$$\left(\frac{x_\nu}{s_n}\right)^{\varkappa} < \frac{x_\nu}{s_n}.$$

Durch Substitution von $\nu = 1, 2, \cdots n$ und Addition der resultierenden Ungleichungen folgt hieraus:

---

[1]) Die erste (nur für ganzzahlige positive $\varkappa$ ohne weiteres evidente) Ungleichung habe ich schon bei anderer Gelegenheit hergeleitet (Sitzungsberichte Bd. 32 [1902] p. 171 und 299). Die zweite scheint mir neu zu sein. Für den ganz speziellen Fall $\varkappa = 2$ findet sie sich in Cauchys Analyse algébrique, p. 453 = Oeuvres (2), II, p. 372.

[2]) Für den zuvor ausgeschlossenen Fall $\varkappa = 1$ gehen ja die Relationen (18) (19) in Identitäten über.

$$\frac{x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa}{s_n^\varkappa} < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{s_n} = 1,$$

d. h.:

$$(18^a) \qquad x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa < (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Ferner hat man bekanntlich[1]) für $A > 0$, $\varkappa > 1$:

$$A^\varkappa \geqq 1 + \varkappa (A - 1),$$

wobei das Gleichheitszeichen ausschließlich im Falle $A = 1$ gilt. Danach wird:

$$\left(\frac{n\, x_\nu}{s_n}\right)^\varkappa \geqq 1 + \varkappa \left(\frac{n\, x_\nu}{s_n} - 1\right),$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur, falls $x_\nu = \frac{1}{n} \cdot s_n$. Durch Substitution von $\nu = 1, 2, \ldots n$ und Addition folgt sodann:

$$\frac{n^\varkappa}{s_n^\varkappa}(x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa) \geqq n + \varkappa \left(\frac{n}{s_n}(x_1 + x_2 + \cdots + x) - n\right)$$
$$\geqq n,$$

d. h.:

$$(18^b)\, x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa \geqq \frac{1}{n^{\varkappa - 1}} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1),$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen ausschließlich, wenn für jedes ν: $x_\nu = \frac{1}{n} \cdot s_n$, d. h. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Schreibt man in (18^a) und (18^b) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituiert $x_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}$ für x_ν, so ergibt sich zunächst:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \left\{ \begin{array}{l} < \left(x_1^{\frac{1}{\varkappa'}} + x_2^{\frac{1}{\varkappa'}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'} \\ \geqq \dfrac{1}{n^{\varkappa' - 1}} \left(x_1^{\frac{1}{\varkappa'}} + x_2^{\frac{1}{\varkappa'}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'} \end{array} \right\} (\varkappa' > 1).$$

[1]) S. z. B. Sitzungsb. Bd. 32 (1902), p. 176.

Vertauscht man die beiden Seiten dieser Ungleichungen, erhebt alles in die Potenz $\frac{1}{\varkappa'}$ und setzt noch $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$, so folgt schließlich, wie behauptet:

$$(18^{\mathrm{bis}}) \quad x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_n^\varkappa \left\{ \begin{array}{l} > (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa \\ \leqq n^{1-\varkappa}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\varkappa \end{array} \right\} (\varkappa < 1).$$

6. Es sei jetzt die p-fach unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(20) \qquad a_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \frac{1}{(\nu_1^\varkappa + \nu_2^\varkappa + \cdots + \nu_p^\varkappa)^\sigma} \qquad (\varkappa > 0, \ \sigma > 0)$$

vorgelegt, wo jeder der Indizes $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p$ alle Zahlen der Reihe 0, 1, 2 ... (mit Ausschluß der Verbindung $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$) zu durchlaufen hat. Da für $\lim (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p) = \infty$ auf Grund des eben bewiesenen Hilfssatzes (Formel (19)):

$$(\nu_1^\varkappa + \nu_2^\varkappa + \cdots + \nu_p^\varkappa)^\sigma \sim (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p)^{\varkappa\sigma},$$

also:

$$a_{\nu_1 \ldots \nu_p} \sim (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p)^{-\varkappa\sigma},$$

so geht aus den Kriterien (16^a), (16^b) unmittelbar hervor, daß die p-fach unendliche Reihe der $a_{\nu_1 \ldots \nu_p}$ konvergiert, wenn $\varkappa\sigma > p$, daß sie dagegen divergiert, wenn $\varkappa\sigma \leqq p$. Für den besonderen Fall $\varkappa = 2$ geht die vorliegende Reihe in diejenige über, deren Konvergenz für $\sigma > \frac{p}{2}$ zuerst von Eisenstein[1]) in etwas umständlicherer Weise abgeleitet wurde.

[1]) Journal für Mathematik 35 (1847), p. 157. Bei Festhaltung der hier angegebenen Methode ließe sich dieser speziellere Konvergenz- und Divergenz-Beweis ohne Benützung des allgemeineren Hilfssatzes von Nr. 5, vermittelst des in Fußnote 1, p. 52 erwähnten (sozusagen evidenten) Cauchyschen Spezialfalles führen.