Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 2. April.)

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, die noch für die Stellen $X = R \cdot e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen convergirt, ist zwar unter gewissen Einschränkungen[1]) allemal eine Fourier'sche Reihe. Immerhin ist man bei der Beurtheilung der Convergenz von $\mathfrak{P}(R\,e^{\vartheta i})$ nicht ausschliesslich auf diejenigen Ergebnisse angewiesen, welche die allgemeine Theorie der Fourier-schen Reihen liefert. Abgesehen von den elementaren Kriterien für unbedingte oder bedingte Convergenz, kommt als ein der Potenzreihe als solcher eigenthümliches Hülfsmittel das Verhalten von $\lim \mathfrak{P}(x)$ bei speciellem oder beliebigem Grenzübergange $\lim x = X$ in Betracht. In § 1 der folgenden Mittheilung wird zunächst in ganz elementarer Weise untersucht, in wieweit aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$ geschlossen werden kann. Die Cauchy'sche bezw. Fourier'sche Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten führt sodann in § 2 zu einem Kriterium für die absolute Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$. Daran schliessen sich (§ 3) Betrachtungen über Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und doch nicht absolut convergiren. Schliesslich (§ 4) werden weitere Anhaltspunkte zur Beurtheilung von $\mathfrak{P}(X)$ aus dem Umstande gewonnen, dass $\mathfrak{P}(X)$ durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei von einander abhängige, in ihren Convergenz-Eigenschaften sich gegenseitig bedingende Fourier'sche Reihen zerfällt.

[1]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 337 ff.

§ 1. Der Abel'sche Grenzwerth-Satz und seine Umkehrungen.

1. Es sei:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu\, i)$$

eine Potenzreihe mit endlichem Convergenz-Bereiche, d. h. einem mit einem gewissen Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Da man, sofern nicht schon $R = 1$ ist, $\mathfrak{P}(x)$ mit Hülfe der Substitution $x = Ry$ in die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(y) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu} (a_\nu R^\nu) \cdot y^\nu$ mit dem Convergenz-Radius $|y| = 1$ transformiren kann, so dürfen wir, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, im folgenden ein für allemal als Convergenz-Radius von $\mathfrak{P}(x)$ den Werth $|x| = 1$ annehmen. Ist dann $\sum a_\nu$ convergent und bedeutet ϱ eine reelle positive Zahl < 1, so besagt der bekannte Abel'sche Grenzwerth-Satz, dass:

$$(2) \qquad \lim_{\varrho = 1} \mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu\,,$$

und daraus folgt unmittelbar, dass auch:

$$(3) \qquad \lim_{\varrho = 1} \mathfrak{P}(\varrho\, X) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu\, X^\nu\,,$$

falls X eine beliebige Stelle auf dem Convergenzkreise bedeutet, für welche $\sum_1^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu\, X^\nu$ convergirt.

Es liegt auf der Hand, dass dieser Satz nicht ohne weiteres umkehrbar ist. Denn für die Convergenz von $\sum_1^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu$ an irgend eine einzelne Stelle X der Peripherie ist nicht nur das Verhalten von $\mathfrak{P}(x)$ in der Nähe dieser speciellen Stelle X, sondern dasjenige in der Nähe des gesammten Convergenzkreises maassgebend. So würde z. B. schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho\, X')$

von der ersten oder höherer Ordnung unendlich wird, die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für alle übrigen Stellen X definitiv ausschliessen. Auch folgt aus der Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für irgend ein bestimmtes X nicht nur die Existenz der Beziehung (3), sondern, auf Grund einer zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Verallgemeinerung jenes Abel'schen Satzes, die weitere Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu X^\nu,$$

falls x auf einem beliebigen Strahle der Stelle X zustrebt; während andererseits aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ keineswegs ohne weiteres auf diejenige von $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ in dem eben angegebenem Sinne geschlossen werden kann (Beispiel: $\mathfrak{P}(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$ bei $x = 1$).[2])

Ja sogar, wenn auch $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ im obigen Sinne für jede Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt, so braucht darum $\mathfrak{P}(X)$ für keinen einzigen Werth X zu convergiren $\left(\text{Beispiel: } \mathfrak{P}(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\right)$.[3])

2. Es giebt einen einzigen, besonders einfachen Fall, in welchem der in Gl. (2) bezw. (3) enthaltene Satz ohne weiteres umkehrbar ist. Um denselben zu erledigen, schicken wir zunächst den folgenden Satz voraus:

Wenn $\sum a_\nu$ *eigentlich* divergirt, so ist $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty$ (d. h. $\lim\limits_{\varrho=1} |\mathfrak{P}(\varrho)| = +\infty$). Dabei soll $\sum a_\nu = \sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ eigentlich divergent heissen, wenn mindestens eine

[1]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), p. 370. Vgl. auch: Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 374.

[2]) Vgl. auch § 2, Nr. 2.

[3]) Vgl. Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54.

der beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum \beta_\nu$ eigentlich d. h. nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergirt).[1])

Beweis. Es sei etwa, um irgend eine Festsetzung zu treffen, $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu = +\infty$. Setzt man:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = \sigma_\nu ,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$(5)\quad \sum_{1}^{n} a_\nu \varrho^\nu = \sum_{1}^{m-1}{}^{\nu} (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) \cdot \sigma_\nu + \sum_{m}^{n-1}{}^{\nu} (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) \cdot \sigma_\nu + \sigma_n \cdot \varrho^n \quad (n > m).$$

Da $\lim\limits_{\nu=\infty} \sigma_\nu = +\infty$, so besitzen die σ_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots.$ eine endliche untere Grenze g_1 (die eventuell auch negativ sein könnte). Bedeutet dann allgemein g_m die untere Grenze von $\sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots.$, so folgt aus (5):

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu \varrho^\nu > g_1 (\varrho - \varrho^m) + g_m \cdot \varrho^m ,$$

und daher, wegen $\varrho < 1$:

$$(6)\qquad \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu \varrho^\nu \left\{ \begin{array}{ll} > g_1 + g_m \varrho^m , & \text{wenn } g_1 < 0, \\ > g_m \varrho^m , & \text{wenn } g_1 \geq 0. \end{array} \right.$$

---

1) Es würde nicht genügen, anzunehmen, dass lediglich:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (\alpha_\nu + \beta_\nu i) = \infty ,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \right| = +\infty .$$

Denn aus:

$$\lim_{n=\infty} | A_n + B_n i | = +\infty$$

folgt noch nicht einmal, dass eine der Zahlenfolgen $|A_\nu|$, $|B_\nu|$ den Grenzwerth $+\infty$ haben müsste. Es könnte auch:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \, | A_n | = \infty, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \, B_n = \infty ,$$

dagegen

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \, | A_n | , \quad \underline{\lim_{n=\infty}} \, | B_n |$$

endlich sein.

Unterwirft man ϱ der Bedingung:

$$\varrho \geqq \frac{m}{m+1}, \tag{7}$$

so wird:

$$\varrho^m \geqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} > \frac{1}{e} \quad \text{für jedes (noch so grosse) } m,$$

und somit:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu > g_1 + \frac{1}{e} \cdot g_m \text{ bezw. } > \frac{1}{e} \cdot g_m. \tag{8}$$

Da, wegen $\lim\limits_{m=\infty} \sigma_m = +\infty$, auch $\lim\limits_{m=\infty} g_m = +\infty$, so kann man m so fixiren, dass g_m, also auch $g_1 + \frac{1}{e} \cdot g_m$ eine beliebig gross vorgeschriebene positive Zahl G übersteigt. Alsdann wird aber nach Ungl. (8):

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu > G \tag{9}$$

für jedes $n > m$ und jedes $\varrho \geqq \frac{m}{m+1}$. Mithin ergiebt sich:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = +\infty \tag{10}$$

und schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu = \infty, \quad \text{d. h. } \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty, \tag{11}$$

ohne dass über die β_ν eine weitere Voraussetzung gemacht zu werden braucht. — Analog im Falle

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = -\infty, \text{ bezw. } \sum_1^\infty{}^\nu \beta_\nu = \pm\infty. —$$

Ersetzt man wiederum noch a_ν durch $a_\nu X^\nu$, so folgt:

Ist $\sum a_\nu X^\nu$ *eigentlich* divergent, so wird:

$$\lim_{\varrho=\infty} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty.$$

3. Hieraus kann man zunächst den folgenden Schluss ziehen:

Besitzt für irgend eine Stelle X (auf dem Convergenzkreise) $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen bestimmten Werth, so kann $\sum a_\nu X^\nu$ nur *convergiren* oder *uneigentlich divergiren.*

Da aber die uneigentliche Divergenz definitiv ausgeschlossen erscheint, wenn die reellen wie die imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$, zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab, unter sich gleichbezeichnet sind, so gewinnt man den Satz:

Besitzt $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ für irgend eine Stelle $e^{\vartheta i}$ einen bestimmten Werth, und sind (zum mindesten für $\nu \geqq n$) die Terme $(\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)$ unter sich, ebenso die Terme $(\alpha_\nu \sin \nu\vartheta + \beta_\nu \cos \nu\vartheta)$ unter sich *gleichbezeichnet*, so ist $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ *convergent.*

Dabei gestattet die auf die Vorzeichen der Reihenglieder bezügliche Bedingung noch eine kleine Verallgemeinerung, die auf der Bemerkung beruht, dass der Convergenz-Charakter einer Reihe durch Multiplication mit einem Factor von der Form $e^{\lambda i}$ in keiner Weise geändert wird. Da die Bedingung, dass die reellen, sowie imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$ für $\nu \geqq n$ unter sich gleichbezeichnet sein sollen, geometrisch gesprochen den Sinn hat, dass die Punkte $a_\nu X^\nu$ (abgesehen von einer endlichen Anzahl) durchweg im Innern und auf der Begrenzung eines einzigen der vier von den Axen gebildeten rechten Winkel liegen, und da andererseits durch Multiplication mit $e^{\lambda i}$ jeder Punkt lediglich eine Drehung um den Winkel λ erleidet, so kann die geometrische Bedeutung jener verallgemeinerten Bedingung dahin ausgesprochen werden: die Punkte $a_\nu X^\nu$ müssen (zum mindesten für $\nu \geqq n$) im Innern und auf der Begrenzung eines durch irgend zwei vom Nullpunkte ausgehende Strahlen gebildeten rechten Winkels liegen.

4. Sieht man von dem eben betrachteten Falle ab, so muss zu der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$, falls man daraus auf die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ schliessen will, noch irgend eine andere Bedingung hinzukommen, welche in geeigneter Weise von dem Gesammtverhalten des Grenzwerthes $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ für alle möglichen X und jeden beliebigen Grenzübergang abhängen muss. Als einfachste Form einer solchen Bedingung, die sich ja auch unmittelbar als nothwendig für die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ erweist, würde sich zunächst die Prämisse $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ ergeben. Dieselbe scheint indessen nicht hinreichend zu sein, um daraus in Verbindung mit der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ zu erschliessen. Dagegen hat Herr Tauber gezeigt,[1]) dass eine andere für die Convergenz von $\sum a_\nu$ nothwendige Bedingung, nämlich: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{1}^{n}{}^{\nu}\, \nu\, a_\nu = 0$, in Verbindung mit der hierzu gleichfalls nothwendigen Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho)$, stets auch die Convergenz von $\sum a_\nu$ zur Folge hat. Ich möchte dieses mir bemerkenswerth erscheinende Resultat hier gleichfalls ableiten und zunächst einige auch an sich nützliche Betrachtungen voranschicken, die ich gleich etwas allgemeiner fasse, als für den Zweck des fraglichen Beweises nothwendig wäre.

5. Setzt man:

$$(12)\qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n, \qquad 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n = s_n',$$

so folgt der Satz, dass für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n=\infty} s_n$, also für die Convergenz von $\sum u_\nu$, die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0$$

nothwendig erscheint aus einem etwas allgemeineren, zuerst

1) Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 8 (Wien 1897), p. 273.

von Kronecker bewiesenen[1]) Satzes (s. weiter unten Gl. (19)). Dieses Resultat lässt sich indessen auch in sehr einfacher Weise aus einem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze[2]) ableiten. Darnach ist nämlich (mit einer unerheblichen Abweichung in der Formulirung):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{\nu=\infty} (A_n - A_{n-1}), \tag{13}$$

falls der rechts auftretende Grenzwerth existirt. Substituirt man hier:

$$\begin{aligned} A_n &= s_1 + s_2 + \ldots + s_n \\ &= n \cdot u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n \end{aligned}$$

und multiplicirt die betreffende Gleichung mit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ so wird:}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} (n \cdot u_1 + (n-1) u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n) = \lim_{n=\infty} s_n,$$

falls $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ überhaupt (d. h. als endlich oder in bestimmter Weise unendlich) existirt. Ist aber $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ zugleich endlich, also $\sum u_\nu$ convergent, so kann man die letzte Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ u_1 + u_2 + \ldots + u_n - \frac{n u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_1}{n+1} \right\} = 0$$

d. h. man findet (wenn man noch der Symmetrie zu Liebe den Nenner $n+1$ durch n ersetzt):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0. \tag{14}$$

Geht man statt von dem Cauchy'schen Satze (13) von dessen Stolz'scher[3]) Verallgemeinerung aus, nämlich:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{M_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} \tag{15}$$

[1]) Comptes rendus, T. 103 (1886), p. 980.

[2]) Analyse algébr., p. 59.

[3]) Math. Ann. Bd. 14 (1879), p. 232.—Allg. Arithm. Bd. 1, p. 173.

(wo die M_ν mit ν monoton in's Unendliche wachsen und wiederum die Existenz des rechts auftretenden Grenzwerthes vorausgesetzt wird) und substituirt:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = s_{\nu-1}, \\ \text{also: } \quad &\lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} = \lim_{n=\infty} s_{n-1} = \lim_{n=\infty} s_n, \end{aligned}\right.$$

so wird:

$$A_\nu - A_{\nu-1} = (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}$$

und, wenn man $\nu = 2, 3, \ldots n$ setzt und die betreffenden Gleichungen addirt:

$$(17)\qquad A_n = A_1 + \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}.$$

Durch Einführung der Beziehungen (16), (17) in Gl. (15) nimmt daher der betreffende Grenzwerthsatz, wenn man noch beachtet, dass: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_1}{M_n} = 0$, zunächst die folgende Form an:

$$(18)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n} \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} = \lim_{n=\infty} s_n,$$

sofern $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ überhaupt existirt. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich aber noch in folgender Weise transformiren:

$$\begin{aligned} \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} &= \sum_2^n{}^\nu M_\nu s_{\nu-1} - \sum_1^{n-1}{}^\nu M_\nu s_\nu \\ &= \sum_2^n{}^\nu M_\nu (s_{\nu-1} - s_\nu) - M_1 s_1 + M_n s_n \\ &= M_n s_n - \sum_1^n{}^\nu M_\nu u_\nu \end{aligned}$$

(wegen: $s_1 = u_1$ und für $\nu > 1$: $s_\nu - s_{\nu-1} = u_\nu$), sodass Gl. (18) in die folgende übergeht:

$$\lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{1}{M_n} \sum_1^n{}^\nu M_\nu u_\nu \right) = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Ist jetzt wiederum noch $\lim_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl, d. h. $\sum u_\nu$ convergent, so folgt schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} \frac{M_1 u_1 + M_2 u_2 + \ldots + M_n u_n}{M_n} = 0. \tag{19}$$ [1]

Diese Beziehung bildet also, geradeso wie die speciellere (14) eine nothwendige Bedingung für die Convergenz von $\sum u_\nu$. Dass die Bedingung (14) für die Convergenz von $\sum u_\nu$ nicht hinreichend ist, folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dass es divergente Reihen mit positiven Termen $u_\nu > \nu$ giebt: so genügt z. B. die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$ der Bedingung (14), obschon sie divergirt. Was sodann die Bedingung (19) betrifft, so gelten im Falle $u_\nu > 0$ die folgenden, ohne besondere Schwierigkeit zu beweisenden Sätze:

> Wie stark auch $\sum u_\nu$ divergiren mag, so lassen sich stets monoton in's Unendliche wachsende Folgen M_ν angeben, derart dass die Relation (19) erfüllt ist.[2]
>
> Wie schwach auch $\sum u_\nu$ divergiren mag, so lassen sich stets solche M_ν angeben, für welche der Grenzwerth (19) von Null verschieden ausfällt.

Daraus folgt dann schliesslich:

> Genügen die u_ν (wo $u_\nu > 0$) bei jeder Wahl der M_ν der Beziehung (19), so ist $\sum u_\nu$ convergent.

In diesem Sinne kann also die Bedingung (19) als hinreichend für die Convergenz von $\sum u_\nu$ gelten. —

Schliesslich bemerke ich noch, dass nach dem Cauchyschen Satze Gl. (13):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} n\, u_n,$$

---

[1]) Das ist die Kronecker'sche Bedingung, die sich noch in gewisser Weise verallgemeinern lässt. Vgl. Kronecker a. a. O. und Jensen, Comptes rendus, T. 106 (188-), p. 835.

[2]) Dieser Satz bleibt natürlich a fortiori auch für beliebige u_ν bestehen.

sobald der rechts stehende Grenzwerth existirt. Somit ist die Beziehung (14) allemal erfüllt, wenn:

(20) $$\lim_{n=\infty} n \cdot u_n = 0$$

(aber nicht umgekehrt). Entsprechend ergiebt sich aus dem verallgemeinerten Cauchy'schen Satze (Gl. (15), dass die Relation (19) sicher besteht, wenn:

(21) $$\lim_{n=\infty} \frac{M_n}{M_n - M_{n-1}} \cdot u_n = 0 .$$

6. Hülfs-Satz I. Convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ für $|x| < r \leq 1$, so gelten für $|x| < r$ die Transformationen:

(A) $$\mathfrak{P}(x) = (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu$$

(B) $$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot s'_\nu x^\nu$$

wo:

$$s_\nu = \sum_1^\nu{}^\lambda a_\lambda, \quad s'_\nu = \sum_1^\nu{}^\lambda \lambda \cdot a_\lambda .$$

Beweis. Die Formel (A) ist sehr bekannt, wird jedoch zumeist unter wesentlich engeren Voraussetzungen abgeleitet. Sie wird hauptsächlich, nach dem Vorgange von Dirichlet,[1]) zum Beweise des Abel'schen Grenzwerthsatzes (Gl. (1)) benützt, also unter der Voraussetzung, dass $\sum a_\nu$ convergirt, d. h. $\lim_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Da in diesem Falle offenbar $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$, so resultirt die Formel (A) ohne weiteres aus der Abel'schen Transformations-Gleichung:

(22) $$\sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu = (1-x) \cdot \sum_1^{n-1}{}^\nu s_\nu x^\nu + s_n x^n ,$$

wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. Wird aber die obige auf $\lim s_n$ bezügliche Annahme nicht gemacht, so müsste,

[1]) Journ. de Math. (2), T. 7 (1863), p. 253. — Ges. Werke, Bd. II, p. 305.

um von Gl. (22) zur Formel (A) zu gelangen, erst feststehen, dass $\lim\limits_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$. Dies lässt sich in der That, auf Grund der vorausgesetzten Convergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$, ohne Schwierigkeit direkt nachweisen. Noch einfacher gelangt man jedoch, ohne den Weg über die Transformation (22) zu nehmen, zur Formel (A) mit Hülfe der unmittelbar für $|x| < r < 1$ als richtig erkannten Beziehung:

$$(23) \qquad \frac{1}{1-x} \cdot \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu x^\nu \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^\nu s_\nu x^\nu .$$

Die Vergleichung mit (22) lehrt dann zugleich, dass allemal: $\lim\limits_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$, sofern nur die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ einen von Null verschiedeneren Convergenz-Radius r besitzt, mag s_n im übrigen auch mit n beliebig stark in's Unendliche wachsen.

Zum Beweise der Formel (B) bemerke ich zunächst, dass gleichzeitig mit $\mathfrak{P}(x)$ auch die Reihe $x \cdot \mathfrak{P}'(x) = \sum\limits_1^\infty {}^\nu \nu \cdot a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$ convergirt. Daraus folgt aber auf Grund der soeben gemachten Bemerkung, dass auch:

$$(24) \qquad \lim_{n=\infty} s'_n x^n = 0, \quad x \cdot \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty {}^\nu s'_\nu x^\nu \text{ für: } |x| < r.$$

Man hat sodann:

$$s'_\nu - s'_{\nu-1} = \nu \cdot a_\nu, \quad \text{also } a_\nu = \frac{s'_\nu - s'_{\nu-1}}{\nu} \; (\nu = 2, 3, 4, \ldots),$$

und diese Beziehungen gelten auch noch für $\nu = 1$, wenn man s'_0 die Bedeutung von 0 beilegt. Hiernach ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \sum_1^n {}^\nu a_\nu x^\nu &= \sum_1^n {}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu} \cdot x^\nu - \sum_0^{n-1} {}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} \\ (25) \qquad &= \sum_1^{n-1} {}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \left(\frac{\nu+1}{\nu} - x \right) \cdot x^\nu + \frac{1}{n} s'_n x^n \\ &= \sum_1^{n-1} {}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^{n-1} {}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \cdot x^\nu + \frac{1}{n} \cdot s'_n \cdot x^n, \end{aligned}$$

und hieraus, mit Rücksicht auf Gl. (24) und die Convergenz von $\sum s'_\nu x^\nu$ (aus welcher a fortiori diejenige der beiden rechts auftretenden Reihen resultirt):

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot s'_\nu x^\nu, \text{ q.e.d.}$$

Zusatz. Für $x = 1$ resultirt aus (25) die späterhin zu benützende Beziehung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}. \tag{26}$$

7. Hülfs-Satz II. Ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ (wo wiederum: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), so hat man:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0. \text{ [1]} \tag{27}$$

Beweis. Es ist:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$$

$$= \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho^{n+1}\left(s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1}\right).$$

Da andererseits:

$$s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1} = s_{n+1} + \sum_2^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1}$$

$$= (1-\varrho) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu s_{\nu+n} \varrho^{\nu-1} \quad \text{(mit Benützung der Formel (A))}$$

$$= \frac{1}{\varrho^n}(1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1},$$

so folgt:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho(1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1}, \tag{28}$$

und daher:

$$|\mathfrak{P}(\varrho)| < \sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + |s_n| + (1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| \cdot \nu \varrho^{\nu-1}. \tag{29}$$

[1]) Der Satz lässt sich leicht in folgender Weise verallgemeinern: Ist: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{s_n}{n^p} = 0$, so hat man: $\lim\limits_{\varrho=1} (1-\varrho)^{1-p} \sum\limits_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0$.

Wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{s_\nu}{\nu} = 0$ lässt sich nun zu beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass:

$$\left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } \nu > n,$$

also, wenn man Ungl. (29) noch mit $(1-\varrho)$ multiplicirt:

$$|(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + |s_n|\right\} + (1-\varrho)^2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{n+1}^\infty{}^\nu \nu\,\varrho^{\nu-1}.$$

Da aber:

$$\sum_{n+1}^\infty{}^\nu \nu\,\varrho^{\nu-1} < \sum_1^\infty{}^\nu \nu\,\varrho^{\nu-1} = \frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

so resultirt aus der letzten Ungleichung die folgende:

$$(30) \qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + s_n\right\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wird jetzt ϱ so eingeschränkt, dass:

$$(31) \qquad \begin{gathered}(1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + s_n\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{d. h. } \varrho > 1 - \frac{\varepsilon}{2\left(s_n + \sum_1^n{}^\nu |a_\nu|\right)} \quad (\text{aber} < 1),\end{gathered}$$

so ergiebt sich:

$$(32) \qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < \varepsilon,$$

und, da ε jede noch so kleine Zahl > 0 bedeuten kann, schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} |(1-\varrho)\,\mathfrak{P}(\varrho)| = 0. \text{ —}$$

Zusätze. (a) Ersetzt man wiederum a_ν durch $a_\nu X^\nu$, wo $|X| = 1$, so folgt:

Ist:

$$(33) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n}{n} = 0,$$

so hat man:

$$(34) \quad \lim_{\varrho=1} (1-\varrho)\cdot \mathfrak{P}(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} (X - \varrho X)\cdot \mathfrak{P}(\varrho X) = 0.$$

(b) Die Bedingung (33) ist offenbar für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$ erfüllt, wenn:

$$(35) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}{n} = 0.$$

In diesem Falle gilt also auch die Relation (34) für jedes X.

(c) Ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, so besteht (nach dem Cauchy'schen Satze, Gl. (13)) allemal auch die Beziehung (35) und somit wiederum auch Gl. (34) für jedes X.

8. Nunmehr beweise ich den oben erwähnten Satz des Herrn Tauber in der folgenden Fassung:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz von $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu$ besteht in den beiden Beziehungen:

$$\text{(I)} \quad \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = A \quad \text{(d. h. gleich einer bestimmten Zahl)}$$

$$\text{(II)} \quad \lim_{n=\infty} \frac{s'_n}{n} = 0 \qquad (\text{wo: } s'_n = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \ldots + n\cdot a_n).$$

Beweis. Die Nothwendigkeit der Bedingung (I) folgt aus der Stetigkeit der Potenzreihe, diejenige der Bedingung (II) aus Gl. (14), p. 44.

Um zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichen, transformire ich zunächst $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$ mit Hülfe der Formel (B) p. 47, also:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu\cdot(\nu+1)}\cdot \varrho^\nu + (1-\varrho)\cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1}\cdot \varrho^\nu.$$

Lässt man ϱ gegen 1 convergiren, so folgt mit Benützung der Voraussetzung (I) und des Hülfssatzes II (dessen Anwendbarkeit aus dem Zusatze c) und der Voraussetzung (II) folgt):

$$A = \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \varrho^\nu. \tag{36}$$

Da es hierbei gleichgültig ist, welche Folge monoton gegen 1 zunehmender Zahlenwerthe ϱ durchläuft, so hat man speciell:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n=\infty} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \\ &= \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu + \lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu. \end{aligned} \tag{37}$$

In Folge der Voraussetzung (II) kann man zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass $\left|\frac{s'_\nu}{\nu}\right| < \varepsilon$ für $\nu > n$, also:

$$\left| \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu$$
$$< \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu = \frac{n}{n+1} \cdot \varepsilon,$$

d. h. es ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu = 0,$$

und man kann in Folge dessen die Beziehung (37) durch die folgende (nur noch von einem Grenzübergange abhängige) ersetzen:

$$A = \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu. \tag{38}$$

Man hat nun ferner, mit Benützung von Gl. (26)

$$s_n = \sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} + \frac{s'_n}{n} \tag{39}$$

und daher in Folge der Voraussetzung (II) und Gl. (38):

$$\lim_{n=\infty} (s_n - A) = \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu\right\}. \tag{40}$$

Da aber:

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} < \frac{\nu}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

so wird:

$$\left|\sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{s'_{\nu}}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu}\right\}\right| < \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left|\frac{s'_{\nu}}{\nu + 1}\right| < \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left|\frac{s'_{\nu}}{\nu}\right|,$$

und da mit Rücksicht auf die Voraussetzung (II) und den Cauchy'schen Satz (Gl. (13)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left|\frac{s'_{\nu}}{\nu}\right| = 0,$$

so geht Gl. (40) schliesslich in die folgende über:

(41) $$\lim_{n=\infty} (s_n - A) = 0,$$

d. h. man findet:

(42) $$\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_{\nu} = A,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

9. Substituirt man wiederum $a_{\nu} X^{\nu}$ für a_{ν}, so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_{\nu} x^{\nu}$ für irgend eine Stelle $x = X$, besteht in der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ und der Beziehung:

(43) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot a_1 X + 2 \cdot a_2 X^2 + \ldots + n \cdot a_n X^n) = 0.$$

Ist insbesondere $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, also auch: $\lim_{n=\infty} n \cdot |a_n| = 0$, so hat man (s. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 5, Gl. (20)) auch:

(44) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot |a_1| + 2 \cdot |a_2| + \ldots + n \cdot |a_n|) = 0,$$

und somit besteht in diesem Falle die Beziehung (43) für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$. Man gewinnt daher schliesslich noch den folgenden Satz:

> Ist $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, so convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_1^\infty{}' a_\nu x^\nu$ für *jede* Stelle X mit dem absoluten Betrage 1, für welche $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen endlichen Werth besitzt.

Es läge nahe aus den Sätzen in Nr. 8 und 9 durch Einführung der bekannten Integral-Form für die Coefficienten a_ν Convergenz-Bedingungen abzuleiten, welche lediglich von der Beschaffenheit der durch die Gleichung $f(x) = \lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ definirten Randfunction (vgl. den folgenden Paragraphen) abhängen. Es ist mir indessen nicht gelungen, auf diesem Wege weitere Bedingungen zu erhalten, als diejenigen, welche aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bereits bekannt sind.

---

§ 2. Ein Kriterium für die absolute Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenz-Kreise.

1. Es sei wiederum:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}' a_\nu x^\nu \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem Convergenz-Radius $|x| = 1$. Dieselbe definirt dann zunächst für $|x| < 1$ eine eindeutige und stetige Function von x, die mit $f(x)$ bezeichnet werden möge. Für die Stellen $X = e^{\vartheta i}$ auf dem Convergenz-Kreise soll sodann $f(x)$ definirt werden durch die Beziehung:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X), \tag{2}$$

wo ϱ, wie früher, stets eine positive reelle Zahl, kleiner als 1 bedeutet. Für solche Stellen X, für welche ein (endlicher oder unendlich grosser) $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ nicht existirt, mag $f(X)$ als undefinirt gelten. Die auf diese Weise für alle Stellen $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme etwaiger Stellen der letztgenannten Art eindeutig definirte Function $f(x)$ soll schlechthin die zur Reihe $\mathfrak{P}(x)$ zugehörige Function und speciell $f(X)$ die zugehörige Randfunction heissen.

Es ist ohne weiteres klar, dass überall, wo $\mathfrak{P}(X)$ convergirt, die Beziehung $f(X) = \mathfrak{P}(X)$ besteht (nach dem Abel-schen Satze), und dass an allen Stellen X, über welche hinaus eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x)$ existirt, $f(X)$ mit dieser analytischen Fortsetzung zusammenfällt. Ist ferner $\mathfrak{P}(x)$ die Reihen-Entwickelung eines gegebenen arithmetischen Ausdruckes $F(x)$, für welchen $F(X) = \lim_{\varrho = 1} F(\varrho X)$, so hat man offenbar $f(x) = F(x)$, $f(X) = F(X)$. In diesem Falle lässt sich im allgemeinen das Verhalten der Randfunction $f(X)$ aus der Natur des arithmetischen Ausdruckes $F(x)$ genau beurtheilen, und es handelt sich nun darum, aus diesem Verhalten bestimmte Schlüsse auf die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ zu ziehen. Hierzu ist vor allem erforderlich, dass die Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(X)$ sich identisch erweist, was bekanntlich keineswegs ohne weiteres der Fall zu sein braucht, auch wenn für $f(X)$ wirklich eine convergente Fourier'sche Reihe existirt.

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe,[1]) basirt aber das etwaige Zusammenfallen von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier-schen Reihe für $f(X)$ nicht allein auf der Beschaffenheit dieser Randfunction, d. h. auf dem Verhalten von $\lim_{\varrho=1} f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})$ als Function der reellen Veränderlichen ϑ, vielmehr auf dem Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X — wobei unter der „Umgebung" einer solchen Stelle X immer nur derjenige Theil der Gesammt-Umgebung zu verstehen ist, welcher dem Inneren und der Peripherie des Einheitskreises angehört.

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346 ff.

2. Zur Kennzeichnung der eigenthümlichen Eventualitäten, welche bezüglich des Verhaltens von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X thatsächlich eintreten können, bemerke ich, dass aus der Stetigkeit von $f(x)$ längs eines etwa von den Punkten $X_0 = e^{\vartheta_0 i}$, $X_1 = e^{\vartheta_1 i}$ begrenzten Einheitskreis-Bogens und auf jedem Radius $\overline{OX'}$, wo X' jeden beliebigen Punkt jenes Bogens bedeutet,[1]) noch keineswegs folgt, dass $f(x)$ in der Umgebung einer solchen Stelle X' stetig sein müsse oder dass daselbst auch nur $|f(x)|$ unter einer endlichen Grenze bleibe. Die hierin ausgesprochene Thatsache, dass nämlich aus der Stetigkeit einer (für ein zweidimensionales Continuum definirten) Function in zwei auf einander senkrechten Richtungen noch keineswegs deren Gebiets-Stetigkeit (im üblichen Sinne) resultirt, ist zwar für Functionen zweier reeller Variabeln längst bekannt.[2]) Dass dieselbe aber auch an den Grenzstellen analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen vorkommen kann, ist meines Wissens bisher nicht bemerkt worden, und es mag daher nicht überflüssig erscheinen, die fragliche Erscheinung durch ein einfaches Beispiel zu illustriren.

Es sei zunächst für $|x| < 1$:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}.$$

Für jedes von 1 verschiedene $X = e^{\vartheta i}(-\pi \leqq \vartheta \leqq +\pi)$, also für jedes von 0 verschiedene ϑ hat man auf Grund der zur Definition der Randfunction gegebenen Festsetzung:

$$f(e^{\vartheta i}) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho e^{\vartheta i}-1}\right)^4} = e^{-\left(\frac{1}{e^{\vartheta i}-1}\right)^4},$$

und wegen:

---

[1]) Die Stetigkeit von $f(X')$ in der Richtung des Radius, ist allemal da vorhanden, wo ein bestimmtes endliches $f(X')$ überhaupt existirt, da ja die definirende Existenz-Bedingung $f(X') = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X')$ mit der betr. Stetigkeits-Bedingung zusammenfällt.

[2]) Vgl. Encyklopädie der Math. Wissensch. Bd. II, p. 48, Fussn. 254.

$$e^{\vartheta i} - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \sin\frac{\vartheta}{2},$$

schliesslich:

$$f(e^{\vartheta i}) = e^{-\frac{1}{16}\cdot\frac{\cos 2\vartheta - i \sin 2\vartheta}{(\sin\frac{1}{2}\vartheta)^4}}$$

(für jedes ϑ ausser $\vartheta = 0$). Ferner wird:

$$f(1) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho-1}\right)^4} = 0,$$

und andererseits auch:

$$\lim_{\vartheta=0} f(e^{\vartheta i}) = 0,$$

sodass also $f(x)$ nicht nur für jede von $x = 1$ verschiedene Stelle, sondern auch noch für $x = 1$ in der Richtung des betreffenden Radius und längs der Peripherie stetig ist.

Zieht man jetzt aber solche Stellen x in Betracht, welche auf der die Punkte i und 1 verbindenden Geraden liegen, d. h. setzt man:

$$x = \xi + (1 - \xi)\cdot i \quad (0 < \xi < 1),$$

so folgt:

$$x - 1 = (\xi - 1)(1 - i),$$

und (wegen $(1 - i)^4 = -4$):

$$f(x) = e^{+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\xi-1}\right)^4},$$

sodass also $f(x)$ für $\lim \xi = 1$, d. h. wenn x auf der Geraden $\overline{i\,1}$ der Stelle $x = 1$ zustrebt, unendlich gross (von unendlich höher Ordnung) wird.

Die Function $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}$ ist also für keine noch so kleine Umgebung der Stelle $x = 1$ stetig oder auch nur endlich,[1]) obschon sie auf jedem Radius und längs der Peripherie ausnahmslos stetig ist.

---

[1]) D. h. absolut genommen unter einer festen positiven Zahl bleibend.

Da man sich im übrigen solche Stellen, wie sie die eben betrachtete Function für $x = 1$ besitzt, auf dem Einheitskreise beliebig condensirt denken kann, so ist sogar die Möglichkeit vorhanden, dass eine im Einheitskreise convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ eine auf jedem Radius und längs der gesammten Peripherie endliche und stetige Randfunction $f(X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ besitzt, ohne dass $f(x)$ in der Umgebung irgend einer einzigen Stelle X stetig ist oder auch nur endlich bleibt.

3. Die Uebereinstimmung von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourierschen Reihe für $f(X)$ hängt wesentlich und ausschliesslich davon ab, dass die Gleichung:

$$(3) \qquad \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_\varrho)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt \quad (|x| < \varrho),$$

wo C_ϱ einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius ϱ bedeutet, noch richtig bleibt, wenn man diesen Integrations-Kreis durch den Einheitskreis C_1 ersetzt. Hierzu wäre offenbar hinreichend, dass $f(X)$ für jede einzelne Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt und $f(\varrho X)$ bei $\lim \varrho = 1$ durchweg gleichmässig gegen den betreffenden Werth $f(X)$ convergirt. Kann nun aber auch schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche die eben genannte Bedingung nicht erfüllt, die Existenz der Gleichung (3) für $\varrho = 1$ hinfällig machen, selbst wenn $f(X')$, wie in dem Beispiele von Nr. 2, einen bestimmten, den benachbarten Randwerthen stetig sich anschliessenden Werth besitzt, so ist andererseits jene Bedingung doch sehr weit davon entfernt, eine nothwendige zu sein, da sogar dann, wenn sie für unendlich viele Stellen X' nicht erfüllt ist, noch die Möglichkeit besteht, in der Gleichung (3) C_ϱ durch C_1 zu ersetzen. Diese Möglichkeit beruht nämlich (abgesehen von gewissen, sogleich anzugebenden Einschränkungen) nicht sowohl auf der Anzahl der etwaigen Ausnahmestellen X', als vielmehr auf dem besonderen Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung jener

Stellen X'. In dieser Hinsicht sind folgende zwei Eventualitäten vorhanden:

(I) $|f(x)|$ bleibt in der Umgebung von X' durchweg unter einer endlichen Grenze. Wie ich in der oben citirten Abhandlung gezeigt habe,[1]) wird durch das Auftreten einer solchen Stelle die Möglichkeit, in Gl. (3) den Integrationsweg C_ϱ durch C_1 zu ersetzen in keiner Weise alterirt (gleichgültig, ob $f(X')$ selbst einen bestimmten Werth besitzt oder nicht). Das gleiche gilt dann auf Grund bekannter Methoden der Integral-Theorie auch dann noch, wenn Stellen X' der bezeichneten Art, eine unausgedehnte Menge bilden.

(II) $|f(x)|$ nimmt in der Umgebung von X' beliebig grosse Werthe an (wobei es wiederum gleichgültig ist, ob $f(X')$ einen endlichen oder unendlich grossen Werth besitzt oder überhaupt nicht definirt ist). Auch in diesem Falle bleibt Gl. (3) noch für den Integrationsweg C_1 gültig, wenn $f(x)$ bis an die Stelle X' absolut integrabel ist, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. wenn das Integral $\int_{x_0}^{X'} |f(x)| \cdot dx$ für jeden solchen Weg gleichzeitig mit der Länge dieses Weges beliebig klein wird. Dieses zunächst für den Fall einer solchen Stelle geltende Resultat bleibt dann wiederum noch bestehen, wenn Stellen X' der bezeichneten Art eine reductible Menge bilden.[2])

Wenn nun $f(\varrho X)$ im allgemeinen, d. h. höchstens mit den soeben sub (I) und (II) als zulässig statuirten Ausnahmen, für $\lim \varrho = 1$ gleichmässig gegen die endlichen Randwerthe $f(X)$ convergirt, so wollen wir den hierdurch definirten Charakter von $f(x)$ durch den Ausdruck bezeichnen: Es sei $f(x)$ und $|f(x)|$ in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel. In diesem Falle darf man dann die Gleichung (3) auch durch die folgende ersetzen:

---

[1]) a. a. O. p. 346.

[2]) Vgl. Harnack, Math. Ann. Bd. 24 (1884), p. 224.

$$(4)\quad \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)} \frac{f(t)}{t-x}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\vartheta i}}{e^{\vartheta i}-x}\cdot d\vartheta \quad (|x|<1),$$

woraus dann weiter folgt, dass:

$$(5)\qquad a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{-\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta.$$

Da andererseits zunächst:

$$\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \quad \text{für jedes } \varrho<1 \text{ und } \nu=1,2,3,\ldots,$$

und in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ und $|f(x)|$ auch:

$$\int_{(C_1)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \lim_{\varrho=1}\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0,$$

also:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta,$$

so folgt, wenn man diese letzte Gleichung einmal zu Gl. (5) addirt, das andere Mal davon subtrahirt:

$$(6)\qquad a_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot\cos\nu\vartheta\cdot d\vartheta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot\sin\nu\vartheta\cdot d\vartheta, \end{cases}$$

d. h. die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\cdot e^{\nu\vartheta i}$ ist mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch.

4. Mit Hülfe dieses Ergebnisses und der Zerlegung:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu e^{\nu\vartheta i} = \sum_1^\infty{}^\nu(\alpha_\nu+\beta_\nu i)(\cos\nu\vartheta + i\cdot\sin\nu\vartheta)$$

$$= \sum_1^\infty{}^\nu(\alpha_\nu\cos\nu\vartheta - \beta_\nu\sin\nu\vartheta) + i\sum_1^\infty{}^\nu(\beta_\nu\cos\nu\vartheta + \alpha_\nu\sin\nu\vartheta)$$

könnte man aus einem von Harnack[1]) bewiesenen Satze erschliessen, dass die Reihe $\sum (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)$, also: $\sum |a_\nu|^2$ convergirt, sobald zu den bereits gemachten Voraussetzungen noch die weitere hinzukommt, dass auch $|f(e^{\vartheta i})|^2$, d. h. $|f(X)|^2$ längs des Einheitskreises, integrabel ist.

Man kann indessen dieses Resultat mit den hier zu Gebote stehenden Hülfsmitteln in etwas einfacherer Weise ableiten, wenn man statt der gleichmässigen Integrabilität von $|f(x)|$ von vornherein diejenige von $|f(x)|^2$ voraussetzt.

Man hat für $\varrho < 1$:

$$(7) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i} = f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}),$$

und wenn

$$\sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu i) \cdot x^\nu = \overline{f(\bar{x})} \quad (|x| < 1)$$

gesetzt wird:

$$(8) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu \cdot e^{-\nu \vartheta i} = \overline{f(\varrho \cdot e^{-\vartheta i})}.$$

Berücksichtigt man, dass:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) \cdot \overline{f(\varrho \cdot e^{-\vartheta i})} = |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2,$$

so ergiebt sich durch Multiplication der Gleichungen (7) und (8):

$$(9) \qquad \begin{aligned} \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) \cdot \varrho^{2\nu} + \sum_1^\infty {}^\nu \sum_1^\infty {}'^\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i)(\alpha_\nu - \beta_\nu i) \varrho^{\mu+\nu} \cdot e^{(\mu-\nu)\cdot \vartheta i} \\ = |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2, \end{aligned}$$

wobei der Accent bei dem Doppelsummen-Zeichen ausdrücken soll, dass die Combination $\mu = \nu$ wegzulassen ist. Da nun:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(\mu-\nu)\cdot \vartheta i} \cdot d\vartheta = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots \mu \gtrless \nu),$$

so folgt aus (9) durch Multiplication mit $d\vartheta$ und Integration in den Grenzen $-\pi$ bis $+\pi$:

---

[1]) Math. Ann. Bd. 19 (1882), p. 255. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, Bd. II, 1 (1885), p. 346.

(10) $$2\pi \cdot \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta.$$

Da ferner, in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $|f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|$:

$$\lim_{\varrho=1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta,$$

so findet man zunächst:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta$$

und, da die betreffende Reihe ausschliesslich positive Glieder enthält, mit Rücksicht auf Nr. 3 des § 1, schliesslich:

(11) $$\sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta,$$

sodass also $\sum |a_\nu|^2$ als convergent erkannt wird.

Es besteht somit der folgende Satz:

Ist die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ zugehörige Function $f(x)$ nebst dem Quadrate ihres absoluten Betrages *in* und *auf* dem Convergenzkreise $|x| = 1$ gleichmässig integrabel,[1]) so convergirt die Reihe $\sum |a_\nu|^2$.

5. Um aus diesem Resultate weitere Schlüsse zu ziehen, formuliren wir zunächst den folgenden Hülfssatz:

---

[1]) Setzt man voraus, dass $|f(x)|$ für $|x| < 1$ durchweg unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus der gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ schon eo ipso diejenige von $|f(x)|$ und $|f(x)|^2$. In diesem Falle kann man auch statt der Integrale die von mir zur Darstellung der Mac Laurin'schen Reihen-Coefficienten angewendeten Mittelwerthe (vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 92; Math. Ann. Bd. 47 (1896), p. 137) einführen und das betreffende Resultat, mit Beibehaltung der im Texte benützten Schlussweise, lediglich mit den Hülfs-Mitteln der elementaren Functionen-Theorie ableiten.

Ist $\sum |a_\nu|^2$ convergent und bedeutet $\sum C_\nu^{-1}$ irgend eine convergente Reihe mit positiven Termen, so convergirt auch die Reihe $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$.[1])

Derselbe ist lediglich eine besondere Form des auf der bekannten Ungleichung:

$$\sqrt{p_\nu \cdot q_\nu} \leqq \tfrac{1}{2}(p_\nu + q_\nu) \quad (p_\nu > 0,\ q_\nu > 0)$$

beruhenden, schon bei anderer Gelegenheit[2]) von mir benützten Satzes, dass aus der Convergenz der beiden Reihen $\sum p_\nu$, $\sum q_\nu$ stets diejenige von $\sum \sqrt{p_\nu \cdot q_\nu}$ resultirt.

Aus dem obigen Hülfssatze folgt dann, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen jede Reihe von der Form $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$, z. B. $\sum \frac{|a_\nu|}{\nu^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$, $\sum \frac{|a_\nu|}{\sqrt{\nu} \cdot \lg \nu}$ etc. convergiren muss.

Angenommen nun, es gehöre zu der Potenzreihe:

$$(12) \qquad \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu\, \nu a_\nu \cdot x^{\nu-1}$$

eine Function $f_1(x)$, welche, ebenso wie $|f_1(x)|^2$, in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel ist, so ergiebt sich aus dem Satze der vorigen Nummer zunächst die Convergenz von $\sum \nu^2 \cdot |a_\nu|^2$ und somit auf Grund des obigen Hülfssatzes diejenige jeder Reihe von der Form $\sum C_\nu^{\frac{1}{2}} \cdot \nu \cdot |a_\nu|$,

z. B. $$\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|, \quad \sum \frac{\sqrt{\nu}}{\lg \nu} \cdot |a_\nu|.$$

Daraus folgt dann a fortiori, dass $\sum |a_\nu|$ convergirt und somit $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem ganzen Einheitskreise absolut convergent ist.

---

[1]) Unrichtig wäre es, mit Harnack (Math. Ann. a. a. O.) aus der Convergenz von $\sum |a_\nu|^2$ auf das Verschwinden von $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot |a_\nu|^2$ schliessen zu wollen (vgl. meine Bemerkungen Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 343 ff.).

[2]) Sitz.-Ber. Bd. 29 (1899), p. 263.

Die der Function $f_1(x)$ auferlegten Bedingungen sind aber sicher erfüllt, wenn die zu $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine Derivirte $f'(x)$ besitzt, welche in der Umgebung[1]) der Peripherie-Stellen X im allgemeinen[2]) stetig ist und deren Quadrat höchstens für eine reductible Menge von Stellen X' von der Ordnung $1 - \varepsilon$ oder doch von einer „hinlänglich“[3]) niedrigeren, als der ersten

$$\left(\text{z. B. wie } \frac{1}{x}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-(1+\varepsilon)} \text{ etc. bei } x = 0\right)$$

unendlich wird. Denn für $|x| < 1$ hat man ohne weiteres $f_1(x) = f'(x)$ und sodann auf Grund der in Nr. 1 getroffenen Festsetzungen: $f_1(X) = \lim\limits_{\varrho=1} f'(\varrho X) = f'(X)$. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

> Besitzt die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine in der Umgebung der Convergenzkreis-Stellen noch im allgemeinen stetige Derivirte, deren *Quadrat* höchstens für eine reductible Menge solcher Stellen von hinlänglich niedrigerer Ordnung als der *ersten* unendlich wird, so ist $\sum a_\nu x^\nu$ noch auf dem Convergenzkreise *absolut convergent.*

6. Dieses Kriterium ist von erheblich grösserer Tragweite, als das bekannte, auf einer gelegentlichen Bemerkung des Herrn Lipschitz[4]) beruhende, welches die ausnahmslose Stetigkeit der ersten und ausserdem noch die eindeutige Existenz und Endlichkeit der zweiten Derivirten fordert.

---

[1]) Diese Bezeichnung ist wiederum nur in dem am Schlusse von Nr. 1 definirten Umfange zu verstehen.

[2]) D. h. mit eventueller Ausnahme einer unausgedehnten Menge, für welche $f'(X)$ endlich-unstetig wird, bezw. nicht existirt, aber in der Umgebung endlich bleibt.

[3]) D. h. in der Weise, dass $|f'(x)|^2$ integrabel bleibt.

[4]) Lehrbuch der Analysis, Bd. II, p. 492. Vgl. auch Math. Ann. Bd. 26 (1886), p. 425.

Die Convergenz-Theorie der Fourier'schen Reihen würde auf Grund der über $f'(x)$ gemachten Voraussetzungen nur den Schluss gestatten,[1] dass $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise noch ausnahmslos convergirt.[2] Daraus folgt aber noch keineswegs die absolute Convergenz dieser Reihe, wie im folgenden Paragraphen noch des näheren erörtert wird.

Das nämliche Resultat würde sich auch aus dem Satze am Schlusse von § 1 (p. 54) ergeben, wenn man berücksichtigt, dass aus der Integral-Darstellung der a_ν (Gl. (6)) durch partielle Integration (welche wegen der über $f'(x)$ gemachten Voraussetzungen gestattet ist) sich ergiebt:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(e^{\vartheta i}) \cdot \sin\nu\vartheta \cdot d\vartheta$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0. —$$

Einen Schluss auf die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ gestattet dagegen ein von Heine[3]) mitgetheilter Satz über die Art des Verschwindens der Fourier'schen Reihen-Coefficienten bei unendlich wachsendem Index. Darnach würde aus der Voraussetzung, dass $f'(e^{\vartheta i})$ nur von niedrigerer Ordnung als der $\frac{1}{2}$-ten unendlich werden darf, folgen, dass $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{2}} \cdot a_\nu = 0$, woraus dann ohne weiteres die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ hervorgeht. Der betreffende Satz gilt indessen nur für den Fall, dass $f'(e^{\vartheta i})$ der Dirichlet'schen Bedingung genügt. Zwar behauptet Heine ausdrücklich seine Gültig-

[1]) S. z. B. Serret-Harnack a. a. O., p. 358. Um das betreffende Resultat anzuwenden, hat man nur zu beachten, dass aus:

$$f(e^{\vartheta i}) = F(\vartheta)$$

sich ergiebt:

$$F'(\vartheta) = i \cdot e^{\vartheta i} \cdot f'(e^{\vartheta i}).$$

[2]) Dabei bliebe übrigens Schlussweise und Resultat noch gültig, wenn $f'(x)$ selbst (nicht erst $f'(x)^2$) in der angegebenen Art unendlich wird.

[3]) Handbuch der Kugelfunctionen, Zweite Auflage, Bd. I, p. 63.

keit auch für den Fall, dass die Function an einzelnen Stellen, wo sie nicht unendlich wird, unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Sein Beweis aber, wenn ich ihn anders richtig verstehe, scheint mir diesen Fall nicht zu umfassen, und ich möchte sogar den Satz selbst alsdann für unrichtig halten. Gerade durch das Auftreten unendlich vieler Maxima und Minima wird die Regelmässigkeit in der Abnahme der Reihencoefficienten im allgemeinen zerstört, und es tritt eben an die Stelle der Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{2}} \cdot a_\nu = 0$ lediglich die Convergenz der Reihe $\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|$ (welche unmittelbar aus der Existenz jener Beziehung folgen würde, aber nicht umgekehrt).

Da alle Schwierigkeiten und Ausnahmefälle in der Theorie der Fourier'schen Reihen von dem eventuellen Vorkommen unendlich vieler Maxima und Minima herrühren, so scheint mir ein wesentlicher Vorzug des oben gegebenen Kriteriums gerade darin zu liegen, dass es in dieser Hinsicht nicht die geringste Einschränkung verlangt.

7. Im übrigen sind die in jenem Satze, bezüglich der Existenz und des Verhaltens von $f'(x)$ für die Stellen X, eingeführten Voraussetzungen sehr weit davon entfernt, für die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ nothwendige zu sein. Dies geht schon daraus hervor, dass dieselben ja nicht nur die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$, sondern sogar diejenige von $\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot a_\nu X^\nu$ nach sich ziehen. Man könnte darnach eine schärfere Form des fraglichen Kriteriums etwa dadurch erzielen, dass man statt der ersten Derivirten eine solche mit ächt gebrochenem Index[1]) in Betracht zieht: für seine praktische Anwendbarkeit würde indessen auf diese Weise kaum etwas gewonnen werden.

Andererseits lehrt ein Blick auf die bekannte Weierstrass'sche Function $\sum a_\nu \cdot x^{b^\nu}$ ($a < 1$, b eine ungerade ganze

[1]) Riemann, Ges. Werke, XIX, p. 332. — Hadamard, Journ. de Math. 4ième Série, T. 8 (1892), p. 154.

Zahl, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$), dass es Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise absolut convergiren, ohne für irgend eine Stelle desselben eine bestimmte Derivirte zu besitzen. Die Natur dieses Beispiels lässt zugleich deutlich erkennen, dass die Existenz eines im allgemeinen endlichen $f'(X)$ durch die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ in keiner Weise präjudicirt wird (ähnlich, wie etwa die Convergenz oder Divergenz von $\sum a_\nu$ über die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ nicht das geringste aussagt). Bedeutet nämlich a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) irgend eine Folge reeller oder complexer Zahlen von der Beschaffenheit, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1$, so besitzt nicht nur die Potenzreihe: $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu X^\nu$, sondern auch jede aus ihr herausgehobene Potenzreihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ den Convergenzradius 1. Die zu $\mathfrak{P}(x)$ gehörige Function $f(x)$ kann dann auf dem Convergenzkreise das denkbar einfachste Verhalten zeigen, nämlich für alle Stellen mit Ausnahme einer einzigen noch regulär sein, gleichgültig ob $\sum |a_\nu|$ convergirt oder divergirt. Andererseits lässt sich die Folge der natürlichen Zahlen m_ν allemal (auf unendlich viele Arten) so auswählen, dass $\sum |a_{m_\nu}|$ (also $\sum a_{m_\nu} X^{m_\nu}$ absolut) convergirt und zugleich der Convergenzkreis eine singuläre Linie für $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ bildet: bei passender Annahme der a_ν und m_ν kann man insbesondere erzielen, dass die zu $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ gehörige Function $\overline{f(x)}$ für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen X kein endliches $\overline{f'(x)}$ besitzt. Mit anderen Worten: Gerade derjenige Process, welcher hier die absolute Convergenz der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ auf dem Convergenzkreise zur Folge hat, nämlich das Herausheben der Theilreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ aus der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, zerstört in diesem Falle die Existenz einer im allgemeinen endlichen und stetigen Derivirten.

Beispiel: Man setze $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $m_\nu = 2^\nu$. Die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot x^{\nu}$$

convergirt für $|x| = 1$ nur noch bedingt, ausser für die Stelle $x = 1$, wo sie eigentlich divergirt; für alle übrigen Stellen verhält sich die zugehörige Function regulär, besitzt also endliche Derivirte jeder Ordnung.

Andererseits convergirt die Reihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{2^{\nu}} \cdot x^{2^{\nu}}$ auf dem Convergenzkreise noch absolut, die zugehörige Function besitzt aber für alle Stellen $X = e^{(\frac{1}{2})^{n} \cdot m\pi i}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots.)$ keine endliche Derivirte, da die Reihe $\overline{\mathfrak{P}'(x)} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} x^{2^{\nu}}$ daselbst eigentlich divergirt und somit

$$\overline{f'(X)} = \lim_{\varrho = 1} \overline{\mathfrak{P}'(\varrho X)} = \infty$$

wird (nach § 1, Nr. 2).

---

§ 3. Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und dennoch nicht absolut convergiren.

1. Ich habe bei früherer Gelegenheit[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass zwar alle bekannteren Potenzreihen, die auf dem Convergenzkreise noch bedingt convergiren, daselbst mindestens eine Divergenzstelle besitzen, dass es nichts destoweniger Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise ebenfalls nur bedingt, aber ausnahmslos convergiren. Nachdem ich a. a. O. einen allgemeinen Typus von Reihencoefficienten a_{ν} mitgetheilt, für welche $\sum a_{\nu} x^{\nu}$ die fragliche Eigenschaft besitzt, habe ich daran die Frage geknüpft, ob sich nicht auch im Einheitskreise analytische, durch geeignete Singularitäten auf der Peripherie charakterisirte Functionen angeben lassen, deren Mac Laurin'sche Entwickelung

---

[1]) Math. Ann. Bd. 25 (1885), p. 419.

auf der Peripherie ausnahmslos und doch nur bedingt convergirt. Diese Frage kann auf Grund derjenigen allgemeinen Betrachtungen, welche ich in einer anderen, oben bereits citirten Arbeit[1]) angestellt habe, und durch Angabe sehr einfacher Beispiele in bejahendem Sinne entschieden werden. Man setze etwa:

$$(1) \qquad f(x) = e^{\frac{x}{x-1}},$$

sodass also:[2])

$$(2) \qquad \begin{gathered} f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu , \\ \text{wo: } a_0 = 1 \text{ und für } \nu > 1 : a_\nu = \sum_{0}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} (\nu - 1)_{\varkappa - 1} . \end{gathered}$$

Die Function ist auf der gesammten Peripherie des Einheitskreises noch regulären Verhaltens mit Ausnahme der Stelle $x = 1$. Hier wird:

$$(3) \qquad f(1) = \lim_{x=1} f(x) = 0,$$

und zwar allemal, wenn x auf einen beliebigen Strahl aus dem Innern der Stelle 1 zustrebt. Andererseits hat man:

$$(4) \qquad f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\tfrac{1}{2} \cot \frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2} \cot \frac{\vartheta}{2}\right) \right\} \qquad (\vartheta \lesseqgtr 0),$$

sodass also $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = 0$ mit unendlich vielen Oscillationen endlich-unstetig wird. Die Fourier'sche Reihe für $f(e^{\vartheta i})$, welche in Folge der Bedingung (3) und des im übrigen durchweg regulären Verhaltens von $f(x)$, mit der Reihe $\sum a_\nu e^{\nu \vartheta i}$ zusammenfällt, ist alsdann für $-\pi \leqq \vartheta < \pi$ ausnahmslos[3])

---

1) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346.

2) A. a. O. p. 355.

3) Vermöge eines sinnentstellenden Druckfehlers heisst es a. a. O., dass die fragliche Reihe für $\vartheta = 0$, also für $x = 1$, divergirt. Dass es sich hierbei wirklich nur um einen Druckfehler handelt, geht daraus hervor, dass ich an anderer Stelle (Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54, Fuss-

convergent. Sie kann indessen keinesfalls absolut convergiren, weil in diesem Falle die dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ ausnahmslos stetig sein müsste. Somit ist die Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise zwar ausnahmslos, jedoch lediglich bedingt convergent. Für $x = 1$ ergiebt sich dabei insbesondere, auf Grund der Beziehung (3) und des Abel-schen Satzes:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = 0. \quad (5)$$ [1]

Dieses Beispiel lässt zugleich deutlich erkennen, durch welche Art von Singularitäten $X' = e^{\vartheta' i}$ die fragliche Convergenz-Erscheinung hervorgebracht wird: es muss $\lim_{x=X'} f(x)$ einen eindeutig bestimmten Werth besitzen, wenn x auf einem beliebigen Strahle von innen her der Stelle X' zustrebt; andererseits muss $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = \vartheta'$ eine Unstetigkeit erleiden, welche immerhin noch die Convergenz der betreffenden Fourier'schen Reihe für $\vartheta = \vartheta'$ bestehen lässt, die aber dann eo ipso deren absolute Convergenz definitiv ausschliesst.[2]

---

note) ausdrücklich die Convergenz dieser Reihe (bezw. der damit gleichartigen:

$$e^{-\frac{1}{x}} = \sum c_\nu (x-1)^\nu \quad \text{für } x = 0)$$

hervorgehoben habe. Die Convergenz für $\vartheta = 0$ folgt im übrigen aus den von Du Bois Reymond angestellten Untersuchungen über Fourier'sche Reihen (Abh. der Bayer. Akad. II. Cl. Bd. XII², p. 37. 44), etwas einfacher aus § 4, Nr. 4 dieses Aufsatzes. — Wie ich inzwischen bemerkt habe, hat Herr Saalschütz die Coefficienten der Reihe: $e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ zum Gegenstande einer sehr ausführlichen Untersuchung gemacht (Archiv der Math. und Phys. (2), Bd. 6 (1888), p. 305—350) und hierbei auch einen (mir freilich nicht ganz einwurfsfrei erscheinenden), auf asymptotischer Integration einer für die Coefficienten a_ν bestehenden Recursionsformel beruhenden Beweis für die Convergenz von $\sum a_\nu$ mitgetheilt.

[1]) Uebereinstimmend mit dem von Herrn Saalschütz (a.a.O. p. 334) durch asymptotische Betrachtungen berechneten Resultate.

[2]) Vgl. auch § 4, Nr. 6.

2. Die von mir früher mitgetheilten, am Anfange dieses Paragraphen erwähnten Potenzreihen (mit ausnahmslos bedingter Convergenz für $|x| = 1$) sind von der Form:

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \tag{6}$$

wo ε_ν in bestimmter Abwechselung die Werthe ± 1 besitzt, während die M_ν eine monoton in's Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen vorstellen, von der Beschaffenheit, dass zwar:

$$M_\nu > \nu \tag{7}$$

ist, dagegen $\sum \frac{1}{M_\nu}$ divergirt $\left(\text{z. B. } M_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}\right)$. Ich will nun zeigen, dass man, bei etwas anders gewählter Anordnung jener Glieder-Vorzeichen ε_ν, Reihen von analogem Verhalten gewinnen kann, bei welchen die monotone Zunahme der M_ν nur in dem Maasse erforderlich ist, dass $\sum \frac{1}{M_\nu^2}$ convergirt, sodass also im wesentlichen[1]) nur

$$M_\nu > \sqrt{\nu}$$

zu sein braucht. Abgesehen davon, dass die in diesem Falle zulässige Wahl $M_\nu = \nu$ ein besonders einfaches Beispiel einer Reihe von der fraglichen Beschaffenheit giebt, so scheint mir das betreffende Resultat aus dem Grunde besonders lehrreich, weil es eine bemerkenswerthe Ergänzung zu dem Satze in Nr. 4 des vorigen Paragraphen liefern wird.

Ich setze, wie in Gl. (6):

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}, \tag{8}$$

---

[1]) Genauer gesagt:

$$M_\nu \gtrsim \sqrt{\nu} \cdot m_\nu,$$

wo m_ν nur so in's Unendliche zu wachsen braucht, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ convergirt (cf. Gl. (20)).

(dabei soll $[\sqrt{\nu}]$ die grösste in $\sqrt{\nu}$ enthaltene ganze Zahl bedeuten), und will darauf ausgehen, die schwächste monotone Zunahme der M_ν zu bestimmen, bei welcher die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| = 1$ noch ausnahmslos convergirt.

Damit dies zunächst an der Stelle $x = 1$ stattfinde, also $\sum a_\nu$ convergire, ist nach p. 46, Gl. (19) jedenfalls nothwendig, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{M_1 a_1 + M_2 a_2 + \ldots + M_n a_n}{M_n} = 0$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{M_n} = 0, \quad \text{wo:} \ \sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n. \tag{9}$$

Die aus bestimmten Gruppen positiver und negativer Einheiten bestehende Summe σ_n nimmt bei successive wachsendem n unter anderen Werthen eine Reihe von Minimal- bezw. Maximal-Werthen an, welche allemal dann auftreten, wenn ε_n das Schlussglied einer Gruppe negativer bezw. positiver Einheiten bildet. Da $\varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}$ und $[\sqrt{\nu}]$ jedesmal um 1 zunimmt, wenn ν gerade eine Quadratzahl m^2 erreicht, wobei dann also ε_ν das Vorzeichen wechselt, so sind jene Minimal- und Maximalwerthe von σ_n charakterisirt durch die Bedingung $n = m^2 - 1$; und zwar ist das betreffende Schlussglied ε_n ein negatives bezw. positives, der entsprechende Werth von σ_n also ein Minimum bezw. Maximum, je nachdem n gerade oder ungerade. Man hat nun für $n = (2\mu + 1)^2 - 1 = 4\mu^2 + 4\mu$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{4\mu^2+4\mu} &= \sum_1^3{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_4^8{}^\nu |\varepsilon_\nu| + \sum_9^{15}{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_{16}^{24}{}^\nu |\varepsilon_\nu| + \ldots \\
&\quad \ldots + \sum_{(2\mu-1)^2}^{(2\mu)^2-1}{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_{(2\mu)^2}^{(2\mu+1)^2-1}{}^\nu |\varepsilon_\nu| \\
&= (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu - 1) - (4\mu + 1) \\
&= -2\mu, \qquad (10)
\end{aligned}$$

und für $n = (2\mu)^2 - 1 = 4\mu^2 - 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{4\mu^2-1} &= (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu - 1) \\
&= 2\mu + 1. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass:

(12) $$\lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2+4\mu}}{\sqrt{4\mu^2+4\mu}} = -1, \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2-1}}{\sqrt{4\mu^2-1}},$$

und da die Folge der $\sigma_{4\mu^2+4\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$) offenbar den unteren, die Folge der $\sigma_{4\mu^2-1}$ den oberen Limes von σ_n definirt, schliesslich:

(13) $$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = -1, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = +1.$$

Daraus folgt aber, dass die nothwendige Bedingung (9) für die Convergenz von $\sum a_\nu$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn:

(14) $$M_\nu > \sqrt{\nu},$$

sodass man also setzen kann:

(15) $$M_\nu = \sqrt{\nu} \cdot m_\nu, \quad \text{wo: } \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Man hat nun mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\sum_1^n{}' a_\nu = \sum_1^n{}' \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} = \sum_1^{n-1}{}' \sigma_\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + \frac{\sigma_n}{M_n}$$

$$= \sum_1^{n-1}{}' \frac{\sigma_\nu}{M_\nu} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + \frac{\sigma_n}{M_n},$$

und daher, mit Berücksichtigung von Gl. (15) und (13):

$$\sum_1^\infty{}' a_\nu = \sum_1^\infty{}' \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} \cdot \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}.$$

Daraus folgt, dass $\sum a_\nu$ gleichzeitig mit der rechts stehenden Reihe, also wegen: $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} = 1$, gleichzeitig mit der Reihe

$$\sum \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}$$

convergirt.

Man hat nun:

$$\frac{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}-\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}=\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\vartheta_\nu}{2\nu}\right)\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\vartheta'_\nu\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}\quad \left(\text{wo: } \lim_{\nu=\infty}\vartheta_\nu=1,\ \lim_{\nu=\infty}\vartheta'_\nu=1\right)$$

$$(16)\qquad =\frac{1}{\vartheta'_\nu}\cdot\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}+\frac{\vartheta_\nu}{2\vartheta'_\nu}\cdot\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}.$$

Da $\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$ das allgemeine Glied einer convergenten Reihe bildet, sofern nur überhaupt m_ν mit ν monoton (wenn auch beliebig langsam) in's Unendliche wächst,[1]) so wird die fragliche Reihe dann und nur dann convergiren, wenn $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt. Darnach ergiebt sich also zunächst:

Für die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$, wo: $a_\nu=(-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ ist *nothwendig*, dass $\lim_{\nu=\infty} m_\nu=\infty$, *hinreichend*, dass die m_ν monoton zunehmen und $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt.

3. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass alsdann gleichzeitig mit $\sum a_\nu$ auch $\sum a_\nu X^\nu$ für jedes von 1 verschiedene X mit dem absoluten Betrage $|X|=1$ convergirt. Man hat nämlich:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})(X+X^2+\ldots+X^\nu)+a_n(X+X^2+\ldots+X^n),$$

also für jedes von 1 verschiedene X:

$$(17)\qquad \sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\frac{X}{1-X}\cdot\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})\cdot(1-X^\nu)+a_n\cdot\frac{X(1-X^n)}{1-X}$$

1) Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 327.

und, wegen $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim_{n=\infty}} |1 - X^n| \leq 2$:

$$(18) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu = \frac{X}{1-X} \sum_1^\infty {}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot (1 - X^\nu).$$

Da für (jedes X und ν): $|1 - X^\nu| \leq 2$, so convergirt die rechts stehende Reihe sicher, wenn $\sum |a_\nu - a_{\nu+1}|$ convergent ist. Da je zwei auf einander folgende Terme a_ν, $a_{\nu+1}$ gleiches Vorzeichen haben, ausser wenn:

$$\nu = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda + 2), \quad \nu + 1 = (\lambda + 1)^2 \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so findet man:

$$\sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty {}^{\nu\prime} \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + \sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} + \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}}\right),$$

wo der Accent an dem ersten Summenzeichen der rechten Seite andeuten soll, dass die Werthe: $\nu = \lambda(\lambda + 2)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ auszuschliessen sind: an die Stelle der betreffenden Glieder treten die in der zweiten Summe vereinigten. Setzt man diese letztere in die Form:

$$\sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} - \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}}\right) + 2 \sum_1^\infty {}^\lambda \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

und fügt die Glieder der ersten Summe noch zu denjenigen der Summe $\sum'$, so wird:

$$(19) \quad \sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty {}^\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + 2 \sum_1^\infty {}^\lambda \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

sodass sich unmittelbar die Convergenz von $\sum |a_\nu - a_{\nu+1}|$ ergiebt, wenn man noch beachtet, dass nach Gl. (15):

$$M_{(\lambda+1)^2} = (\lambda + 1) \cdot m_{(\lambda+1)^2}$$

und sodann, wegen $m_{(\lambda+1)^2} > m_{\lambda+1}$:

$$M_{(\lambda+1)^2} > (\lambda + 1) \cdot m_{\lambda+1} > \lambda \cdot m_\lambda,$$

also $\sum \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} < \sum \frac{1}{\lambda \cdot m_\lambda}$ d. h. convergent ist.

Man findet somit schliesslich:

Die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu$, wo: $a_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ ist für $|X| = 1$ ausnahmslos convergent, wenn die m_ν monoton in dem Maasse zunehmen, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ *convergirt.* Sie convergirt also nur *bedingt,* wenn andererseits die m_ν so angenommen werden, dass $\sum \frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ *divergirt.* Man setze z. B.:

$$(20)\quad m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon,\ m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon},\ m_\nu = \lg \nu \cdot (\lg_2 \nu)^{1+\varepsilon}, \text{ etc. } (\varepsilon > 0).$$ [1]

4. Da mit der Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ a fortiori auch $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu^2}$ convergirt und $|a_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$, so folgt zunächst, dass bei den Reihen $\sum a_\nu x^\nu$ der betrachteten Art stets $\sum |a_\nu|^2$ convergent ist. Andererseits können aber die m_ν so langsam zunehmen (z. B. $m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon}$), dass keine niedrigere Potenz, als das Quadrat der $|a_\nu|$ eine convergente Reihe liefert. Mithin erhält man das folgende Resultat:

---

[1] Ein besonders einfaches, für Vorlesungszwecke geeignetes Beispiel resultirt, wie bereits oben bemerkt wurde, für:

$$m_\nu = \sqrt{\nu}, \text{ also: } M_\nu = \nu.$$

Die Gleichung (19) nimmt in diesem Falle die Form an:

$$\sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} + 2\sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(\lambda+1)^2},$$

welche ohne weiteres die Convergenz der betreffenden Reihe erkennen lässt. Andererseits ergiebt sich die Convergenz von $\sum a_\nu$ hier unmittelbar aus der (durch einfache Rechnung leicht zu verificirenden) Bemerkung, dass die positiven und negativen Glieder sich zu Gruppen alternirenden Vorzeichens vereinigen lassen, deren Zahlenwerthe monoton gegen Null abnehmen.

Es giebt Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ mit dem Convergenzradius 1, welche für $|x| = 1$ noch ausnahmslos *bedingt* convergiren, während $k = 2$ der *kleinste* Exponent ist, für welchen $\sum |a_\nu|^k$ (also $\sum a_\nu^k X^\nu$ *absolut*) convergirt.

Die zur Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ besitzt hier für jede einzelne Stelle X der Peripherie einen bestimmten endlichen Werth (nämlich den Werth $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu$). Da ferner die aus Gl. (17) durch Substitution von x für X resultirende Beziehung:

$$\sum_1^n {}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{x}{1-x} \sum_1^{n-1} {}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1})(1 - x^\nu) + a_n x \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

erkennen lässt, dass die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmässig convergirt im Innern und auf der Begrenzung desjenigen Bereiches, welcher entsteht, wenn man aus der Fläche des Einheitskreises eine beliebig kleine Umgebung der Stelle 1 ausscheidet, so folgt weiter, dass $f(x)$ nicht nur längs der gesammten Peripherie mit eventuellem Ausschlusse der Stelle 1, sondern in der Umgebung jeder von 1 verschiedenen Stelle X vollkommen stetig ist. In der Nähe der Stelle $x = 1$ kann dagegen $\sum a_\nu x^\nu$ (und speciell auch $\sum a_\nu X^\nu$) ungleichmässig convergiren (ich vermuthe, dass dies auch wirklich der Fall sein dürfte, obschon es mir andererseits bisher nicht gelungen ist, einen vollständigen Beweis dafür zu erbringen). In Folge dessen braucht auch $|f(x)|$, wiewohl für jede einzelne Stelle x (incl. X) einen bestimmten endlichen Werth besitzend, in der Umgebung der Stelle $x = 1$ nicht unter einer festen Grenze zu bleiben. Für das etwaige Anwachsen von $|f(x)|$ in der Nähe der Stelle 1 lässt sich leicht eine obere Grenze angeben. Da nämlich:

$$\left| \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu \cdot (\varrho X)^\nu \right| \leq \sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu| \cdot \varrho^\nu \quad \text{d. h.} < \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\varrho^\nu}{\sqrt{\nu \cdot m_\nu}} = F(\varrho),$$

so kann der Werth von $|f(x)|$ für $x = \varrho \cdot e^{\vartheta i}$ niemals denjenigen von $F(\varrho)$ übersteigen. Dabei wird $F(\varrho)$ für $\lim \varrho = 1$ schwächer unendlich als $(1-\varrho)^{\frac{1}{2}}$, ja sogar um so viel schwächer, dass nicht nur $F(\varrho)$, sondern auch $F(\varrho)^2$ für $\varrho < 1$ integrabel bleibt.[1]) Hieraus kann nun zwar die Integrabilität von $|f(x)|^2$ auf jedem in den Punkt 1 von Innen her einmündenden Strahle erschlossen werden: ob aber diese Eigenschaft auch längs der Peripherie erhalten bleibt, ist auf diesem Wege nicht ohne weiteres zu erkennen.[2]) Es kann dies indessen aus der hier a priori feststehenden (absoluten) Convergenz der Reihe $\sum a_\nu^2$ durch Umkehrung der in § 2, Nr. 4 benützten Schlussweise gefolgert werden.

Hiernach genügt also $f(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ den sämmtlichen für die Gültigkeit des Satzes § 2, Nr. 4 geforderten Bedingungen und sogar noch den weiteren, für jede Stelle X einen endlichen Werth zu besitzen und, mit eventueller Ausnahme der einzigen Stelle $X = 1$, auch vollkommen stetig zu bleiben. Trotzdem giebt es, bei geeigneter Auswahl von m_ν, keinen Exponenten $k < 2$, derart dass $\sum |a_\nu|^k$ convergirt. Man kann darnach sagen, dass der fragliche Satz das äusserste leistet, was aus den ihm zu Grunde liegenden Voraussetzungen gefolgert werden kann.

---

[1]) Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt unmittelbar aus p. 49, Fussnote; die der zweiten aus einem ähnlichen, den Zusammenhang zwischen der Abnahme (bezw. Zunahme) der $|a_\nu|$ und dem Unendlichwerden von $\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho_\nu$ noch genauer präcisirenden Satze, den ich bei späterer Gelegenheit mittheilen werde.

[2]) Die gleichmässige Integrabilität von $f(x)$ selbst steht wegen der absoluten Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot a_\nu X^{\nu+1} = \int_0^X f(x)\,dx$ von vornherein ausser Frage.

§ 4. Zusammenhang zwischen dem reellen und imaginären Theile der Randfunction.

1. Man hat, mit Beibehaltung der bisher angewendeten Bezeichnungen:

$$(1) \qquad f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\, \varrho^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i} \text{ für } \varrho < 1,$$

und daher, wenn:

$$(2) \qquad f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \varphi(\varrho, \vartheta) + i \cdot \psi(\varrho, \vartheta)$$

gesetzt wird:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta) \cdot \varrho^\nu, \\ \psi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos \nu\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\vartheta) \cdot \varrho^\nu, \end{aligned} \right. \qquad (\varrho < 1).$$

Für die Randwerthe $e^{\vartheta i}$ ergiebt sich sodann:

$$(4) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta),$$

wenn $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$ definirt werden durch die Beziehungen:

$$(5) \qquad \varphi(\vartheta) = \lim_{\varrho=1} \varphi(\varrho, \vartheta), \quad \psi(\vartheta) = \lim_{\varrho=1} \psi(\varrho, \vartheta).$$

Es werde nun angenommen, dass $f(x)$ diejenigen (in § 2, Nr. 3 näher erörterten) Integrabilitäts-Eigenschaften besitzt, welche das Zusammenfallen von $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot e^{\nu \vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ zur Folge haben. Alsdann wird nach Gl. (6), p. 60:

$$\alpha_\nu + \beta_\nu i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta,$$

also:

$$
(6)\quad \begin{cases} \alpha_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta, \\ \beta_\nu = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta, \end{cases}
$$

und:

$$
(7)\qquad \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.
$$

Wenn die Reihe $\sum \alpha_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle $x = e^{\vartheta i}$ convergirt, so müssen die beiden Reihen:

$$
(8)\qquad \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \quad \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)
$$

gleichzeitig convergiren — vice versa; und man hat sodann nach dem Abel'schen Satze:[1])

$$
(9)\quad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_1^n{}^\nu (\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \\ \psi(\vartheta) = \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_1^n{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta). \end{cases}
$$

Zur Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz dieser Reihen können dann zunächst die bekannten Kriterien aus der Theorie der Fourier'schen Reihen dienen, wobei also in der Reihe für $\varphi(\vartheta)$ die Coefficienten α_ν, β_ν als Functionen von $\varphi(\vartheta)$ erscheinen, und als Convergenz-Bedingungen gewisse Stetigkeits-Eigenschaften von $\varphi(\vartheta)$ resultiren (entsprechend sodann für $\psi(\vartheta)$). Da sich aber α_ν, β_ν nach Gl. (6) auch als Functionen von $\psi(\vartheta)$ darstellen lassen, so ergiebt sich hier auch noch die folgende, gänzlich ausserhalb der gewöhnlichen Theorie

[1]) Der Vollständigkeit halber bemerke ich, dass, wie ein Blick auf die Gleichungen (3) und (5) lehrt, das entsprechende Theilresultat auch erhalten bleibt, wenn nur eine der beiden fraglichen Reihen convergirt. Und man hat nach § 1, Nr. 2 auch: $\varphi(\vartheta) = \pm\infty$ bezw. $\psi(\vartheta) = \pm\infty$, wenn die betreffende Reihe eigentlich divergirt.

der Fourier'schen Reihen liegende Fragestellung: Welche Stetigkeits-Eigenschaften von $\psi(\vartheta)$ sind erforderlich oder hinreichend, damit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ bei einem bestimmten Werthe ϑ überhaupt convergire?[1]) Die hierauf zu erzielende Antwort gilt dann in Folge der zwischen $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität (s. Gl. (9) und (6)) mutatis mutandis auch bezüglich der Convergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$.[2])

2. Setzt man:

$$(10) \qquad \sum_1^n{}^{\nu} (a_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta) = \varphi_n(\vartheta),$$

so handelt es sich also um die Untersuchung von $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(\vartheta)$ unter der Voraussetzung, dass für a_ν, β_ν der zweite der in Gl. (6) angegebenen Integral-Ausdrücke eingesetzt wird. Man erhält auf diese Weise zunächst:

$$(11) \qquad \varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \sin \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta,$$

und da:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \sin \nu\lambda = \frac{\cos \frac{1}{2}\lambda - \cos(n+\frac{1}{2})\lambda}{2 \sin \frac{1}{2}\lambda}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cot\frac{\lambda}{2} - \cos n\lambda \cdot \cot\frac{\lambda}{2} + \sin n\lambda\right)$$

so wird:

$$(12) \quad 2\pi \cdot \varphi_n(\vartheta) = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \cot\frac{\eta - \vartheta}{2} \cdot (1 - \cos n(\eta - \vartheta)) \cdot d\eta + \Delta_n,$$

wo:

---

[1]) Dass ihre Summe alsdann stets den Werth $\varphi(\vartheta)$ hat, folgt wieder unmittelbar aus dem Abel'schen Satze (s. auch die vorige Fussnote).

[2]) Eine ähnliche Untersuchung des Herrn Tauber (Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 2 (1891), p. 79—118) beruht theilweise auf anderen Voraussetzungen und verfolgt im wesentlichen andere Ziele.

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sin n(\eta - \vartheta) \\ &= \pi(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{aligned}\right.$$

also:

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

$$(15)\qquad J_n(\vartheta) = \int_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta + a') \cdot \cot\frac{a'}{2} \cdot (1 - \cos n a') \cdot da',$$

so folgt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da \\ &= \int_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

$$J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta), \tag{17}$$

wo:

$$J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da, \tag{18}$$

$$J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da, \tag{19}$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

$$\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da, \tag{20}$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

$$\lim_{n=\infty} \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos na \cdot da = 0 \tag{21}$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim\limits_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \varDelta_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\sin n(\eta-\vartheta) \\ &= \pi(\alpha_n\cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{aligned}\right.$$

also:

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \varDelta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

$$(15)\qquad J_n(\vartheta) = \int_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a)\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos n\,a)\cdot d\,a,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta+a)\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos n\,a)\cdot d\,a \\ &= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta+a')\cdot\cot\frac{a'}{2}\cdot(1-\cos n\,a')\cdot d\,a', \end{aligned}$$

so folgt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta+a)\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos n\,a)\cdot d\,a \\ &= \int_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos n a)\cdot d a. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

(17) $$J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

(18) $$J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1-\cos na) \cdot da,$$

(19) $$J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1-\cos na) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

(20) $$\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

(21) $$\lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos na \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta_n = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sin n(\eta - \vartheta) \\ \quad = \pi(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{cases}$$

also:

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

$$(15)\qquad J_n(\vartheta) = \int\limits_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int\limits_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da$$
$$= \int\limits_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta + a') \cdot \cot\frac{a'}{2} \cdot (1 - \cos n a') \cdot da',$$

so folgt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da \\ &= \int\limits_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

(17) $$J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

(18) $$J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1-\cos n a) \cdot da,$$

(19) $$J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1-\cos n a) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

(20) $$\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

(21) $$\lim_{n=\infty} \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos n a \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim\limits_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da\,, \\ \cdot \\ \displaystyle\lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot\cos n a\cdot da\,, \end{cases}$$

einzeln genommen die eben angegebene Eigenschaft besitzen. In diesem Falle geht dann Gl. (20) in die folgende über:

$$(23)\quad \lim_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \int_0^{\pi} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da\,.$$

Dabei lässt sich noch das Integral $J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, wie auch jedes der Theil-Integrale (22), durch ein etwas einfacheres ersetzen. Da nämlich die identische Umformung besteht:

$$(24)\quad J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos n a)\cdot da$$

$$+\int_0^{\varepsilon}\{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}(1-\cos n a)\left(\cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\cdot da\,,$$

und da:

$$(25)\quad \cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a} = \frac{a\cdot\cos\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}}{a\cdot\sin\frac{a}{2}} = -\frac{a}{6}-\ldots.$$

für $a=0$ verschwindet, so wird das letzte Integral in Gl. (24) gleichzeitig mit ε beliebig klein, und zwar unabhängig von n, insbesondere also auch für $\lim n=\infty$. Hiernach wird also $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ allemal dann gleichzeitig mit ε gegen Null convergiren, wenn:

$$(26)\quad \lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon}\frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos n a)\cdot da$$

diese Eigenschaft besitzt, und das analoge gilt für die beiden Theil-Integrale (22).

Bemerkt man schliesslich noch, dass aus Gl. (12) die eigentliche Divergenz von $\sum(a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ resultirt, falls $\lim\limits_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \pm\infty$ ist,[1]) so kann man das Ergebniss dieser Untersuchung in folgender Weise zusammenfassen:

Es ist:

$$(27)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da,$$

sobald dieser Grenzwerth *existirt;* d. h. die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta\sin\nu\vartheta)$$

ist *convergent* oder *eigentlich divergent,* je nachdem der obige Grenzwerth *endlich* oder *unendlich gross* ausfällt. Als nothwendig und hinreichend für die *Convergenz* ergiebt sich, dass:

$$(A)\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot(1-\cos na)\cdot da$$

gleichzeitig mit ε gegen Null convergirt. Besitzen schon die beiden Bestandtheile dieses Ausdruckes, nämlich:

$$(B)\quad \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot da$$

$$(C)\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot\cos na\cdot da$$

---

[1]) Hierfür ist wiederum hinreichend, wenn der Grenzwerth (26) für irgend ein $\varepsilon > 0$ unendlich gross ausfällt.

diese Eigenschaft, so reducirt sich zugleich die Beziehung (27) auf die folgende:

$$(28)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da.^{1)}$$

3. Vergleicht man die Darstellungs-Formel (27) mit der gewöhnlichen (Dirichlet'schen) Summationsformel:

$$(29)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \{\varphi(\vartheta+a)+\varphi(\vartheta-a)\}\frac{\sin n a}{a}\cdot da,$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\varphi(\vartheta+0)+\varphi(\vartheta-0)\} + \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon F(a)\cdot\frac{\sin na}{a}\cdot da,$$

wo:

$$F(a) = \{\varphi(\vartheta+a)-\varphi(\vartheta+0)\} + \{\varphi(\vartheta-a)-\varphi(\vartheta-0)\},$$

so ergeben sich die folgenden fundamentalen Unterschiede:

1) Der Werth des Grenz-Ausdruckes (29) hängt lediglich von den Functionswerthen $\varphi(\vartheta)$ in unmittelbarer Nähe der betrachteten Stelle ϑ ab, derjenige des Ausdruckes (27) von der Gesammtheit der Werthe, welche $\psi(\vartheta)$ für $-\pi \leqq \vartheta < +\pi$ annimmt.

2) Die Convergenz von (29) basirt auf dem Verhalten der Summe $\varphi(\vartheta+a)+\varphi(\vartheta-a)$, diejenige von (27) bezw. (A) auf dem Verhalten der Differenz $\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)$ in unmittelbarer Nähe der fraglichen Stelle ϑ.

3) Von den beiden für die Beschaffenheit der Grenz-Ausdrücke (29) und (27) bezw. (A) charakteristischen Integralen:

---

1) Herr Tauber beweist die Gültigkeit von Gl. (28) auch unter der Voraussetzung, dass nur das Integral (B) der angegebenen Bedingung genügt und dass an die Stelle der auf (C) bezüglichen Bedingung die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta) = \sum(\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)$ tritt (a. a. O. p. 87).

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin n a}{a} d a, \quad \int_0^\varepsilon \frac{1 - \cos n a}{a} \cdot d a$$

ist das erstere bei $\lim n = \infty$ convergent, das zweite dagegen divergent.

Nach alledem kommt die Convergenz des Ausdruckes (29) zu Stande, wenn $\varphi(\vartheta)$ sowohl rechts, als links von der betrachteten Stelle ϑ gewisse Stetigkeits-Eigenschaften besitzt, während dieselbe durch das Vorhandensein eines Sprunges zwischen $\varphi(\vartheta + 0)$ und $\varphi(\vartheta - 0)$ nicht alterirt wird. Dagegen würde das Auftreten eines Sprunges zwischen $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ die Convergenz des Grenzwerthes (27) bezw. (A) definitiv ausschliessen,[1] während dieselbe allemal dann zu Stande kommt, wenn $\psi(\vartheta)$ zu beiden Seiten der Stelle ϑ sich symmetrisch oder doch nahezu symmetrisch verhält, mögen dabei die Werthe von $\psi(\vartheta \pm a)$ bei unbegrenzt abnehmendem a auch über alle Grenzen wachsen oder unendlich viele Oscillationen mit beliebig grosser Amplitude aufweisen.

Eine hinreichende Bedingung für die Convergenz des Integrals (C) bildet offenbar diejenige des Integrals:

$$\text{(D)} \qquad \int_0^\varepsilon \left| \frac{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)}{a} \right| \cdot d a,$$

also die absolute Integrabilität von $\frac{1}{a}\{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\}$ in der Umgebung von $a = 0$. Dieselbe zieht dann, wegen $|\cos n a| \leq 1$, sofort auch die Convergenz des Grenzwerthes (C) und somit schliesslich diejenige der Reihe für $\varphi(\vartheta)$, sowie die Gültigkeit der Beziehung (28) nach sich. Setzt man für den gerade betrachteten Werth ϑ:

$$(30) \qquad \psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a) = \Delta(a),$$

so mag $\Delta(a)$ als das mittlere Stetigkeitsmaass von $\psi(\vartheta)$

[1]) Näheres s. Nr. 6 dieses Paragraphen.

für jene Stelle ϑ bezeichnet werden. Die Convergenz des Integrals (D) ist dann gesichert, wenn bei $\lim \alpha = +0$:

$$(31)\qquad |\varDelta(\alpha)| \underset{\infty}{<} \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \lg_2 \cdot \frac{1}{\alpha} \ldots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0),$$

da in diesem Falle

$$\left|\frac{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)}{\alpha}\right| \underset{\infty}{<} \frac{d}{d\alpha}\left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho},$$

also in der Umgebung von $\alpha = 0$ integrabel ausfällt. Dabei darf eventuell $\varDelta(\alpha)$ im Intervalle $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ noch unendlich oft das Vorzeichen wechseln. Findet dies wirklich statt, so ist die Convergenz des Integrals (D) und somit auch die Bedingung (31) sehr weit davon entfernt, eine für die Convergenz des Integrals (B), (C) und somit für diejenige der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nothwendige Bedingung zu liefern. Setzt man z. B. $\psi(\vartheta) = \sin \frac{1}{\vartheta}$, so nimmt das Integral (B) für $\vartheta = 0$ die Form an:

$$(32)\qquad 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\alpha} \cdot d\alpha \quad \left(= 2\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot d\alpha\right),$$

ist also convergent, während $\varDelta(\alpha) = 2 \sin \frac{1}{\alpha}$ in diesem Falle überhaupt nicht mit α verschwindet, sondern mit unendlich vielen Zeichenwechseln um Null oscillirt. Ja es convergirt hier sogar auch der Grenzwerth (C), d. h.:

$$(33)\qquad \lim_{n=\infty} 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\alpha} \cdot \cos n\alpha \cdot d\alpha,$$

also schliesslich die Reihe $\varphi(0)$, d. h. die Reihe für $\cos \frac{1}{\vartheta}$ an der Stelle $\vartheta = 0$. Dies kann zwar aus den bereits oben[1]) citirten allgemeinen Untersuchungen Du Bois Reymond's gefolgert werden. Da es indessen bei der complicirten Be-

---

[1]) p. 70, Fussnote.

schaffenheit derselben ziemlich schwierig und zeitraubend ist, in die betreffenden Entwickelungen genügende Einsicht zu erlangen, so mag es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, den Weg anzugeben, auf welchem das fragliche Resultat direkt abgeleitet werden kann.

4. Man schreibe in dem Integrale (33) m^2 statt n und bringe dasselbe sodann auf die Form:

$$(34)\quad \begin{aligned} &2\int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a}\cos m^2 a\cdot\frac{da}{a} \\ &= \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a}-\int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a}. \end{aligned}$$

Substituirt man in dem ersten der beiden rechts stehenden Integrale:

$$m^2 a+\frac{1}{a}=2\beta,$$

so folgt zunächst:

$$a=\frac{1}{m^2}(\beta\pm\sqrt{\beta^2-m^2}),\quad \frac{da}{d\beta}=\frac{1}{m^2}\left(1\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\right)=\pm\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}.$$

Da $\beta=+\infty$ für $a=+0$ und β mit wachsendem a zunächst abnimmt, bis es bei $a=\frac{1}{m}$ den Minimalwerth $\beta=m$ erreicht, so hat man zu setzen

$$\text{für } 0<a<\frac{1}{m}:\quad a=\frac{1}{m^2}(\beta-\sqrt{\beta^2-m^2}),\quad da=-\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta,$$

$$\text{für } \frac{1}{m}\leq a\leq\varepsilon:\quad a=\frac{1}{m^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-m^2}),\quad da=\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta,$$

sodass also:

$$(35)\quad \begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a} \\ &= \int_m^\infty \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta+\int_m^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta. \end{aligned}$$

Da für $\beta = m$ der Nenner nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so wird die Convergenz der Integrale hierdurch nicht alterirt. Man hat zunächst:

$$\left| \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{p^2 - m^2}} \cdot d\beta \right| < \int_m^{m+p} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} = \lg \frac{m + p + \sqrt{2pm + p^2}}{m}$$

also:

$$\lim_{m=\infty} \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta = 0, \tag{36}$$

wenn p eine feste endliche (oder auch schwächer als m in's Unendliche wachsende) Zahl bedeutet. Die restirenden Integrale:

$$\int_{m+p}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta, \qquad \int_{m+p}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta \tag{37}$$

können durch Zerlegung des Integrations-Intervalles in Theil-Intervalle von der Form $[k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi]$, $[(k + \frac{1}{2})\pi, (k + 1)\pi]$ in eine unendliche bezw. endliche Reihe von numerisch beständig abnehmenden Termen mit alternirendem Vorzeichen umgeformt werden. Da es freisteht p und ε so zu wählen, dass $m + p$, $\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ganze Multipla von π sind, so ist die Summe einer jeden dieser Reihen **kleiner** als das Anfangsglied:

$$\int_{m+p}^{m+p+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}}\, d\beta \quad (\text{wo } m + p = k\pi), \text{ d. h. } < \frac{1}{\sqrt{2pm + p^2}},$$

sodass die betreffenden Grenzwerthe für $\lim m = \infty$ verschwinden. Durch Zusammenfassung dieses Resultates mit Gl. (36) ergiebt sich also:

$$\lim_{m=\infty} \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} = 0. \tag{38}$$

Noch etwas einfacher gestaltet sich der entsprechende Beweis für das letzte Integral der Gleichung (34). Die Substitution:

$$m^2 \alpha - \frac{1}{\alpha} = 2\beta$$

liefert zunächst:

$$\alpha = \frac{1}{m^2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + m^2}\right), \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{m^2}\left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\right) = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}.$$

Da aber $\beta = -\infty$ für $\alpha = +0$ und sodann β mit wachsendem α beständig zunimmt, so entfällt hier die Zerlegung des betreffenden Integrations-Intervalles in zwei Theile, und zwar hat man zu setzen:

$$\alpha = \frac{1}{m^2}(\beta + \sqrt{\beta^2 + m^2}), \quad d\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta$$

also:

$$(39) \qquad \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2 \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\, d\beta = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta$$

(da allgemein: $\int_{-A}^{+A} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta = 0$) und, wenn man schliesslich noch $-\beta$ statt β als Integrations-Variable einführt:

$$(40) \qquad \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2 \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha} = - \int_{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta,$$

ein Integral, dessen Verschwinden für $\lim m = \infty$ sich in derselben Weise ergiebt, wie für das erste der Integrale (37). Somit findet man schliesslich, wie behauptet (Gl. (33)):

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a}\cdot\cos n a\cdot\frac{d a}{a}=0.$$

Ich bemerke hierzu noch, dass das Verschwinden von

$$(41)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a}\cdot\sin n a\cdot\frac{d a}{a},\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \cos\frac{1}{a}\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n a\cdot\frac{d a}{a}$$

in analoger Weise bewiesen werden kann. .Und da die Integrale:

$$(42)\qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right)\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n a\cdot\frac{d a}{a},\quad \int_0^\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right)\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n a\cdot\frac{d a}{a}$$

(wegen: $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\cot\frac{a}{1}\cong\frac{a}{12}$, s. Gl. (25)) offenbar das analoge Verhalten zeigen, so ergiebt sich (durch jede der beiden Formeln (27) und (29)) die Convergenz der in § 3, Nr. 1 betrachteten Reihe:

$$(43)\qquad f(e^{\vartheta i})=e^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right)-i\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right)\right\}$$

für $\vartheta=0$, d. h. der Mac Laurin'schen Entwickelung von $e^{\frac{x}{x-1}}$ an der Stelle $x=1$.

5. Erleidet $\Delta(a)$ (Gl. (30)) in der Umgebung der betrachteten Stelle ϑ nicht unendlich viele Zeichenwechsel,[1]) so wird bei hinlänglicher Verkleinerung von a durchweg $\Delta(a)=|\Delta(a)|$ oder $=-|\Delta(a)|$, und die Bedingung der absoluten Integrabilität von $\frac{1}{a}\cdot\Delta(a)$ ist dann keine andere als die der einfachen Integrabilität. Auch in diesem Falle ist die Bedingung (31) keine nothwendige für die Convergenz der Integrale (B), (C), aber sie nähert sich bei unbegrenzter Vergrösserung

[1]) Damit ist keineswegs ausgeschlossen, dass $\varphi(\vartheta)$ in der fraglichen Umgebung noch unendlich viele Maxima und Minima besitzen kann.

von $\varkappa$ und Verkleinerung von ϱ dem Charakter einer nothwendigen Bedingung in dem Sinne, dass im Falle:

$$(44)\qquad |\Delta(a)| \gtrless \left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdot \lg_2 \frac{1}{a} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{a}\right)^{-1} = \lambda_\varkappa(a),$$

nicht nur jedes der Integrale (B) und (C), sondern auch der Grenzwerth (A) und somit schliesslich die Reihe $\varphi(\vartheta)$ eigentlich divergirt.

Um dies nachzuweisen, werde also angenommen, dass für $0 < a \leq \varepsilon$:

$$(45)\qquad \Delta(a) > g \cdot \lambda_\varkappa(a) \quad \text{bezw.} \quad < -g \cdot \lambda_\varkappa(a)$$

(wobei ε von vornherein so klein anzunehmen ist, dass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}$ und somit auch $\lambda_\varkappa(a)$ positiv ausfällt). Alsdann hat man behufs Abschätzung des Grenzwerthes (A) zunächst:

$$(46)\qquad \left|\int_0^\varepsilon \frac{\Delta(a)}{a} \cdot (1 - \cos na) \cdot da\right| > g \cdot \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} (1 - \cos na) \cdot da,$$

und, wenn n von vornherein so gross angenommen wird, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$:

$$(47)\qquad \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot (1 - \cos na) \cdot da = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot (1 - \cos na) \cdot da$$
$$+ \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot da - \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot \cos na \cdot da$$
$$= N_1 + N_2 - N_3.$$

Dabei ergiebt sich unmittelbar:

$$(48)\qquad N_2 = \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{da}{a \cdot \lg_1 \frac{1}{a} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{a}} = -\left[\lg_{\varkappa+1} \frac{1}{a}\right]_{\frac{1}{n}}^\varepsilon = \lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Die Integrale N_1 und N_3 nehmen durch Einführung von $\frac{a}{n}$ an Stelle von a die folgende Form an:

$$(49)\quad N_1 = \int_0^1 \lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)\cdot\frac{1-\cos a}{a}\,d\,a,\quad N_3 = \int_1^{n\varepsilon} \frac{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}{a}\cdot\cos a\cdot d\,a.$$

Da $\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ für $a = 0$ verschwindet und gleichzeitig mit a monoton zunimmt, so hat man:

$$N_1 < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\cdot d\,a < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)$$

d. h.

$$(50)\qquad N_1 = \frac{\vartheta}{\lg_1 n\ldots\lg_\varkappa n},\quad \text{wo } 0 < \vartheta < 1,$$

sodass also N_1 für $\lim n = \infty$ verschwindet.

Um zur Abschätzung von N_3 den zweiten Mittelwerthsatz anzuwenden, soll zunächst gezeigt werden, dass $\frac{1}{a}\cdot\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ für $1 \leqq a \leqq n\varepsilon$ monoton, nämlich beständig abnehmend, verläuft. Man hat:

$$\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)} = a\cdot\lg_1\left(\frac{n}{a}\right)\cdot\lg_2\left(\frac{n}{a}\right)\ldots\lg_\varkappa\left(\frac{n}{a}\right),$$

und daher:

$$(51)\quad \begin{aligned} D_a\left(\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}\right) &= \lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\left\{1 - \frac{a\cdot D_a\left(\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\right)}{\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}}\right\} \\ &= \lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\left\{1 - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}} - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}\cdot\lg_2\frac{n}{a}} - \ldots - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}}\right\}. \end{aligned}$$

Da im Integrale N_3 (Gl. (49)):

$$1 \leq a \leq n\varepsilon, \text{ also: } \frac{1}{\varepsilon} < \frac{n}{a} < n,$$

so ist $\frac{1}{\varepsilon}$ der **kleinste** Werth, den das Argument $\frac{n}{a}$ bei der Integration annimmt. Man kann nun ε von vornherein klein genug fixiren, sodass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon} > 1$, also um so mehr für jedes in Betracht kommende a: $\lg_\varkappa \frac{n}{a} > 1$. Alsdann wird aber:

$$\lg_{\varkappa-1} \frac{n}{a} > e, \quad \lg_{\varkappa-2} \frac{n}{a} > e^e, \text{ u. s. f.},$$

sodass als Summe der in (51) auftretenden k **negativen** Glieder ein durch Wahl von ε beliebig klein zu machender ächter Bruch resultirt. Hiernach hat man aber für das fragliche Integrations-Intervall:

$$D_a\left(\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}\right) > 0, \tag{52}$$

d. h. $\dfrac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}$ nimmt daselbst **beständig zu**, also $\frac{1}{a} \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ **beständig ab**. Und man findet somit auf Grund des zweiten Mittelwerth-Satzes:

$$(53) \quad \begin{aligned} N_3 &= \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \int_1^{\xi} \cos a \cdot da + \frac{1}{n\varepsilon} \lambda_\varkappa(\varepsilon) \int_{\xi}^{n\varepsilon} \cos a \cdot da \\ &= 2\left(\pm \vartheta' \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \pm \frac{\vartheta''}{n\varepsilon} \cdot \lambda_\varkappa(\varepsilon)\right), \quad \text{wo: } 0 < \begin{Bmatrix} \vartheta' \\ \vartheta'' \end{Bmatrix} < 1, \end{aligned}$$

d. h. auch N_3 verschwindet für $\lim n = \infty$.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (48), (50), (53) geht dann schliesslich Gl. (47) in die folgende über:

$$
(54) \qquad \begin{aligned}
&\int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} \cdot (1 - \cos n\alpha) \cdot d\alpha \\
&= \lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}} + (\vartheta \mp 2\vartheta')\, \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \mp 2\vartheta'' \cdot \frac{\lambda_\varkappa(\varepsilon)}{n\varepsilon},
\end{aligned}
$$

sodass also dieses Integral für $\lim n = \infty$ so unendlich wird, wie $\lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}}$. Aus Ungl. (46) folgt sodann, dass der absolute Werth des zu untersuchenden Integrals d. h. des Grenzwerthes (26) bezw. (A), also auch[1]) derjenige des Grenzwerthes (27) mindestens in derselben Weise unendlich wird und somit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle eigentlich divergirt. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

Die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}_\nu \,(\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)$$

ist *eigentlich divergent*, wenn $\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)$ für $\alpha < \varepsilon$ constantes Vorzeichen besitzt und für $\lim \alpha = 0$ nicht stärker gegen Null convergirt, als $\left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \lg_2 \frac{1}{\alpha} \ldots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ bei beliebig grossem k.

6. Hieraus ergiebt sich aber insbesondere, dass die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an jeder Stelle ϑ eigentlich divergiren muss, in deren Umgebung die Differenz $\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)$ über einer positiven oder unter einer negativen Zahl bleibt. Dies wird allemal dann der Fall sein, wenn $\psi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle einen gewöhnlichen Sprung[2]) erleidet, d. h. wenn $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ beide existiren und von

[1]) s. p. 80, Fussnote.

[2]) Nach Dini's Bezeichnung eine Unstetigkeit erster Art. Vgl. Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, p. 29.

einander verschieden sind; aber auch dann, wenn nur $\underline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta + \alpha) > \overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta - \alpha)$ oder $\overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta + \alpha) < \underline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta - \alpha)$.[1]) Bezeichnet man jede derartige Unstetigkeit als einen Sprung schlechthin, so kann man also sagen, dass $\varphi(\vartheta)$ allemal eigentlich divergirt, wenn $\psi(\vartheta)$ einen Sprung erleidet. Und da offenbar analog das Auftreten eines Sprunges bei $\varphi(\vartheta)$ die eigentliche Divergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$ nach sich zieht, so ergiebt sich der folgende Satz:

> Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit absolut und beim Uebergange zur Convergenzkreis-Peripherie im allgemeinen gleichmässig integrabler Randfunction $f(e^{\vartheta i})$ ist *eigentlich divergent* an allen Sprungstellen von $f(e^{\vartheta i})$.

Bezeichnet man andererseits als sprunglose Unstetigkeiten solche, bei denen

$$\underline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta + \alpha) < \overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta - \alpha), \quad \overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta + \alpha) > \underline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta - \alpha)$$

und $\psi(\vartheta)$ in der Nähe der betreffenden Stelle alle zwischen jenen Limites enthaltenen Werthe durchläuft, (wie $\sin \frac{1}{\vartheta}$ bei $\vartheta = 0$), so zeigt das Beispiel der Potenzreihe für $e^{\frac{x}{x-1}}$ (s. den Schluss von Nr. 4 dieses Paragraphen), dass deren Vorkommen die Convergenz der Potenzreihe an der betreffenden Stelle nicht ausschliesst.

Man gelangt also auf Grund dieser Betrachtungen zu dem folgenden, wie mir scheint, neuen und nicht unwichtigen End-Ergebnisse:

> Eine für irgend ein zusammenhängendes Bogenstück ihres Convergenzkreises *convergirende* Potenzreihe unterscheidet sich, als eine aus *zwei*

---

[1]) Beispiel:

$$\psi(\vartheta) = \lim_{n=\infty} \frac{1-\vartheta^n}{1+\vartheta^n} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{1}{\vartheta - 1}\right)$$

für $\vartheta = 1$.

von einander *abhängigen Fourier*'schen Reihen zusammengesetzte Reihe, in sofern wesentlich von einer *gewöhnlichen Fourier'schen* Reihe, als ihre Summe *niemals Sprünge* erleiden kann. Dagegen ist das Auftreten sprungloser Unstetigkeiten keineswegs ausgeschlossen.

In Folge dieses letzteren Umstandes, muss also jeder Versuch,[1] aus der blossen Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Convergenzkreise die Gleichmässigkeit dieser Convergenz oder auch nur die Stetigkeit der Reihensumme erschliessen zu wollen, von vornherein aussichtslos erscheinen.

In wieweit dagegen umgekehrt aus der Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ geschlossen werden könne (NB. allemal unter Voraussetzung der Identität von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$) — diese Frage erscheint vorläufig noch als eine offene. Denn wenn auch aus den Untersuchungen Du Bois Reymond's[2]) hervorgeht, dass es Functionen $\psi(\vartheta)$ giebt, deren Fourier'sche Entwickelung $\sum(b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta)$ an einer Stetigkeitsstelle $\vartheta = \vartheta'$ divergirt, so bleibt doch immerhin fraglich, ob nun auch das zugehörige $\varphi(\vartheta) = \sum(a_\nu \cos \nu\vartheta - b_\nu \sin \nu\vartheta)$ für $\vartheta = \vartheta'$ ebenfalls stetig ausfällt. Hiernach erscheint es zum mindesten nicht ausgeschlossen, dass die Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$, d. h. die gleichzeitige Stetigkeit von $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$, stets die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ zur Folge habe. Eine hinreichende Bedingung für diese letztere ergiebt sich im Anschlusse an die Bedingung (31), p. 88, wenn man beachtet, dass:

$$(55)\quad \Delta(\alpha) = \{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta)\} - \{\psi(\vartheta - \alpha) - \psi(\vartheta)\},$$

und dass im Falle der Stetigkeit von $\psi(\vartheta)$, wegen: $\psi(\vartheta \pm 0) = \psi(\vartheta)$, die Bedingung:

$$(56)\quad |\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \lesssim \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0)$$

---

[1]) Vgl. Zeitschr. f. Math. 20 (1875), p. 370; desgl. 29 (1884), p. 128.

[2]) Vgl. p. 70, Fussnote.

einerseits die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta)$, andererseits mit Rücksicht auf Gl. (55) die Existenz der Beziehung (31) und somit auch die Convergenz der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nach sich zieht. In Folge der zwischen $\psi(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität gewinnt man also noch den folgenden Satz:

> Die Reihe $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ *convergirt* an jeder Stelle ϑ, für welche der reelle *oder* imaginäre Theil von $f(e^{\vartheta i})$ *stetig* ist und ein der Bedingung (56) genügendes (rechtes und linkes) *Stetigkeitsmaass* besitzt.

7. Die Relation (28), p. 86, nämlich:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

kann zuweilen mit Vortheil sowohl als Summationsformel, als auch zur Auswerthung gewisser bestimmter Integrale angewendet werden. Dabei ist aber zu beachten, dass sie in der obigen Form nur dann gilt, wenn $\psi(\vartheta)$ über das Intervall $(-\pi, +\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt wird (vgl. p. 86 den Uebergang von Gl. (15) zu Gl. (16)). Wird dagegen $\psi(\vartheta)$ durch einen arithmetischen Ausdruck dargestellt, welcher an sich eine nicht-periodische Fortsetzung besitzt, so hat man die obige Formel durch die folgende, aus Gl. (12), (14), (15) hervorgehende, ohne die betreffende Verschiebung des Integrations-Intervalls zu ersetzen:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da. \tag{57}$$

Um ein einfaches Beispiel zu geben, werde etwa gesetzt:

$$\psi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} \quad \text{d. h.} = \frac{\vartheta}{2} \quad \text{für} \quad -\pi < \vartheta < +\pi.$$

Alsdann wird:

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu},$$

und daher mit Benützung von Gl. (57):

$$\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} (\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

(da: $\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \vartheta \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da = \vartheta \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cot\frac{a}{2} \cdot da = 0$). Ferner hat man:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da = \int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} (a - 2\pi) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

$$= -4\pi \cdot \left[\lg\sin\frac{a}{2}\right]_{\pi-\vartheta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

also:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu} = \lg\cos\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da.$$

Daraus ergiebt sich für $\vartheta = 0$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \lg 2$$

(wie Legendre[1]) auf anderem Wege gefunden hat) und somit schliesslich:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu} = \lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right).$$

---

[1]) Exercices sur le calcul intégral, T. II, p. 200.