Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Bemerkungen über die Principien der Mechanik.

Von A. Voss in Würzburg.

(Eingelaufen 4. Mai.)

I.

Ueber die energetische Begründung der Mechanik.

Bei der ausserordentlichen Wichtigkeit des Energieprincipes für alle Fragen der physikalischen Mechanik kann es nicht Wunder nehmen, dass man versucht hat, aus demselben auch die Grundlagen der theoretischen Mechanik selbst herzuleiten. Bei allen diesen Versuchen wird es sich darum handeln, das D'Alembert'sche Princip oder irgend eine demselben äquivalente Form der Bewegungsgleichungen aus dem Energieprincip zu gewinnen.

Für diejenige Auffassung der Mechanik, welche nur von den Coordinaten der Puncte abhängige conservative Kräfte kennt, dagegen von Bedingungen völlig absieht, wie sie z. B. Boussinesq[1]) in seinen Leçons entwickelt, hat dies keine Schwierigkeit. Aus der Gleichung

$$E = T + V = C,$$

wo V die nur von den Coordinaten x, y, z abhängige potentielle, T die kinetische Energie ist, erhält man durch Differentiation nach der Zeit t

[1]) J. Boussinesq, Recherches sur les principes de la mécanique, Journ. de Math. (2) 18, p. 315, 1873; Leçons synthétiques de mécanique générale, Paris 1889, p. 23.

$$1)\quad \Sigma\, m(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' + \frac{\partial V}{\partial z}z'\right) = 0.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass die mit den Massen multiplicirten Beschleunigungen völlig unabhängig sind von den Geschwindigkeiten und der Constanten C, so folgt aus 1)

$$m\, x_i'' + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad m\, y_i'' + \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0, \quad m\, z_i'' + \frac{\partial V}{\partial z_i} = 0.$$

Dieser Schluss lässt sich aber schon dann nicht mehr anwenden, wenn Bedingungen zwischen den Coordinaten angenommen werden, da in diesem Falle die $m\,x''$ etc. thatsächlich von den Geschwindigkeiten abhängig werden.[1])

Herr Helm[2]) suchte daher den Variationsprocess zu Hülfe zu nehmen und gab dem Grundprincip der Energetik die Form: die Aenderung der Energie $E = T + V$ nach jeder möglichen Richtung ist gleich Null. Jedenfalls wird man dabei aber verlangen müssen, dass der Begriff dieser Aenderung in Bezug auf beide Theile der Energie in übereinstimmender Weise eingeführt wird. Wird nun E nach irgend einer Richtung variirt, so hat man an Stelle von x, y, z Grössen $x + \varepsilon\,\xi$, $y + \varepsilon\,\eta$, $z + \varepsilon\,\zeta$ zu setzen, wo ξ, η, ζ willkürliche Functionen von t, und ε eine gegen Null convergirende Constante ist; unter der Variation δA eines Ausdruckes A ist dann der Coefficient von ε in der Entwickelung von A nach Potenzen der ε zu verstehen.

Dabei ist in der That

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

aber für δT findet man den Werth

---

[1]) Siehe die Bemerkung von R. Lipschitz zu Helmholtz' Erhaltung der Kraft, Ostwald's Klassiker-Bibliothek Nr. 1, p. 55, desgl. L. Boltzmann, Ein Wort der Mathematik an die Energetik, Wiedem. Ann. 57, p. 39, 1896.

[2]) Vgl. namentlich G. Helm, die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwickelung, Leipzig 1898, p. 220 ff.

$$\delta T = \frac{d}{dt} \sum m (x' \xi + y' \eta + z' \zeta) - \sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

und dieser Ausdruck ist keineswegs gleich

$$\sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

was erforderlich ist, wenn man die Identität dieses Principes mit dem d'Alembert'schen behaupten will. Da die über die Ableitung der Bewegungsgleichungen zwischen Boltzmann und Helm entstandene Discussion zu keinem völlig abschliessenden Ergebniss geführt hat,[1]) ist es doch vielleicht nicht überflüssig, diese einfachen Verhältnisse hier ausführlich auseinanderzusetzen, um so mehr als Herr Helm in seiner Energetik mit besonderem Nachdrucke seine Auffassung aufs neue hervorgehoben hat, und dieselbe seitdem auch von andern angenommen ist.[2])

Auf das von den Herren Planck[3]) und Boltzmann in ähnlicher Absicht ausgesprochene Princip der Superposition der Energie glaube ich hier nicht weiter eingehen zu sollen; dasselbe ist in der That nichts anderes als eine willkürlich gewählte Vorstellung, durch die die Identität mit dem d'Alembert'schen Princip erzwungen wird. Dagegen hat Herr Schütz,[4]) um den Helm'schen Variationsprocess zu vermeiden, ein Princip der absoluten Energieerhaltung aufgestellt. Dasselbe leistet allerdings für einen materiellen Punct das

1) Vgl. G. Helm, Zur Energetik, Wiedemanns Ann. 57, p. 646; L. Boltzmann ibid. 58, p. 595, (1896).

2) Vgl. P. Gruner, die neueren Ansichten über Materie und Energie, Mitth. d. naturf. Ges. zu Bern, 1897.

3) M. Planck, das Princip der Erhaltung der Energie, Leipz. 1887, p. 148; L. Boltzmann, Wiedem. Ann. 57, p. 39 ff. Vgl. auch die Mittheilung von C. Neumann in Helm's Energetik, p. 229.

4) J. Schütz, das Princip der absoluten Erhaltung der Energie, Gött. Nachr. 1897, p. 110. Eine von Herrn E. Padova ausgeführte Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Energiesatze (Sulle equazioni della dinamica, Atti Ist. Veneto (7), 5, p. 1641 (1893)) ist mir hinsichtlich der in derselben gemachten Voraussetzungen nicht recht verständlich geworden.

gewünschte, lässt aber keine Erweiterung auf ein System zu und dürfte auch an und für sich mit der Vorstellung von der Relativität aller Bewegungszustände unvereinbar sein.

Durch einen allgemeineren Variationsprocess kann man indessen die vorhin bemerkte Unrichtigkeit beseitigen. Variirt man nämlich neben den Coordinaten x, y, z auch die Zeit, so dass x, y, z, t in $x + \varepsilon\,\xi$, $y + \varepsilon\,\eta$, $z + \varepsilon\,\zeta$, $t + \varepsilon\,\tau$ übergehen, wo ξ, η, ζ, τ willkürliche Functionen von t sind, so wird x' übergehen in

$$\frac{x' + \varepsilon\,\xi'}{1 + \varepsilon\,\tau'} = x' + \varepsilon\,(\xi' - \tau' x') + \ldots$$

und hieraus ergiebt sich

$$\delta(T+V) = \sum\left(\frac{\partial V}{\partial x} + m x''\right)\xi + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + m y''\right)\eta + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + m z''\right)\zeta$$

$$+ \frac{d}{dt}\sum m(x'\xi + y'\eta + z'\zeta) - 2\sum m(\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'') - 2\tau' T.$$

Nunmehr steht es frei, τ' so zu wählen, dass die rechte Seite sich auf die d'Alembert'sche Formel reducirt, und dies ist auch immer möglich, da T nicht verschwindet. Auf diesem Wege wird daher der gewünschte Erfolg erreicht; man wird aber in einer so willkürlichen Darstellung kaum etwas anderes als einen abstracten Formalismus erkennen können. Da auch das Ostwald'sche Princip des Maximums des Energieumsatzes nur für den Fall relativer Ruhe benutzt werden kann, dagegen im allgemeinen durch eine ganz andere Betrachtung ersetzt werden muss,[1]) so scheinen die bisher gemachten Versuche nicht die Möglichkeit zu einer ungezwungenen Ableitung des Princips von d'Alembert oder von Gauss aus dem Energiesatze zu bieten.

---

[1]) Vgl. A. Voss, Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik, diese Sitzungsber. 1901, p. 53.

II.

Ueber das Hamilton'sche Princip.

Es ist in Nr. 1 darauf hingewiesen, dass man durch einen so verallgemeinerten Variationsprocess jede beliebige Relation für die variirten Grössen hervorrufen kann. Solche allgemeine Variationen sind es, welche Herr Hölder[1]) benutzt hat, um die Principe von Hamilton und Maupertuis als völlig äquivalent mit dem d'Alembert'schen Princip nachzuweisen. Diese Auffassung lässt sich aber durch den folgenden Satz noch in weit allgemeinerer Form aussprechen.

Unter Voraussetzung eines geeigneten Variationsprocesses ist vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung die Variation des Integrals

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U)\, dt$$

wo α, β zwei im allgemeinen völlig willkürliche Constanten sind, gleich Null, und umgekehrt führt die Forderung, dass δJ in Rücksicht auf alle zulässigen virtuellen Verschiebungen verschwinde, auf die Differentialgleichungen der Bewegung.[2])

Gewöhnlich fügt man noch die Bedingung hinzu, dass die Variationen der Coordinaten $x\, y\, z$ für die Grenzen des Integrals verschwinden sollen. Im Interesse einer mechanischen Deutung kann dies allerdings liegen; an sich aber ist diese weitere Bedingung im allgemeinen überflüssig und unwesentlich.

Dabei möge zunächst unter δU die virtuelle Arbeit der Kräfte $x\, y\, z$ bei der den ξ, η, ζ entsprechenden Verschiebung verstanden, also

---

[1]) O. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis, Gött. Nachrichten 1896, Heft 2.

[2]) Selbstverständlich kann man an Stelle der Function unter dem Integralzeichen auch jede beliebige Function der $x, y, z; x', y', z'$ nehmen; die lineare Function von U und T führt aber auf die für mechanische Gesichtspuncte wesentlichen Formen.

$$\delta U = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

gesetzt werden.

Um nun das Integral[1])

$$I' = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)\, dt$$

zu variiren, kann man dasselbe durch die Substitution[2])

$$t = ku + k_0$$

wo

$$k = \frac{t_1 - t_0}{1 - t_0}, \quad k_0 = t_0 \frac{1 - t_1}{1 - t_0}$$

auf das Integral zwischen constanten Grenzen 0 und 1

$$I' = \int_0^1 F\left(x, \frac{dx}{k\,du}, ku + k_0\right) k\,du$$

zurückführen. Lässt man dann x, y, z, u übergehen in $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, $u + \varepsilon v$, so ist kv die willkürliche Function, welche in Nr. 1 mit τ bezeichnet wurde; zugleich wird $\frac{dx}{k\,du}$ übergehen in

$$x' + \varepsilon \frac{((\xi') - (x')(v'))}{k} + \ldots\,^{3})$$

Man erhält daher

$$\delta I' = \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial x'}\left(\frac{(\xi') - (x')(v')}{k}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} kv + F(v')\right] k\,du,$$

was vermöge der Identitäten

---

[1]) Alle Differentialquotienten nach t sind der Kürze halber durch Striche bezeichnet, so dass $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d\,x^2}{dt^2}$ ist.

[2]) Ist $t_0 = 1$, so vertausche man t_1 mit t_0, oder setze

$$t = u(1 - t_1) + t_1.$$

[3]) Die eingeklammerten ξ', x', v' bedeuten hier die Differentialquotienten nach u.

$$\frac{(\xi')}{k} = \frac{d\,\xi}{k\,d\,u} = \frac{d\,\xi}{d\,t} = \xi'$$

$$\frac{(x')}{k} = \frac{d\,x}{k\,d\,u} = x'$$

$$(v') = \frac{d\,v}{d\,u} = \frac{k\,d\,v}{k\,d\,u} = \frac{d\,\tau}{d\,t} = \tau'$$

wieder übergeht in

$$\text{A)} \qquad \delta\,I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\,F}{\partial\,x}\,\xi + \frac{\partial\,F}{\partial\,x'}(\xi' - x'\,\tau') + \frac{\partial\,F}{\partial\,t}\,\tau + F\,\tau'\right] d\,t.$$

Selbstverständlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus dem Begriffe der Variation entnehmen;[1]) in Rücksicht auf die Missverständnisse, denen die Vorstellung der Variation bei der Benutzung des δ Zeichens ausgesetzt ist, scheint mir die obige wenn auch umständliche Betrachtung für ganz elementare Zwecke nicht unzweckmässig zu sein. Wird die Formel A) durch die partielle Integrationsmethode in bekannter Weise ausgeführt, so entsteht die gebräuchliche Formel:[2])

$$\delta\,I = \left|\frac{\partial F}{\partial x'}(\xi - x'\,\tau) + F\,\tau\right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{d\,t}\frac{\partial F}{\partial x'}\right)(\xi - \tau\,x')\,dt.$$

Ich betrachte nun das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha\,T + \beta\,U)\,d\,t$$

und setze zur Abkürzung

$$V = \sum (X\,\xi + Y\,\eta + Z\,\zeta)$$

d. h. gleich der virtuellen Arbeit der gegebenen Kräfte,

$$S = \sum m\,(x'\,\xi + y'\,\eta + z'\,\zeta)$$

d. h. gleich dem virtuellen Moment der Bewegungsgrössen

---

[1]) So Hölder a. a. O. § 2, Anmerk.

[2]) In dieser Gestalt wird sie z. B. bei Routh vorausgesetzt, Dynamik starrer Körper, übers. von A. Schepp, Bd. 2, p. 327.

$$W = \sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

d. h. gleich dem virtuellen Moment der mit den Massen multiplicirten Beschleunigungen. Alsdann ergiebt sich

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T) \tau' + \alpha S' - \alpha W + \beta V] \, dt$$

oder

I) $$\delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T) \tau' + (\beta - \alpha) W + \alpha S'] \, dt.$$

II) $$\delta J = \alpha \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T) \tau' + (\beta - \alpha) V + \alpha S'] \, dt.$$

Wählt man daher die willkürliche Function τ so, dass der zweite Integraltheil in den Formeln I), II) verschwindet, so wird

$$\delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$

$$\delta J = \alpha \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$

d. h. die Forderung $\delta J = 0$ wird vollständig äquivalent mit dem d'Alembert'schen Princip. Je nach der Wahl der Constanten α, β ergeben sich nun verschiedene besondere Formen des allgemeinen Variationsprincipes.

Erstens. Setzt man $\alpha = \beta$, so erfordert die Bedingung nach I)

$$(U - T) \tau' + S' = 0$$

d. h., wenn der Theil S' wie gewöhnlich durch Integration beseitigt, und die Variationen der x, y, z an den Grenzen gleich Null genommen werden, $\tau = \text{const}$ resp. $= 0$.[1]) Ist insbeson-

[1]) Durch die Verfügung über die Variationen an den Grenzen wird hier erreicht, dass das Princip ausnahmslos, d. h. auch dann anwendbar bleibt, wenn $U - T$ innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet.

dere $U - T = \text{const} = h$, so kann man auch $\tau h + S = 0$ setzen. Dies ist das Hamilton'sche Princip.

Zweitens. Wird $\beta = 0$ genommen und setzt man jetzt nach II)

$$T\tau' + V + S' = 0,$$

so hat man die erweiterte Form des Princips der kleinsten Action;[1]) da T nicht Null ist, so ist diese Bestimmungsweise für τ immer möglich, was hier besonders hervorgehoben sein möge.

Drittens. Nimmt man dagegen $\alpha = 0$, so ist nach I) zu setzen

$$U\tau' + W = 0,$$

wobei eine etwaige Verfügung über die Variationen an den Grenzen zu weiterer Vereinfachung ganz überflüssig wird; doch muss hier vorausgesetzt werden, dass U innerhalb der Grenzen des Integrales nicht verschwindet.[2]) Unter diesen Umständen führt also auch der Ausdruck

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} U\,dt = 0$$

auf die Differentialgleichungen der Bewegung.

Viertens. Endlich erhält man für $\beta = -\alpha$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E\,dt = 0$$

mit der Bedingung $(T + U)\tau' + 2V - S' = 0$.

Nur in den beiden ersten Fällen entsteht eine allgemein brauchbare Form des Principes. In den beiden letzten sowie auch im allgemeinen Falle wird schon das Auftreten des symbolischen Ausdruckes U hinderlich, selbst wenn man davon

---

[1]) So bei Hölder a. a. O. § 2.

[2]) Eine ähnliche Voraussetzung wird natürlich immer eintreten müssen, wenn man (vgl. Anmerkung 2 S. 171) unter dem Integralzeichen eine beliebige Function nimmt; beim Princip der kleinsten Action und dem Hamilton'schen Princip ist sie von selbst erfüllt.

absieht, dass $\alpha T - \beta U$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwinden darf, was bei beliebigen Werthen der α, β allerdings unmöglich ist. Man kann indess bei einem so allgemeinen Variationsbegriff den symbolischen Ausdruck U völlig vermeiden.

Variirt man nämlich den Ausdruck

$$A = \int_{t_0}^{t} \Sigma (X x' + Y y' + Z z')\, d t,$$

welcher die totale Arbeit darstellt, die von t_0 bis zur variabelen Zeit t von den wirkenden Kräften geleistet wurde, nach der Formel A), so ergiebt sich

$$\text{B)} \qquad \delta A = V - V_0 + \int_{t_0}^{t} \Sigma (Z)\, d t,$$

wo

$$\begin{aligned} Z = & \left[y' \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) + z' \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) - \frac{\partial X}{\partial t} \right] (\xi - \tau x') \\ & + \left[z' \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + x' \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \frac{\partial Y}{\partial t} \right] (\eta - \tau y') \\ & + \left[x' \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + y' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) - \frac{\partial Z}{\partial t} \right] (\zeta - \tau z') \end{aligned}$$

ist, und man hat sich nur vorzustellen, dass die willkürliche Function τ derjenigen Bedingung unterworfen wird, welche entsteht, wenn an Stelle der früheren Gleichung $\delta U = V$ die nicht symbolische B) bei der Variation des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A)\, d t$$

benutzt wird.

Berücksichtigt man, dass das d'Alembert'sche Princip in den Formen

$$\delta \int (T + A)\, d t = 0, \quad \delta \int T\, d t = 0, \quad \delta \int U\, d t = 0, \quad \delta \int E\, d t$$
$$\delta \int (\alpha T + \beta A)\, d t = 0$$

ausgesprochen werden kann, so erweist sich dieses Variationsprincip in seiner allgemeinen Form als eine völlig conventionelle Regel, die mit besonderen dem eigentlichen Gebiet mechanischer Grundanschauungen angehörigen Vorstellungen gar nichts mehr zu thun hat, sondern einzig und allein zu dem Zwecke ersonnen wird, die Differentialgleichungen der Bewegung in einer möglichst condensirten Form auszusprechen. Ich halte es nicht für überflüssig, diese an sich sehr selbstverständliche Bemerkung, welche ich schon bei einer früheren Gelegenheit gemacht habe,[1]) hier aufs neue zu wiederholen, da über die principielle Auffassung des Hamilton'schen Princips auch gegenwärtig noch sehr verschiedenartige Ansichten verbreitet erscheinen. Vom abstracten Standpuncte aus könnte man sich sogar veranlasst sehen, der besonderen Form des Principes, welches das Energieintegral $\int E\,dt$ benutzt, den Vorzug zu geben. Indessen scheint es zweifellos, dass das eigentliche Hamilton'sche Integral sich durch Einfachheit und allgemeine Gültigkeit zugleich empfiehlt; daher ist dasselbe auch von v. Helmholtz bei allen seinen Untersuchungen (unter dem Namen des Principes der kleinsten Wirkung) als heuristisches Grundprincip zur Anwendung gebracht.

III.

Ueber das Princip des kleinsten Zwanges.

Bezeichnet man die Coordinaten der Puncte eines materiellen Systems unterschiedslos durch x_i[2]), so ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i x_i'^2.$$

Werden nun an Stelle der x_i ebensoviel neue Variabele y_i, welche von einander unabhängige Functionen der x_i sind, die überdies die Zeit t enthalten können, eingeführt, so ist nach Voraussetzung die Functionaldeterminante

---

[1]) A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. Bd. 25, p. 267 (1884).

[2]) Ueber die Bezeichnung siehe H. Hertz, Ges. Werke III, p. 62.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

nicht Null, also verschwindet auch

$$m_1 \ldots m_n \Delta^2 = A$$

nicht, wo A die aus den Elementen[1])

1) $$a_{s\sigma} = \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma}$$

gebildete Determinante der definiten positiven quadratischen Form

$$\sum a_{s\sigma} u_s u_\sigma = \sum m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_s} u_s\right)^2$$

ist. Bezeichnet man mit $A_{s\sigma}$ die durch A dividirten Unterdeterminanten dieser Elemente 1), so ist

$$\sum A_{s\tau} a_{s\sigma} = (\sigma\,\tau),$$

falls $(\sigma\,\tau)$ das bekannte Zeichen bedeutet. Da aber auch

$$\sum \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = (\sigma\,\tau)$$

ist, so folgt

$$\sum \left(A_{s\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} m_i - \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = 0$$

oder, wegen $\Delta \neq 0$ [2])

2) $$\sum A_{s\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} m_i = \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i}.$$

---

[1]) In allen Fällen, wo über die Summation nichts weiter bemerkt ist, hat sich dieselbe über sämmtliche mehrfach vorkommende Indices s, σ, τ.. von 1 bis $3\,n$ zu erstrecken.

[2]) In Formel 2) ist die Summation in Bezug auf i selbstverständlich nicht auszuführen.

Setzt man nun die Gleichungen

$$x_i' = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

in den Ausdruck T ein, so folgt

$$T = \tfrac{1}{2} \sum a_{s\sigma} y_s' y_\sigma' + \sum a_s y_s' + a$$

wenn

$$3) \qquad \begin{cases} a_s = \sum m_i \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \\ a \;= \tfrac{1}{2} \sum m_i \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 \end{cases}$$

gesetzt wird; T ist daher eine im allgemeinen nicht homogene Function zweiter Ordnung der y_s'. Zugleich wird

$$4) \qquad x_i'' = \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial y_\sigma} y_s' y_\sigma' + 2 \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial t} y_s' + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} y_s'' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}.$$

Wir benutzen die Werthe 4) zur Berechnung des Zwanges Z

$$5) \qquad Z = \sum m_i \left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2,$$

wobei unter den X_i die Componenten der wirkenden Kräfte verstanden sind. Durch eine sehr einfache Rechnung findet man aus 4)

$$Z = \sum m_i \Xi_i^2 + \sum A_{s\sigma} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right) \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_\sigma'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\sigma} - Y_\sigma\right)$$
$$- \sum A_{s\sigma} Q_s Q_\sigma,$$

wobei zur Abkürzung

$$Y_s = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s},$$

$$\Xi_i = \sum \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial y_\sigma} y_s' y_\sigma' + 2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial t} y_s' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - \frac{X_i}{m_i}\right),$$

$$Q_s = \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} y_r' y_\sigma' + 2 \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} m_i y_\sigma' + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} m_i - Y_s$$

gesetzt ist, während

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} = \Sigma\, a_{sr}\, y_r'' + \Sigma\, m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r\, \partial y_\sigma} y_r'\, y_\sigma'$$

$$+ 2\, \Sigma\, m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial y_\sigma} y_\sigma' + \Sigma\, m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

wird.

Man sieht nun unmittelbar, dass die erste Summe in Z sich gegen die letzte aufhebt. Dazu braucht man nur in

$$W = \Sigma\, A_{s\sigma}\, Q_s\, Q_\sigma$$

die Q_s wieder durch ihre Werthe zu ersetzen; drückt man auch Y_s wieder durch die X_i aus, so entsteht

$$W = \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial y_{s'}} m_i\, m_j\, A_{ss'}\, \Xi_i\, \Xi_j\,,$$

was nach 2) in

$$W = \Sigma\, m_j\, (i\, j)\, \Xi_i\, \Xi_j = \Sigma\, m_i\, \Xi_i^2$$

übergeht.

Durch Differentiation folgt weiter

$$2\, \Sigma\, m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r\, \partial y_\sigma} = 2 \begin{bmatrix} r\,\sigma \\ s \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial y_r} + \frac{\partial a_{sr}}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial y_s}$$

$$2\, \Sigma\, m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial y_\sigma} = \begin{bmatrix} s\,\sigma \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial a_s}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial a_\sigma}{\partial y_s}$$

$$\Sigma\, m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} s \end{bmatrix} = \frac{\partial a_s}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial y_s}\,,$$

so dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} = \Sigma\, a_{s\sigma}\, y_\sigma'' + \Sigma \begin{bmatrix} r\,\sigma \\ s \end{bmatrix} y_r'\, y_\sigma' + [s\,\sigma]\, y_\sigma' + [s]$$

wird. Hiermit ist der folgende Satz bewiesen.

Ersetzt man die Variabeln x durch ebensoviel neue Variabele y vermöge der von einander in Bezug auf die y unabhängigen Gleichungen

6) $\qquad x_i = f_i(y_1\, y_2 \ldots y_{3n}\, t), \;\; y_i = \varphi_i(x_1\, x_2 \ldots x_{3n}\, t),$

so wird der Gauss'sche Zwang Z ausgedrückt durch die zur lebendigen Kraft T covariante Function

$$Z = \sum A_{\iota\sigma} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'_\iota}\right) - \frac{\partial T}{\partial y'_\iota} - Y_\iota\right]\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\sigma} - Y_\sigma\right].$$

Dieselbe ist eine Verallgemeinerung des von Herrn Lipschitz[1]) für den Fall, dass die Functionen f die Zeit nicht enthalten, als Ergebniss seiner allgemeinen Untersuchung über die Transformation homogener Differentialausdrücke hergeleiteten Resultates. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass dasselbe nicht auf den Fall einer homogenen Form T beschränkt sein kann; in diesem Falle dürfte es wohl einfacher sein, das Transformationsresultat direct herzuleiten.

Eine wesentliche Bedingung für dasselbe ist es jedoch, dass die Zahl der Variabeln y ebenso gross ist, wie die der x, denn nur unter dieser Voraussetzung lässt sich die Identität 2), auf der die ganze Rechnung beruht, anwenden.[2])

Man kann nun insbesondere die Variabeln y so wählen,[3]) dass bei einem mechanischen Problem mit k Bedingungsgleichungen

---

[1]) R. Lipschitz, Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges, Journ. f. Math. Bd. 82, p. 328 (1877).

[2]) Herr A. Wassmuth hat (Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik, diese Sitzungsber. 1894, p. 219) die Lipschitz'sche Formel für Z in Anspruch genommen für den Fall, wo die Zahl der Variabeln y auch kleiner ist wie die der x. Dass dies nicht gestattet ist, hätte sich schon daraus ersehen lassen, dass unter diesen Umständen der auch von ihm mit Z bezeichnete Zwang gleich Null wird, was nur bei der freien Bewegung eines Systems eintritt, während doch p. 220 Bedingungsgleichungen vorausgesetzt wurden. Es sind daher auch die im weiteren Verlauf der Arbeit entwickelten Formeln, soweit sie sich nicht auf freie Bewegungen beziehen, durch die weiterhin im Text abgeleiteten zu ersetzen.

Bei Herrn Lipschitz ist übrigens ausdrücklich die ungeänderte Zahl der Variabeln als Bedingung zur Voraussetzung gemacht (a. a. O. p. 316 und 328).

[3]) Selbstverständlich kann man in ebenso einfacher Weise auch nur einen Theil der Bedingungen durch Einführung der allgemeinen Coordinaten beseitigen.

$$\varphi_l(x_1 \dots x_n t) = 0, \; l = 1, 2 \dots k$$

die ersten k Functionen y, gleich Null gesetzt, eben diese Bedingungen vorstellen, d. h.

$$y_l = \varphi_l$$

ist, während die $h = 3n - k$ letzten y als allgemeine Coordinaten q_m, $m = 1, \dots h$ angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung ist dann

$$y_l' = 0, \; y_l'' = 0 \text{ für } l = 1, 2 \dots k.$$

Soll nun der Zwang Z ein Minimum werden, so erhält man in bekannter Weise mittelst der Lagrange'schen Multiplicationsmethode die Gleichungen

$$\sum A_{s\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right] a_{sl} = \lambda_l.$$

$$\sum A_{s\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right] a_{s\,m+k} = 0.$$

oder:

a) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_l'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_l} - Y_l = \lambda_l, \; l = 1, \dots k$$

b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_{m+k}'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_{m+k}} - Y_{m+k} = 0, \; m = 1, \dots h.$$

Die Gleichungen a), welche nur zur Bestimmung der Multiplicatoren λ dienen, kann man ganz fortlassen; die Gleichungen b) liefern die Bewegungsgleichungen, so wie man in denselben

$$y_l = 0 \text{ für } l = 1, \dots k$$
$$y_{m+k} = q_m \text{ für } m = 1, \dots h$$

setzt, und für den Zwang Z ergiebt sich der Werth

$$Z = \sum A_{ij} \lambda_i \lambda_j, \; i, j = 1, \dots k.$$