Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Anzahl der cogredienten und adjungirten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst.

Von **A. Voss** in Würzburg.

(*Eingelaufen 2. Mai.*)

In meiner Arbeit über die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst[1]) habe ich den Satz bewiesen, dass jede nicht singuläre (eigentliche) Transformation dieser Art, welche eine Form S von nicht verschwindender Determinante[2]) in sich überführt, mit Hülfe des Systems linearer Gleichungen

I) $$SY + S'Y' = 0$$

bestimmt werden kann, und dass die Anzahl der willkürlichen Parameter, welche in den Coefficienten der Transformation auftreten, gleich der der linear unabhängigen Lösungen dieses Systems ist.

Setzt man in I)

$$YS = X, \qquad S'Y' = X',$$

so folgt daraus

I') $$SX + X'S = 0$$

und das System I') ist dem System I) völlig äquivalent.

---

1) Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst, Abh. d. k. bayer. Ak. d. Wiss. II. Cl., Bd. XXVII, desgl. Sitzgsb. d. k. bayer. Ak., Cl. II, Bd. XXVI, Heft 1, 1896.

2) Unter S soll im Folgenden immer eine Form von dieser Eigenschaft verstanden werden. Für den blossen Zweck der Transformation ist allerdings, wie ich schon a. a. O. S. 73 bemerkt habe, diese Voraussetzung nicht erforderlich, wohl aber für die hier vorliegenden Untersuchungen.

Den cogredienten Transformationen U, d. h. denjenigen, welche bewirken, dass die symbolische Gleichung

$$U' S U = S$$

erfüllt ist, kann man eine andere Klasse von Transformationen zuordnen, welche ich adjungirte nennen will. Unter einer adjungirten Transformation verstehe ich denjenigen Substitutionsprocess, welcher durch die Gleichung

$$(U')^{-1} S U = S$$

ausgedrückt ist. Die adjungirten Transformationen sind daher die Lösungen des Systems linearer Gleichungen

II') $$S U - U' S = 0$$

oder, wenn $U = YS$ gesetzt wird,

II) $$S Y - S' Y' = 0,$$

dessen nahe Beziehung zu I) unverkennbar ist. Dass es in der That Substitutionen, welche die Gleichung II') befriedigen, giebt, d. h. Formen U, deren Determinante nicht verschwindet, ist leicht einzusehen. Hat nämlich die Gleichung II) im Ganzen q linear unabhängige Lösungen

$$Y_1\, Y_2 \,.\,.\,.\,.\, Y_q,$$

(unter diesen befindet sich die evidente Lösung

$$Y_1 = S^{-1},$$

so dass q mindestens gleich 1 ist), so hat sie auch ebenso viel von einander unabhängige Lösungen, deren Determinante nicht verschwindet. Denn setzt man

$$Z_i = Y_i - \varrho_i S^{-1},\ i = 1, \ldots q$$

so kann man immer dem Parameter ϱ_i einen solchen Werth geben, dass die Determinante

$$|\, Y_i - \varrho_i S^{-1} \,|$$

nicht verschwindet. Und zwischen den Z_i kann keine lineare Relation

$$\Sigma Z_i a_i = 0$$

bestehen, da sonst

$$\sum_{i=2}^{i=q} a_i Y_i + S^{-1}(a_1 - \sum_{i=1}^{i=q} a_i \varrho_i) = 0$$

verschwinden müsste, was wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Y_i nur möglich wäre, wenn alle a verschwinden, da man ϱ_1 immer als von 1 verschieden annehmen kann.

Eine symmetrische (alternirende) Form S wird z. B. durch alle Formen $U = MS$, wo M eine symmetrische (alternirende) willkürliche Form ist, adjungirt in sich transformirt, und es existiren auch ausser den angegebenen Formen U keine andern. Denn setzt man $U = MS$, so folgt unter der Voraussetzung

$$S' = \alpha S, \qquad \alpha = \pm 1$$

aus der Gleichung II')

$$SMS = \alpha SM'S,$$

oder

$$M = \alpha M',$$

also ist M entweder symmetrisch oder alternirend.

Die Anzahl der Parameter in den Coefficienten der Transformationen, welche die Form S adjungirt in sich transfomiren, ist gleich der der linear unabhängigen Lösungen der Gleichungen II) oder II'). Die beiden Gleichungen I) und II) sind von der Art, dass sie n^2 Gleichungen für jene n^2 Coefficienten liefern, also durch besondere Eigenschaften ihrer Unterdeterminantensysteme auszeichnet. —

Im Folgenden soll nun die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems I (I') beständig mit P, die entsprechende Zahl für die Gleichungen II (II') mit Q bezeichnet werden. Die Aufgabe, diese beiden Zahlen in allen Fällen zu bestimmen, scheint ohne specielle Untersuchungen über den Charakter der Form S, wie z. B. Reduktion der zu S gehörigen Formenschaar $S + \varrho S'$ auf ein System elementarer Formen etc. nicht möglich zu sein; eine directe Untersuchung der Unterdeterminantensysteme von I) und II) ist mir wenigstens trotz vielfältiger Versuche nicht gelungen.

Aber es giebt einen ausgezeichneten Fall, in dem die Werthe von P und Q unmittelbar angegeben werden können. Wenn nämlich die zu den Wurzeln $\varrho = \pm 1$ der charakteristischen Function[1])

$$|S + \varrho S'|$$

gehörigen Elementartheiler sämmtlich einfach sind, während über die Beschaffenheit der übrigen Wurzeln nichts vorausgesetzt zu werden braucht, ist

$$P + Q = N$$
$$P - Q = \nu - \mu,$$

wo $\mu(\nu)$ die Anzahl der Wurzeln $-1\ (+1)$ der charakterischen Function, N die Zahl der mit der antisymmetrischen Form $(S')^{-1} S$ vertauschbaren Formen bezeichnet.

Auf diesen Fall, in dem es also gelingt, die Untersuchung der Determinante von n^2 Reihen auf die der charakteristischen Function zurückzuführen, wozu nur rationale Operationen nöthig sind, beziehen sich die folgenden Untersuchungen; nur im letzten Paragraph finden sich einige weitergehende Betrachtungen. Charakteristisch ist aber für den Gang der Untersuchung die Art und Weise, wie die vorliegende Frage in Zusammenhang mit der Aufgabe gebracht wird, die Anzahl der symmetrischen und alternirenden Formen zu finden, welche einer gewissen aus 1) abgeleiteten Gleichung genügen, die in dem obigen Falle hier zugleich ihre Erledigung findet.

---

1) Die Determinante einer Form $U = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ soll durch

$$|a_{ik}| \quad \text{oder} \quad |U|$$

bezeichnet werden; unter demselben Symbol kann man dann auch jede Partialdeterminante μ^{ter} Ordnung verstehen, wenn den Indices i, k μ von einander verschiedene Werthe ertheilt werden.

§ I.

Ein allgemeiner Satz über die cogredienten und adjungirten Transformationen einer Form in sich selbst.

Unter Voraussetzung der Gleichung

1) $$SX + X'S = 0$$

folgt durch Uebergang zu den conjugirten Formen:

$$X'S' + S'X = 0$$

$$\text{oder} \quad X' = -S'X(S')^{-1}.$$

Setzt man diesen Werth in 1) ein, so ergiebt sich

2) $$(S')^{-1}SX - X(S')^{-1}S = 0$$

oder

2a) $$S^{-1}S'X - XS^{-1}S' = 0.$$

Jede Form X, die der Gleichung 1) genügt, ist also mit der antisymmetrischen Form

$$(S')^{-1}S \quad \text{oder} \quad S^{-1}S'$$

vertauschbar.

Aus der Gleichung 2a) folgt noch

3) $$X'S(S')^{-1} - S(S')^{-1}X' = 0,$$

so dass jedes X' die Gleichung 3) befriedigen muss. Aber aus der Gleichung 2a), die man auch in die Gestalt

$$S^{-1}S'S^{-1}(SXS^{-1}) - XS^{-1}S'S^{-1} = 0$$

oder

$$(SXS^{-1})S(S')^{-1} - S(S')^{-1}(SXS^{-1}) = 0$$

bringen kann, folgt ferner:

Ist X eine Lösung der Gleichung 2), so ist SXS^{-1} eine Lösung der Gleichung 3).

Ich bezeichne nun mit N die Anzahl der linear unabhängigen Formen, welche der Gleichung 2) genügen. Sind ferner

$$X_1, X_2 \ldots X_N$$

diese Formen selbst, so ist

$$X = \Sigma \alpha_k X_k \qquad k = 1 \ldots N$$

die allgemeinste dieser Gleichung genügende Form, falls man mit α willkürliche Parameter bezeichnet. Es handelt sich daher jetzt um die Bestimmung derjenigen Werthe der α, durch die zugleich die Gleichung 1) befriedigt wird. Trägt man zu diesem Zwecke den Werth von X in 1) ein, so ergiebt sich

4) $$\Sigma \alpha_k S X_k S^{-1} + \Sigma \alpha_k X_k' = 0$$

Nun sind aber zufolge der Unabhängigkeit der X_k unter einander auch die X_k' unter einander unabhängig. Demnach ist nach dem vorhin angeführten Satze

4a) $$S X_k S^{-1} = \sum_l \beta_{kl} X_l' \qquad l, k = 1 \ldots N,$$

so dass aus 4) folgt:

5) $$\Sigma \alpha_k \beta_{kl} + \alpha_l = 0.$$

Die Coefficienten β_{kl} aber lassen sich näher definiren. Sie gehören einer Form

$$A = \Sigma \beta_{kl} x_i y_k$$

von N bilinearen Variabeln an, deren Quadrat gleich der Form

$$E = x_1 y_1 + \ldots x_N y_N$$

ist. In der That folgt aus 4a) durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$(S')^{-1} X_k' S' = \Sigma \beta_{kl} X_l$$

oder durch geeignete Multiplication

$$S (S')^{-1} X_k' S' S^{-1} = \Sigma \beta_{kl} S X_l S^{-1}$$

woraus vermöge 3) folgt:

$$X_k' = \sum_{ls} \beta_{kl} \beta_{ls} X_s'$$

$$k, l, s = 1, \ldots N.$$

Hieraus aber ergiebt sich wegen der Unabhängigkeit der Formen X das System von Identitäten

6) $$\Sigma \beta_{kl} \beta_{ls} = \delta_{ks}$$

falls unter δ_{ls} das Kronecker'sche Zeichen

$$\delta_{ls} = 1, \quad l = s$$
$$\delta_{ls} = 0, \quad l \neq s$$

verstanden wird. Die Coefficienten β_{kl} bilden also ein System, dessen charakteristische Function

$$| \beta_{kl} + \varrho \, \delta_{kl} |$$

nur die einfachen Elementartheiler $\varrho = \pm 1$ hat.[1]) Ist nun $\varrho = +1$ eine P fache Wurzel der Gleichung

$$| \beta_{kl} + \varrho \, \delta_{kl} | = 0,$$

so giebt es auch genau P linear unabhängige Grössenreihen

$$\alpha_l^1 \ \alpha_l^2, \ldots \alpha_l^P,$$
$$l = 1, \ldots N,$$

und ebenso gross ist daher die Anzahl der linear von einander unabhängigen Formen

$$X_\varrho = \Sigma \alpha_k^\varrho X_k, \qquad \varrho = 1 \ldots P,$$

welche die Gleichung 1) befriedigen.

Eine ganz analoge Untersuchung lässt sich aber in Bezug auf die Gleichung

1') $$S X - X' S = 0$$

führen. Denn auch diese ergiebt zur Bestimmung von X zunächst wieder die nothwendige Gleichung 2). Und setzt man aus den Lösungen X_k jetzt die Lösung von 1')

$$\Xi_k = \Sigma \gamma_k X_k$$

zusammen, so folgt zur Bestimmung der Coefficienten γ das System

7) $$\Sigma \beta_{kl} \gamma_k - \gamma_l = 0$$

---

[1]) Dieser Satz findet sich bereits in meiner früheren Arbeit a. a. O. S. 101, aber unter Voraussetzung einer unnöthigen Beschränkung.

mithin dem $Q = N - P$-fachen Wurzelfactor $(\varrho + 1)$ der charakteristischen Function entsprechend ein System von Q linear unabhängigen Formen, welche der Gleichung 7) genügen.

Nun kann man freilich die sämmtlichen Formen, welche mit einer gegebenen Form vertauschbar sind, wie ich in einer in diesen Sitzungsberichten erschienenen Note[1]) gezeigt habe, verhältnissmässig einfach bestimmen. Aber die Ermittelung der Coefficienten β_{kl} und damit der Zahlen P, Q scheint auf Schwierigkeiten zu führen. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich daher zunächst nur der Satz:

Die Summe der Anzahlen der Parameter, durch die eine Form von nicht verschwindender Determinante S cogredient und adjungirt in sich transformirt werden kann, ist gleich der Zahl N derjenigen Formen, welche mit der antisymmetrischen Form $S^{-1}S'$ vertauschbar sind.

Man kann diesem Satze auch die folgende Form geben:

Die sämmtlichen N linear unabhängigen Formen X, welche der Gleichung 2) genügen, lassen sich in zwei Klassen von P und Q Formen theilen, von denen die eine die Lösungen der Gleichung 1), die andere die der Gleichung 1') darstellt.

Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1' & . & . & \alpha_N' \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \alpha_1^P & . & . & \alpha_N^P \\ \gamma_1' & . & . & \gamma_N' \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \gamma_1^Q & . & . & \gamma_N^Q \end{vmatrix}$$

---

[1]) Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren Formen, Sitzgsber. d. k. bayer. Ak. d. Wiss., 1889. Vgl. auch die folgende Note über symmetrische und alternirende Lösungen der Gleichung $SX = XS' = 0$.

kann nämlich nicht verschwinden. Wäre dies der Fall, so gäbe es P Zahlen h^ϱ und Q Zahlen k^σ, für die

$$\sum_\varrho h^\varrho \alpha_k^\varrho + \sum_\sigma k^\sigma \gamma_k^\sigma = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots P, \qquad \sigma = 1, \ldots Q$$

ist, für alle Werthe von k von 1 bis N. Dann ist aber auch zufolge der Gleichungen 5) und 7)

$$\Sigma \alpha_k^\varrho \beta_{kl} + \alpha_l^\varrho = 0$$

$$\Sigma \gamma_k^\sigma \beta_{kl} - \gamma_l^\sigma = 0$$

mithin, wenn man die vorstehenden Gleichungen mit den h^ϱ, k^σ multiplicirt und addirt,

$$\Sigma h^\varrho \alpha_l^\varrho - \Sigma k^\sigma \gamma_l^\sigma = 0,$$

was mit der vorhin aufgestellten Gleichung unverträglich ist, da alsdann die α_k^ϱ schon unter sich von einander linear abhängig wären. Mithin sind jene $P + Q$ Formen von einander unabhängig.

§ II.

Ueber alternirende und symmetrische Formen.

Die Gleichung 2) des § I ist von einer ganz eigenthümlichen Gestalt. Es ist daher zu vermuthen, dass auch ihre Lösungen durch besondere Eigenschaften ausgezeichnet sind.

Setzt man

$$X = Z S',$$

so sind, da die Determinante von S nicht Null ist, die Formen Z_k ebenso von einander unabhängig, wie die Formen X_k, sie genügen aber der durch ihre ausgezeichnete Form bemerkenswerthen Gleichung[1]):

1) $$S Z S' = S' Z S.$$

[1]) Sie hat die für das Folgende wesentliche Eigenschaft, dass entsprechend der Gleichung

$$U' S U U^{-1} Z (U')^{-1} U' S' U = U' S' U U^{-1} Z (U')^{-1} U' S U,$$

bei jeder cogredienten Transformation von S auch die Lösungen Z cogredient transformirt werden, was bei Gleichung 2) § I nicht der Fall ist.

Und da aus 1) zugleich folgt

$$S Z' S' = S' Z' S,$$

so hat man den Satz:

Die Gleichung 1) wird durch alternirende und symmetrische Formen Z befriedigt, nämlich durch die Formen

$$Z_k \pm Z_k', \qquad k = 1 \; . \; . \; . \; . \; N,$$

welche den Formen X_k zugeordnet sind.

Die symmetrischen Formen $Z_k + Z_k'$ sollen im Folgenden mit dem Symbol S_k, die alternirenden Formen $Z_k - Z_k'$ mit A_k bezeichnet werden. Die S_k sind im allgemeinen nicht von einander unabhängig. Bestehen aber p linear unabhängige Relationen zwischen den S_k, ist also

$$\sum_k \alpha_{kl} S_k = 0, \qquad l = 1 \; . \; . \; . \; p,$$

so ist

$$\Sigma Z_k \alpha_{kl} + \Sigma Z_k' \alpha_{kl} = 0.$$

Es sind also von den N Formen S_k $N - p$ von einander linear unabhängig. Und zugleich existiren dann genau p alternirende Formen

$$A_l = \Sigma Z_k \alpha_{kl},$$

welche von einander unabhängig sind. Denn eine lineare Relation könnte zwischen den A_l nur dann stattfinden, wenn die Coefficienten α_{kl} weniger als p unabhängige Systeme darstellten, — gegen die Voraussetzung. Man hat also den folgenden Satz, welcher die Ergänzung zu dem am Ende des § I ausgesprochenen Theorem bildet:

Die Gesammtzahl der unabhängigen alternirenden und symmetrischen Formen, welche die Gleichung 1) befriedigen, ist gleich N, oder auch:

Es existirt immer ein vollständiges Lösungssystem der Gleichung 1), welches aus lauter alternirenden und symmetrischen Formen zusammengesetzt ist.

In der That, bezeichnet man die symmetrischen von einander unabhängigen Formen durch

$$S_1\, S_2\, \ldots\, S_{N-p},$$

die alternirenden mit

$$A_1\, A_2\, \ldots\, A_p,$$

so kann auch zwischen diesen keine lineare Relation bestehen. Wäre nämlich

$$\Sigma\, \alpha_l\, S_l + \Sigma\, \beta_m\, A_m = 0,$$

so wäre durch den Uebergang zu den conjugirten Formen auch

$$\Sigma\, \alpha_l\, S_l - \Sigma\, \beta_m\, A_m = 0,$$

d. h. es wären schon die $S_k\,(A_k)$ unter sich nicht linear unabhängig.

Die Aufgabe, diese alternirenden und symmetrischen Formen direct zu bestimmen, führt nun auf eine ganz ähnliche Untersuchung, wie die des § I.

Bezeichnet man wie oben die sämmtlichen von einander unabhängigen Lösungen von 1) durch Z_k, $k = 1, \ldots N$, so ist

$$Z = \Sigma\, Z_k\, \alpha_k$$

die allgemeinste Lösung. Soll Z symmetrisch oder alternirend sein, so muss

$$\Sigma\, Z_k\, \alpha_k = \Sigma\, X_k\, S'^{-1}\, \alpha_k$$
$$\Sigma\, Z_k\, \alpha_k = \pm\, \Sigma\, S^{-1}\, X_k'\, \alpha_k$$

oder

$$\Sigma\, S\, X_k\, (S')^{-1}\, \alpha_k \mp \Sigma\, X_k'\, \alpha_k = 0$$

sein. Nun genügt aber, wie leicht zu sehen, die Form

$$S\, X_k\, (S')^{-1}$$

derselben Gleichung 3) § I, wie X', es ist also

$$S\, X_k\, (S')^{-1} = \Sigma\, \gamma_{kl}\, X_l'$$

und somit folgt zur Bestimmung der Coefficienten α das System der Gleichungen

$$\Sigma\, \gamma_{kl}\, \alpha_k \mp \alpha_l = 0, \qquad l = 1, \ldots N.$$

Und da ferner

$$S^{-1} X_k' S' = \Sigma \gamma_{kl} X_l$$

oder

$$X_k' = \Sigma \gamma_{kl} S X_l (S')^{-1} = \Sigma \gamma_{kl} \gamma_{lm} X_m'$$

ist, so ergiebt sich

$$\Sigma \gamma_{kl} \gamma_{lm} = \delta_{km},$$

so dass die Coefficienten γ_{kl} wieder ein System bilden, dessen charakteristische Function nur einfache Elementartheiler von der Form $\varrho \pm 1$ besitzt.

Ich führe noch einige Sätze an, die einen weiteren Zusammenhang zwischen den Coefficienten β_{kl}, γ_{kl} begründen.

Aus der Gleichung

$$S X_k (S')^{-1} = \Sigma \gamma_{kl} X_l'$$

oder

$$(S')^{-1} S X_k = \Sigma \gamma_{kl} (S')^{-1} X_l' S'$$

folgt nach § I, 4a)

$$(S')^{-1} S X_k = \Sigma \gamma_{kl} \beta_{ls} X_s.$$

Setzt man nun für einen Augenblick

$$(S')^{-1} S = \Sigma A_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

$$X_k = \Sigma \xi^k_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

$$\Sigma \gamma_{kl} \beta_{ls} = \alpha_{ks}$$

so dass die griechischen Indices die Werthe von 1 bis n, die lateinischen die Werthe von 1 bis N durchlaufen, so liefert die letzte Gleichung durch Coefficienten-Vergleichung die nN Relationen

$$\Sigma A_{\varkappa\mu} \xi^k_{\mu\lambda} = \Sigma \alpha_{ks} \xi^s_{\varkappa\lambda}.$$

Die charakteristische Function

$$|\alpha_{ks} + \varrho \delta_{ks}|$$

habe nun eine Wurzel $\varrho = \varrho_1$. Dann gibt es mindestens ein System von Grössen β, welches die Gleichung

$$\Sigma \alpha_{ks} \beta_k = -\varrho_1 \beta_s, \qquad s = 1, 2 \, . \, . \, . \, N,$$

erfüllt, mithin wird

$$\Sigma A_{\varkappa\mu} \xi^k_{\mu\lambda} \beta_k = - \varrho_1 \Sigma \beta_s \xi^s_{\varkappa\lambda}$$

oder, wenn man

$$\Sigma \beta_s \xi^s_{\varkappa\lambda} = \eta^\lambda_\varkappa$$

setzt,

$$\Sigma A_{\varkappa\mu} \eta^\lambda_\mu = - \varrho_1 \eta^\lambda_\varkappa.$$

Das heisst: Jede Wurzel der charakteristischen Function N^{ten} Grades

$$|\alpha_{ks} + \varrho \delta_{ks}| = |\beta_{ks} + \varrho \gamma_{ks}|$$

ist auch eine Wurzel der charakteristischen Function n^{ten} Grades

$$|S + \varrho S'|.$$

Der Satz gilt aber auch umgekehrt. Denn bezeichnet man mit σ_1 eine Wurzel der letzteren, so ist

$$\Sigma A_{\varkappa\mu} h_\varkappa = - \sigma_1 h_\mu$$

oder

$$- \sigma_1 \Sigma h_\mu \xi^k_{\mu\lambda} = \Sigma \alpha_{ks} \xi^s_{\varkappa\lambda} h_\varkappa,$$

also wenn man

$$\Sigma h_\mu \xi^k_{\mu\lambda} = b^\lambda_k$$

setzt,

$$\Sigma \alpha_{ks} b^\lambda_s = - \sigma_1 b^\lambda_k$$

wie zu zeigen war. Die beiden charakteristischen Functionen haben daher nur durch die Grade der Vielfachheit verschiedene Wurzeln.

In dem besonderen Falle, wo die Wurzeln der charakteristischen Function $|S + \varrho S'|$ sämmtlich von einander verschieden sind, ist $N = n$ und man hat den Satz:

Sind die Wurzeln der charakteristischen Function $|S + \varrho S'|$ alle von einander verschieden, so ist die charakteristische Function $|\beta_{ks} + \varrho \gamma_{ks}|$ von derselben nur um einen constanten Factor verschieden.

Dieser specielle Satz lässt sich übrigens leicht direct herleiten. Wenn nämlich $|S + S' \varrho|$ lauter einfache Wurzeln hat, und etwa

$$|S'^{-1} S + \varrho| = 1 + a_1 \varrho + \ldots a_{n-1} \varrho^{n-1} + \varrho^n$$

gesetzt wird, so sind die n ersten Potenzen

$$\Omega^0 \, \Omega^1 \ldots \Omega^{n-1}$$

der Form $\Omega = (S')^{-1} S$ von einander unabhängig; sie bilden das vollständige Lösungssystem der Gleichung $\Omega X = X \Omega$, und zugleich ist[1])

$$\Omega^n - a_{n-1} \Omega^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_1 \Omega + (-1)^n \Omega^0 = 0.$$

Die mit α_{ks} bezeichneten Grössen, welche den Gleichungen

$$\Omega^k = \Sigma \alpha_{ks} \Omega^{s-1}, \qquad \begin{array}{l} k = 1, 2 \ldots n \\ s = 1, 2 \ldots n \end{array}$$

genügen müssen, erhalten wegen der Unabhängigkeit der Formen Ω sofort die folgenden Werthe:

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \ldots \alpha_{n-1\,n} = 1.$$
$$\alpha_{n1} = (-1)^{n-1}, \; \alpha_{n2} = (-1)^{n-2} a_1, \; \alpha_{n2} = (-1)^{n-3} a_2 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{n\,n-1} = (-1)^1 a_{n-2}, \; \alpha_{nn} = a_{n-1};$$

alle übrigen α_{ks} sind gleich Null. Und man erhält hieraus die Gleichung

$$|\alpha_{ks} + \varrho \, \delta_{ks}| = (-1)^{n-1} |S'^{-1} S + \varrho|,$$

womit die Uebereinstimmung der beiden Functionen n^{ten} Grades direct dargethan ist.

Während die vorhergehenden Betrachtungen die Bestimmung der von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

2) $$S X + a X' S = 0, \qquad a = \pm 1$$

von der Ermittelung des Systems der Coefficienten β_{kl} abhängig machen, kann man auf einem anderen Wege sämmtliche

---

[1]) Vgl. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 12.

Lösungen explicite darstellen. Ist X eine Lösung von 2) und setzt man nach § I)

$$X = \Sigma\, \alpha_k X_k, \qquad k = 1 \ldots . N$$

oder nach § I, 5)

$$\begin{aligned} X &= \lambda\, \Sigma\, \alpha_k X_k - (1-\lambda)\, \Sigma\, \alpha_k \beta_{kl} X_l \\ &= \lambda\, \Sigma\, \alpha_k X_k - (1-\lambda)\, \Sigma\, (S')^{-1} \alpha_k X'_k S' \end{aligned}$$

so wird für $X_k = Z_k S'$ nach 1)

$$X = \lambda\, \Sigma\, \alpha_k Z_k S' - (1-\lambda)\, \Sigma\, \alpha_k Z'_k S.$$

Man kann also jede Lösung von 2) in die Form

3) $$X = p\, Z' S + q\, Z S', \; p + q = -1$$

setzen. Umgekehrt aber ist jeder Ausdruck von der Form 3) eine Lösung der Gleichung 2), sobald Z eine Lösung von 1) ist, und die Gleichung 3) stellt alle Lösungen von 2) vor, wenn an Stelle von Z ein System von unabhängigen Lösungen von 1) gesetzt wird, sobald man

$$p + \alpha q = 0, \qquad q + \alpha p = 0$$

setzt, welche beiden Gleichungen wegen $\alpha = \pm 1$ mit einander verträglich sind.

Wählt man insbesondere hierzu das aus den symmetrischen und alternirenden Formen

$$S_k, \; A_l, \; k = 1 \ldots . q, \quad l = q + 1 \ldots N$$

bestehende System und setzt man z. B. $\alpha = +1$

$$p = 1, \qquad q = -1,$$

so erhält man als Lösungen der Gleichung $S X + X' S = 0$

4) $$\begin{aligned} X_k &= S_k (S - S') \\ X_l &= A_l (S + S'). \end{aligned}$$

Diese N Formen sind aber nicht von einander unabhängig und es ist auch nicht schwer, die zwischen ihnen bestehenden linearen Relationen anzugeben. Aus der Gleichung 4a) des § I folgt:

$$Z_k S' S^{-1} = \Sigma \alpha_{kl} Z'_l$$

mithin, wenn an Stelle von Z die Formen S_k, A_l eingeführt werden

$$S_k S' S^{-1} = \sum_{k_1} \alpha_{kk_1} S_{k_1} - \sum_{l} \alpha_{kl} A_l$$

oder

$$5) \quad \begin{aligned} S_k (S' S^{-1} + 1) &= \sum_{k_1} (\alpha_{kk_1} + \delta_{kk_1}) S_{k_1} - \sum \alpha_{kl} A_l \\ A_l (S' S^{-1} - 1) &= \sum_{k_1} \alpha_{lk_1} S_{k_1} - \sum (\alpha_{ll_1} + \delta_{ll_1}) A_l \end{aligned}$$

und ebenso

$$6) \quad \begin{aligned} S_k (S' S^{-1} - 1) &= \Sigma (\alpha_{kk_1} - \delta_{kk_1}) S_{k_1} - \Sigma \alpha_{kl} A_l \\ A_l (S' S^{-1} + 1) &= \Sigma \alpha_{lk_1} S_{k_1} - \Sigma (\alpha_{ll_1} - \delta_{ll_1}) A_l . \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 5) 6) mit den in § I eingeführten Grössen

$$\alpha_1^h \ldots \alpha_N^h, \quad h = 1, \ldots P$$

$$\gamma_1^i \ldots \gamma_N^i, \quad i = 1, \ldots Q$$

so ergiebt sich wegen der Gleichungen 5), 7) des § I:

$$7) \qquad \Sigma S_k \alpha_k^h (S + S') + \Sigma A_l \alpha_l^h (S' - S) = 0$$

$$8) \qquad \Sigma S_k \gamma_k^i (S' - S) + \Sigma A_l \gamma_l^i (S + S') = 0,$$

von denen die letzte wegen 4) mit

$$\Sigma \beta_m^i X_m = 0, \quad m = 1, \ldots N$$

übereinstimmt, so dass also zwischen den auf diesem Wege erhaltenen Lösungen Q Relationen bestehen oder $N - Q = P$ unabhängig sind, wie es ja auch der Fall sein muss. Die durch ihre Einfachheit bemerkenswerthen Gleichungen 4) enthalten demnach den folgenden Satz:

Es giebt ein System von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung $SX + X'S = 0$, in welchem jede Form das Product einer symmetrischen mit einer alternen Form ist, und ein analoger Satz besteht für die Gleichung $SX - X'S$, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier gleichartige Formen durch Productbildung zusammentreten müssen.

Nach diesen Betrachtungen über den Zusammenhang der verschiedenen Lösungssysteme wende ich mich zu einer neuen Umformung der Gleichung 1).

Wie leicht zu sehen, lässt sich dieselbe in die Form

$$1\text{a)}\qquad (S+S')\,Z(S'-S) - (S'-S)\,Z(S'+S) = 0$$

bringen. Und ebenso tritt an Stelle von

$$\text{I)}\qquad SY + S'Y' = 0$$

die Gleichung

$$\text{Ia)}\qquad (S+S')(Y+Y') + (S'-S)(Y'-Y) = 0,$$

sowie an Stelle von

$$\text{II)}\qquad SY - S'Y' = 0$$

die Gleichung

$$\text{IIa)}\qquad (S'-S)(Y+Y') + (S'+S)(Y'-Y) = 0.$$

Aus diesen Umformungen lässt sich ein wichtiger Schluss ziehen, sobald wenigstens eine der Determinanten

$$|S+S'|,\qquad |S'-S|$$

von Null verschieden ist. Aus Ia) folgt nämlich durch Uebergang zu conjugirten Formen

$$(Y+Y')(S'+S) + (Y'-Y)(S'-S) = 0$$

oder, wenn $|S+S'| \mp 0$, als einzige Bedingung, der die alternirende Form $Y'-Y$ genügen muss,

$$(S'+S)(Y'-Y)(S'-S) - (S'-S)(Y'-Y)(S'+S) = 0$$

oder die Gleichung 1a), und zu jeder dieser Formen $(Y'-Y)$ gehört nach Ia) eine und nur eine symmetrische Form $Y'+Y$. Und ebenso wird, wenn $|S'-S| \mp 0$ ist, zur Bestimmung der symmetrischen Form $Y'+Y$ wieder dieselbe Gleichung 1a) sich ergeben, und zu jeder dieser Formen gehört nach IIa) eine einzige alterne Form $Y' - Y$.[1]) Man hat also den folgenden Satz:

Sind P, Q die Anzahlen der linear unabhängigen Lösungen der Gleichungen I und II, p und q die Anzahlen der linear unabhängigen alternen und symmetrischen Lösungen der Gleichung 1), so ist

$$P + Q = N, \qquad p + q = N$$

und zugleich, wenn $|S + S'| \neq 0$,

$$P = p, \qquad Q = q,$$

dagegen, wenn $|S' - S| \neq 0$,

$$P = q, \qquad Q = p.$$

§ III.

Hülfssätze.

Enthalten die Coefficienten einer Form T m Parameter $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, so heissen dieselben wesentlich, wenn man durch Wahl der λ m von diesen Coefficienten willkürlich vorgeschriebene Werthe ertheilen kann, d. h. wenn es m Coefficienten giebt, die hinsichtlich dieser Parameter von einander unabhängige Functionen sind.

Wird eine Form einer von diesen Parametern unabhängigen linearen Transformation unterworfen, so bleibt die Zahl m

---

1) Es sei noch der hierher gehörige Satz erwähnt: Ist Ξ eine symmetrische Lösung der Gleichung

$$S \,\Xi\, S' = S' \,\Xi\, S$$

und verschwindet $|S' + S|$ nicht, so ist

$$H = \Xi\,(S' - S)\,(S' + S)^{-1}$$

eine alternirende Lösung derselben Gleichung; und ebenso muss, wenn $|S' - S| \neq 0$,

$$\Xi = H\,(S' + S)\,(S' - S)^{-1}$$

eine symmetrische Lösung sein, wenn H eine alterne ist. Wenn also beide Determinanten nicht Null sind, gehört zu jeder Lösung der einen Art eine der anderen, d. h. es ist $p = q$.

ungeändert. Bildet man aus mehreren Formen $T_1 \ldots T_k$ durch Addition und Multiplication unter einander oder mit anderen Formen neue Formen, so lässt sich im allgemeinen nur behaupten, dass die Zahl der wesentlichen Parameter in der Resultante nicht grösser ist, als die Gesammtzahl der in den Componenten vorkommenden.

Sind insbesondere die Coefficienten lineare (allgemeiner rationale) Functionen der Parameter, so kann man sie ohne Beschränkung als homogene Functionen derselben voraussetzen. Eine Form T mit m wesentlichen linearen Parametern ist also von der Gestalt

1) $$T = \lambda_1 T_1 + \ldots \lambda_m T_m,$$

und die linearen Formen T_i sind alsdann von einander unabhängig, d. h. es besteht keine lineare Relation mit constanten Coefficienten

$$\Sigma\, a_k T_k = 0$$

zwischen denselben; umgekehrt enthält ein solches Aggregat T von m linear unabhängigen Formen T_i auch m wesentliche Parameter.

Addirt man zu einer Form T, (1) mit m wesentlichen Parametern eine zweite U, welche neben den Parametern λ noch n Parameter μ enthält,

$$U = \lambda_1 U_1 + \ldots \lambda_m U_m + \mu_1 V_1 + \ldots \mu_n V_n,$$

wobei die U_i keiner Voraussetzung unterworfen sind, so enthält die Form $U + T$ genau $m + n$ wesentliche Parameter, sobald die Formen

$$U_i + T_i \text{ und } V_k$$
$$i = 1, 2 \ldots m;\ k = 1, 2 \ldots n$$

von einander unabhängig sind. Denn liesse sich $U + T$ in ein Aggregat $\nu_1 \omega_1 + \ldots \nu_s \omega_s$ verwandeln, in dem die $\nu_1 \ldots \nu_s$ linear von einander unabhängige Functionen der λ, μ sind, und wäre $m + n > s$, so könnte man $U + T$ dadurch zum Verschwinden bringen, dass man s der Grössen λ, μ durch die übrigen $m+n-s$ ausdrückt, dies ist aber nicht möglich, da ja alle λ, μ verschwinden müssen, wenn $U+T$ verschwindet.

Dieser sehr selbstverständliche Satz kommt im Folgenden in der besonderen Form zur Anwendung:

Ist A eine alternirende (symmetrische) Form, deren Coefficienten m wesentliche Parameter λ_i enthalten,

$$A = \lambda_1 A_1 + \ldots \lambda_m A_m$$

und ebenso S eine symmetrische (alternirende) Form, deren Coefficienten neben jenen Parametern λ noch n andere Parameter μ enthalten,

$$S = \lambda_1 S_1 + \ldots \lambda_m S_m + \mu_1 S_1^1 + \ldots \mu_n S_n^1$$

wobei die S_k^1 von einander unabhängige symmetrische (alternirende) Formen sind, so enthält die Form

$$X = pA + qS$$

genau $m+n$ wesentliche Parameter.

Denn die Voraussetzungen des obigen Satzes sind hier erfüllt. Wären nämlich (es möge nur der Fall betrachtet werden, wo die A altern, die S symmetrisch sind)

$$A_i + S_i, \ S_k^1$$

von einander abhängig, also

$$\Sigma \alpha_i (A_i + S_i) + \Sigma \beta_k S_k^1 = 0$$

so hätte man auch durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$\Sigma \alpha_i (-A_i + S_i) + \Sigma \beta_k S_k^1 = 0;$$

hieraus folgt aber durch Subtraction, dass alle α_i verschwinden müssten, und demnach auch das Verschwinden aller β_k.

Man kann dabei noch folgendes bemerken. Es sei

$$X = \omega_1 U_1 + \ldots \omega_\nu U_\nu,$$

wobei die $\omega_1 \ldots \omega_\nu$ linear unabhängige Functionen der λ, μ sind. Die Formen U bestehen aus p symmetrischen, $U_1 \ldots U_p$, $l-p$

alternirenden $U_{l+1} \ldots U_l$, endlich $\nu - l$ Formen, die von keiner der beiden Arten sind. Dann ist

$$2\,q\,S = 2\,\Sigma\,\omega_s\,U_s + \Sigma\,\omega_{s'}\,(U'_{s'} + U_{s'})$$
$$2\,p\,A = 2\,\Sigma\,\omega_{s''}\,U_{s''} + \Sigma\,\omega_{s'}\,(U_{s'} - U'_{s'})$$
$$s = 1 \ldots p;\; s'' = p + 1 \ldots l;\; s' = l + 1 \ldots \nu.$$

Nun folgt aus $\omega_{s'} = 0$, $\omega_{s''} = 0$ das Verschwinden von A, also aller λ. Es ist daher $\nu - p = m$, oder da $\nu = m + n$, $n = p$. Die Zahl der in X auftretenden symmetrischen Formen ist also unveränderlich, auf welche Art auch X in die angegebene Form gebracht werden mag.

Ich schliesse hieran einige Sätze über die Transformation alternirender und symmetrischer Formen.

Es sei W eine Form, in der der höchste Grad nicht sämmtlich verschwindender Unterdeterminanten gleich $n - \mu$ sei, oder in der die $0, 1, \ldots \mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten noch sämmtlich verschwinden, während mindestens eine μ^{te} Unterdeterminante nicht Null ist. Bezeichnet man nun mit E_1 und E_2 die Formen

$$E_1 = X_1\,Y_1 + \ldots X_\mu\,Y_\mu$$
$$E_2 = X_{\mu+1}\,Y_{\mu+1} + \ldots X_n\,Y_n$$

so können bekanntlich stets zwei Formen U, V nicht verschwindender Determinante angegeben werden, so dass

$$U\,W\,V = E_2$$

ist. Allgemein möge vorausgesetzt werden, dass

$$U\,W\,V = E_2\,P\,E_2 \text{ [1])}$$

[1]) Bezeichnet man die Coefficienten von W durch a_{ik}, mit $a_{i_\varrho k_\sigma}$; $\varrho, \sigma = 1, \ldots n - \mu$ ein System dieser Coefficienten, dessen Determinante nicht Null ist, so lässt sich immer bewirken, dass

$$U\,W\,V = \Sigma\,a_{i_\varrho k_\sigma}\,x_{i_\varrho}\,y_{k_\sigma}$$

wird. Eine solche Transformation findet man auf folgendem Wege.

Man kann die Gleichungen

$$1)\quad \Sigma\,a_{ik}\,z_i = 0, \qquad\qquad 2)\quad \Sigma\,a_{ik}\,\zeta_k = 0$$

ist, wo die Determinante von $E_2 P E_2$ gebildet in Bezug auf die wirklich vorkommenden $n-\mu$ Variabelnpaare nicht Null ist.

Aus dieser Gleichung folgt nun

$$U W U' = E_2 P E_2 V^{-1} U'.$$

Ist W eine alternirende oder symmetrische Form, so ist die rechte Seite — sie sei durch Ω bezeichnet — von demselben Charakter. Aus den Gleichungen

$$E_1 \Omega = 0, \qquad \Omega E_1 = 0$$

folgt aber

$$\Omega = E_2 \Omega E_2$$

oder

$$U W U' = E_2 \Omega E_2.$$

Und die Determinante von $E_2 \Omega E_2$ kann nicht verschwinden. Denn die Form

$$(E_1 + E_2 P E_2) V^{-1} U' = M$$

hat eine nicht verschwindende Determinante; andererseits ist aber

$$|M| = |V^{-1}| \, |U'| \, |E_2 \Omega E_2|.$$

Auf demselben Wege erhält man für

$$V' U^{-1} E_2 P E_2 = \Omega_1$$

auch

$$V' W V = E_2 \Omega_1 E_2.$$

---

dadurch befriedigen, dass man die z den Gleichungen 1) für $k = k_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots n - \mu$ und die ζ den Gleichungen 2) für $i = i_\varrho$, $\varrho = 1 \ldots n - \mu$ unterwirft. Diese Gleichungen liefern dann die z_{i_ϱ}, ausgedrückt durch die willkürlich bleibenden übrigen z, und ebenso die ζ_{k_σ}, ausgedrückt durch die willkürlich bleibenden übrigen ζ. Setzt man nun

$$x_i = \xi_i + z_i, \qquad y_k = \eta_k + \zeta_k,$$

so wird

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = \Sigma a_{ik} \xi_i \eta_k$$

und man kann also, indem man diejenigen ξ, η gleich Null setzt, deren Indices bezüglich **nicht** den Reihen $i_1 \ldots i_{n-\mu}$; $k_1 \ldots k_{n-\mu}$ angehören, erreichen, dass

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = \Sigma a_{i_\varrho k_\sigma} \xi_{i_\varrho} \eta_{k_\sigma}$$

wird.

Man hat also zwei cogrediente Transformationen, welche die symmetrische oder alternirende Form W in eine symmetrische oder alternirende Form von nicht verschwindender Determinante überführen, sobald $U\,W\,V = E_2\,P\,E_2$ ist. Diese beiden Transformationen fallen nur dann zusammen, wenn $V = U'$ ist, d. h. wenn schon die vorausgesetzte Transformation eine cogrediente ist.

Dieser Satz kann in folgender Weise umgekehrt werden. Sind U, V zwei Transformationen, welche die Form W cogredient in Formen transformiren, welche nur die in E_2 vorkommenden Variabeln enthalten, also

$$U\,W\,U' = E_2\,\Omega\,E_2$$
$$V'\,W\,V = E_1\,\Omega_1\,E_2$$

so ist

$$U\,W\,V = E_2\,\Omega\,E_2\,U'^{-1}\,V = U\,V'^{-1}\,E_2\,\Omega_1\,E_2 = E_2\,P\,E_2,$$

also giebt es auch zwei Substitutionen U, V, welche die Form W in den analog gebauten Ausdruck $E_2\,P\,E_2$ verwandeln.

Eine allgemeine Form W kann nur unter ganz besonderen Bedingungen cogredient in die Form $E_2\,P\,E_2$ transformirt werden. Aus der Gleichung

$$U'\,W\,U = E_2\,P\,E_2$$

folgt nämlich

$$U'\,W'\,U = E_2\,P'\,E_2,$$

also auch

$$U'\,(W + \varrho\,W')\,U = E_2\,(P + \varrho\,P')\,E_2.$$

Damit also W cogredient in eine nur die Variabeln von E_2 enthaltende Form transformirt werden könne, muss die Determinante

$$|\,W + \varrho\,W'\,|$$

mit allen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten für jedes ϱ verschwinden. Und ist umgekehrt durch zwei von ϱ unabhängige Substitutionen U, V die Schaar $|\,W + \varrho\,W'\,|$ in eine Schaar

$P + \varrho\, Q$ transformirbar, welche nur die Variabeln der Form E_2 enthält, also

$$U(W + \varrho\, W')\, V = E_2\,(P + \varrho\, Q)\, E_2,$$

so folgt

$$U\, W\, U' = E_2\, P\, E_2\, V^{-1}\, U'$$
$$U\, W'\, U' = E_2\, Q\, E_2\, V^{-1}\, U'$$

also auch

$$U\, W\, U' = U\,(V')^{-1}\, E_2\, Q'\, E_2,$$

d. h. es ist U und ebenso V eine cogrediente Transformation, welche die Form W in eine nur die Variabeln der Form E_2 enthaltende Form transformirt.

Im Folgenden wird es sich häufig um die alternirenden oder symmetrischen Lösungen X einer Gleichung von der Form

$$A\, X = 0$$

handeln. In dieser Beziehung sei also W eine Form, für die

$$U'\, W\, U = E_2\, P\, E_2$$

sei. Die Lösungen der Gleichung

$$W\, X = 0$$

sind zugleich die von

$$U'\, W\, U\, U^{-1}\, X\, (U')^{-1} = 0.$$

Die Form $U^{-1}\, X\, (U')^{-1}$ muss also der einzigen Bedingung genügen, dass

$$E_2\, U^{-1}\, X\, (U')^{-1} = 0$$

ist, da $|\, E_2\, P\, E_2\,|$ als von Null verschieden vorausgesetzt wird. Soll nun X altern oder symmetrisch sein, so folgt aus dieser Bedingung, dass auch

$$U^{-1}\, X\, (U')^{-1}\, E_2 = 0$$

ist, also

$$U^{-1}\, X\, (U')^{-1} = E_1\, U^{-1}\, X\, (U')^{-1}\, E_1$$

eine alterne oder symmetrische Form ist, welche nur die in E_1 vorkommenden Variabeln enthält. Man hat also den folgenden Satz:

Ist W eine alternirende (oder symmetrische) Form, deren $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten noch sämmtlich verschwinden, so giebt es nur

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2}, \qquad \left(\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)$$

von einander linear unabhängige symmetrische (alternirende) Formen X, welche der Gleichung

$$WX = 0$$

genügen. Aus diesen lässt sich dann natürlich jede andere Lösung dieser Gleichung zusammensetzen.

§ IV.

Bestimmung der Zahlen p, q; P, Q.

Erster Fall.

Im Folgenden soll eine symmetrische Form beständig durch Σ, eine alternirende durch A bezeichnet werden. Die Gleichung I des § I

$$SY + S'Y' = 0$$

lässt sich, wenn $Y' + Y = \Sigma$, $Y' - Y = A$ gesetzt wird, in der Gestalt

1) $$(S' + S)\Sigma + (S' - S)A = 0$$

schreiben. Es sei nun zunächst $|S' + S|$ nicht gleich Null, während etwa noch die $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $|S' - S|$ sämmtlich verschwinden. Alsdann gehört zu jeder Lösung der aus 1) folgenden Gleichung (vgl. § II, S. 227)

2) $$(S' - S)A(S' + S) - (S' + S)A(S' - S) = 0$$

eine vollständig bestimmte Form Σ vermöge der Gleichung 1); den p Formen

$$A_1 A_2 \ldots A_p$$

entsprechen also zunächst auch ebenso viele Formen Σ. Diese letzteren sind aber nicht von einander unabhängig.

Denn unter den Formen A befinden sich (vgl. § III, S. 235) genau

$$\mu\,\frac{(\mu-1)}{2}$$

von einander unabhängige, welche die Gleichung

$$(S'-S)\,A=0$$

befriedigen, während die übrigen linear unabhängigen A_i dieser Gleichung nicht genügen.

Die der ersten Klasse von Formen A zugehörigen Σ sind sämmtlich identisch Null zufolge der Gleichung 1), während zwischen den Σ_i, welche zu den übrigen A_i gehören, unmöglich eine lineare Relation stattfinden kann. Denn wegen der Identität

$$(S'+S)\,\Sigma\,(\alpha_i\,\Sigma_i)+(S'-S)\,\Sigma\,\alpha_i\,A_i=0$$

würden alsdann auch die A_i nicht von einander oder von den bereits ausgeschiedenen A unabhängig sein. Die Anzahl der symmetrischen Formen, welche der Gleichung 2) genügen, ist daher mindestens gleich der der Formen A_i, also

3) $$q=p-\mu\,\frac{(\mu-1)}{2}+X$$

wo X eine positive ganze Zahl oder Null ist.

Man kann nun eine ganz analoge Untersuchung in Bezug auf die Gleichung

$$S\,Y-S'\,Y'=0$$

oder

4) $$(S+S')\,A+(S'-S)\,\Sigma=0$$

anstellen. Man erhält dann zu jedem Σ, welches der Gleichung

$$(S+S')\,\Sigma\,(S'-S)-(S'-S)\,\Sigma\,(S'+S)=0$$

genügt, ein bestimmtes A, und hieraus folgt ganz wie vorhin

5) $$p=q-\mu\,\frac{(\mu+1)}{2}+Y$$

wo Y ebenfalls eine positive ganze Zahl oder Null ist.

Aus den Gleichungen 3) und 5) und nach § II, S. 228 folgt:

$$2\,q = N - \mu\,\frac{(\mu - 1)}{2} + X = 2\,Q$$

$$2\,p = N - \mu\,\frac{(\mu + 1)}{2} + Y = 2\,P$$

$$X + Y = \mu^2.$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so kann $\mu = 0$ sein. In diesem Falle hat man also,

$$P = Q = \frac{N}{2}.$$

Ist dagegen n ungerade, und verschwindet nur die Determinante $|S' - S|$ selbst, so ist $X + Y = 1$. Hieraus ergiebt sich, da N jetzt nothwendig eine ungerade Zahl ist,

$$P = \frac{N-1}{2},$$

$$Q = \frac{N+1}{2}.$$

Eine ganz ähnliche Untersuchung lässt sich nun in dem Falle anstellen, wo $|S' - S|$ als von Null verschieden vorausgesetzt wird. Verschwinden alsdann noch die $\nu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $|S + S'|$, so findet man

$$p = q - \frac{\nu\,(\nu + 1)}{2} + X_1,$$

$$q = p - \frac{\nu\,(\nu - 1)}{2} + Y_1,$$

$$X_1 + Y_1 = \nu^2,$$

und somit nach der zu Ende des § II gemachten Bemerkung

$$2\,p = N - \frac{\nu\,(\nu + 1)}{2} + X_1 = 2\,Q,$$

$$2\,q = N - \frac{\nu\,(\nu - 1)}{2} + Y_1 = 2\,P.$$[1]

[1] Ich habe die hier entwickelten Formeln, die an sich nur eine sehr ungenaue Grenze ergeben, nicht unterdrückt, um zu zeigen, wie leicht der „allgemeine Fall“ sich behandeln lässt.

Ist also bei geradem n ν gleich 0 oder 1, so ist jedesmal

$$P = Q = \frac{N}{2}.$$

Durch die vorausgehenden Formeln ist die Zahl der cogredienten und adjungirten Transformationen einer Form in sich selbst in allen den Fällen bestimmt, wo die beiden Determinanten $|S+S'|$ und $|S'+S|$ nicht gleichzeitig, und keine derselben noch mit allen ersten Unterdeterminanten verschwindet.

Für den Fall, wo die charakteristische Function $|S+\varrho S'|$ nur einfache Wurzeln hat, also $N=n$ ist, haben Christoffel und Kronecker[1]) die Zahl P und zugleich die explicite Darstellung der P Transformationen vermöge der Wurzeln jener Function gegeben. In meiner oben erwähnten Arbeit habe ich diese Methode auf den Fall ausgedehnt, wo jene Function nur einfache Elementartheiler besitzt. Da aber hierbei nur $\binom{n}{2}$ Transformationen ermittelt sind, bleibt die Aufgabe noch zu erledigen, in dem hier besprochenen Falle, und ebenso unter den weiterhin behandelten allgemeineren Voraussetzungen alle Transformationen in sich — etwa unter der Voraussetzung, dass jene Wurzeln bekannt sind — zu bestimmen, auf die ich hier nur hinweisen kann.

§ V.

Fortsetzung.

Die im vorigen § erhaltenen Resultate lassen sich noch erheblich weiter führen, wie jetzt geschehen soll. Hierzu ist ein genaueres Eingehen auf die Gleichungen 1) und 5) des § IV erforderlich.

Ist zunächst wieder $|S+S'| \mp 0$, so kann man, falls $|S'-S|$ noch mit allen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten ver-

---

1) Borchardt's Journal, Bd. 68, S. 253 und S. 273.

schwindet, durch eine cogrediente Transformation U nach § III bewirken, dass die Gleichung 1) des § IV die Form

1) $$s\,\Sigma + a\,A = 0$$

annimmt, in welcher

$$U'\,(S + S')\,U = s$$

wieder eine symmetrische,

$$U'\,(S' - S)\,U = a$$

eine alternirende Form ist, welche letztere nur von den in der Form E_2 vorkommenden $n - \mu$ Variabelnpaaren X, Y abhängt, und es ist

$$E_1 = X_1\,Y_1 + \ldots X_\mu\,Y_\mu$$
$$E_2 = X_{\mu+1}\,Y_{\mu+1} + \ldots X_n\,Y_n$$

Dabei ist bekanntlich $n - \mu$ eine gerade Zahl, denn die Determinante

$$|\,E_2\,a\,E_2\,|$$

wird als von Null verschieden vorausgesetzt. Durch die nämliche Transformation aber tritt an Stelle der Gleichung 4) jetzt

2) $$s\,A + a\,\Sigma = 0.$$

Die Symbole A und Σ bedeuten dabei wieder (siehe die Anmerkung auf S. 210) alternirende und symmetrische Formen, welche durch die cogrediente Transformation

$$(U')^{-1}$$

aus den im § IV durch eben dieselben Buchstaben bezeichneten Formen hervorgehen.

Nun muss jedes Σ, welches der Gleichung 1) genügt, auch die Gleichung

3) $$s\,\Sigma\,a - a\,\Sigma\,s = 0$$

befriedigen, und diese ist keine andere als die durch die nämlichen cogredienten Transformationen transformirte Gleichung 1) oder 1a) des § II.

Aus 3) folgt aber

4) $$E_1\, s\, \Sigma\, E_2\, (E_2\, a\, E_2) = 0$$

5) $$(E_2\, a\, E_2)\, E_2\, \Sigma\, s\, E_1 = 0$$

6) $$E_2\, s\, \Sigma_2\, E_2\, (E_2\, a\, E_2) - (E_2\, a\, E_2)\, E_2\, \Sigma\, s\, E_2 = 0.$$

Von diesen Gleichungen sind 4) und 5) unter einander identisch, denn die eine ist die conjugirte der anderen. Aus ihnen folgt, da die Determinante der eingeklammerten Form, wie oben bemerkt, nicht Null ist, dass in der Form

$$s\,\Sigma = \Sigma\, p_{ik}\, x_i\, y_k$$

alle Coefficienten p_{ik} verschwinden, deren erster Index der Reihe $1 \ldots . \mu$, deren zweiter der Reihe $\mu + 1 \ldots . n$ angehört.

Nun enthalten die Coefficienten von Σ nach Voraussetzung q willkürliche Parameter. Damit aber die Gleichung 1) befriedigt sei, müssen die weiteren Bedingungen

7) $$E_1\, s\, \Sigma\, E_1 = 0$$

8) $$E_2\, a\, A\, E_1 + E_2\, s\, \Sigma\, E_1 = 0$$

9) $$E_2\, a\, A\, E_2 + E_2\, s\, \Sigma\, E_2 = 0$$

erfüllt sein. Aus 8) und 9) folgt

$$E_2\, A\, E_1 = -(E_2\, a\, E_2)^{-1}\, (E_2\, s\, \Sigma\, E_1)$$
$$E_2\, A\, E_2 = -(E_2\, a\, E_2)^{-1}\, (E_2\, s\, \Sigma\, E_2)$$

und durch diese Gleichungen sind die Coefficienten der gesuchten alternirenden Form A völlig bestimmt, bis auf $\frac{\mu\,(\mu-1)}{2}$, in

$$E_1\, A\, E_1$$

auftretende, die vollkommen willkürlich bleiben. Dafür aber sind die Coefficienten von Σ den weiteren Bedingungen 7) zu unterwerfen. Da hiernach alle Coefficienten p_{ik} von $s\,\Sigma$, deren Indices der Reihe $1, 2 \ldots \mu$ entnommen sind, gleich Null sein müssen, scheint die Anzahl der hieraus entspringenden Bedingungen gleich μ^2 zu sein. Eine genauere Ueberlegung zeigt aber, dass diese Zahl viel zu gross ist. In der That ergiebt sich nach der aus 5) folgenden Gleichung

$$E_1\, s\, \Sigma\, E_2 = 0$$

die Relation

$$E_1\, s\, \Sigma\, s\, E_1 = E_1\, s\, \Sigma\, E_1\, (E_1\, s\, E_1)$$

und daher folgt bereits aus dem Verschwinden der symmetrischen Form

$$E_1\, s\, \Sigma\, s\, E_1 = 0$$

die Gleichung 7), sobald nur die Determinante von

$$E_1\, s\, E_1$$

nicht verschwindet. Unter dieser Voraussetzung müssen also die Coefficienten der symmetrischen Form Σ nur noch

$$\frac{\mu\,(\mu+1)}{2}$$

weiteren Bedingungen unterworfen werden und die Anzahl der in Σ willkürlich bleibenden Parameter ist sonach mindestens gleich

$$q - \frac{\mu\,(\mu+1)}{2}$$

Nach dem zu Anfang des § III aufgestellten Hülfssatze ist daher die Anzahl der wesentlichen Parameter in der Lösung der Gleichung 1) des § I

10) $$P = q - \frac{\mu\,(\mu+1)}{2} + \frac{\mu\,(\mu-1)}{2} + X,$$

wo X eine positive ganze Zahl oder Null ist. Geht man zweitens von der Gleichung 2) aus, so erhält man auf genau demselben Wege die Gleichung

11) $$Q = p - \frac{\mu\,(\mu-1)}{2} + \frac{\mu\,(\mu+1)}{2} + Y$$

oder wegen der aus 10) und 11) durch Addition folgenden Gleichung

$$X + Y = 0$$

die nur durch $X = 0$, $Y = 0$ befriedigt werden kann,

I) $$\begin{cases} 2P = 2p = N - \mu \\ 2Q = 2q = N + \mu, \end{cases}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass $n - \mu$ eine gerade Zahl sein wird, da die Determinante der alternirenden Form a nicht verschwinden soll.

Wenn dagegen die Determinante von $S' - S$ nicht verschwindet, aber die von $S' + S$ noch mit allen $\nu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten Null ist, so kann man die Gleichung 1) des § I in der Form 1) voraussetzen, in welcher s nur noch von den in E_2 vorkommenden Variabeln abhängt und die Determinante $|E_2\, s\, E_2|$ nicht Null ist. Setzt man jetzt, von der Gleichung 1) ausgehend,

$$s\, A\, a - a\, A\, s = 0,$$

so erhält man p alternirende Formen A, welche den Bedingungen

4′) $$E_1\, a\, A\, E_2\, (E_2\, s\, E_2) = 0$$

5′) $$(E_2\, s\, E_2)\, E_2\, A\, a\, E_1 = 0$$

6′) $$E_2\, a\, A\, E_2\, (E_2\, s\, E_1) - (E_2\, s\, E_2)\, E_2\, A\, a\, E_2 = 0$$

genügen. Diese Formen liefern vermöge der Gleichungen

$$E_2\, \Sigma\, E_1 + (E_2\, s\, E_2)^{-1}\, E_2\, a\, A\, E_1 = 0$$
$$E_2\, \Sigma\, E_2 + (E_2\, s\, E_2)^{-1}\, E_2\, a\, A\, E_2 = 0$$

eine bis auf $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ willkürliche, in $E_1\, \Sigma\, E_1$ auftretende, Parameter bestimmte symmetrische Form Σ, falls die Parameter in A den weiteren Bedingungen

7′) $$E_1\, a\, A\, E_1 = 0$$

unterworfen werden. Da aber nach 4′)

$$E_1\, a\, A\, a\, E_1 = E_1\, a\, A\, E_1\, (E_1\, a\, E_1)$$

ist, so repräsentirt die Gleichung 7′) nur

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2}$$

weitere Bedingungen für die A, so lange die Determinante von

$$E_1 \, a \, E_1$$

nicht verschwindet. Man erhält daher

$$P = p - \frac{\nu(\nu-1)}{2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} + X_1$$

und ebenso mit Hülfe von 2)

$$Q = q - \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} + Y_1$$

oder $X_1 = Y_1 = 0$, und endlich, wegen $P = q$, $Q = p$ (vgl. am Ende von § II)

$$\mathrm{I}') \qquad \begin{cases} 2P = 2q = N + \nu \\ 2Q = 2p = N - \nu. \end{cases}$$

Hiebei ist natürlich n eine gerade Zahl, da sonst $|S' - S|$ Null wäre. Aber auch ν muss eine gerade Zahl sein, da die Voraussetzung $|E_1 \, a \, E_1| \neq 0$ sonst nicht zutrifft.

Ueber die beiden für die Formeln I und I′ beziehungsweise nothwendigen Voraussetzungen

$$|E_1 \, s \, E_1| \neq 0, \qquad |E_1 \, a \, E_1| \neq 0$$

möge hier noch folgende Bemerkung hinzugefügt werden, die sich auf die invariante Natur dieser Bedingungen bezieht.

Geht eine Form F durch die Substitutionen U, V in eine Form $E_2 \, P \, E_2$ über, welche nur die in E_2 vorkommenden Variabeln enthält, und deren Determinante in Bezug auf diese letzteren nicht verschwindet, und geht gleichzeitig eine Form Φ durch dieselbe Substitution in eine Form M über, so ist die Form $E_1 \, M \, E_1$ eine Invariante in dem Sinne, dass die Eigenschaft von $E_1 \, M \, E_1$, mit allen Unterdeterminanten bis zu denen der $k - 1^{\text{ten}}$ Ordnung inclusive zu verschwinden, bei allen Transformationen U, V der angegebenen Art erhalten bleibt.

Der Beweis dieses Satzes kann auf folgende Art geführt werden.

Ist nämlich

12) $$U F V = E_2 P E_2$$

13) $$U \Phi V = M$$

14) $$U_1 F V_1 = E_2 P_1 E_2$$

15) $$U_1 \Phi V_1 = M_1,$$

so folgt aus 12) und 14)

$$E_2 P_1 E_2 = U_1 U^{-1} E_2 P E_2 V^{-1} V_1.$$

Hieraus geht hervor, dass die Formen

$$E_1 U_1 U^{-1} E_2 P E_2$$
$$E_2 P E_2 V^{-1} V_1 E_1$$

verschwinden, so dass also zufolge der Voraussetzung

$$| E_2 P E_2 | \neq 0$$

die Formen

16) $$E_1 U_1 U^{-1} E_2$$
$$E_2 V^{-1} V_1 E_1$$

beide verschwinden müssen. Setzt man nun

$$U_1 \Phi V_1 = U_1 U^{-1} M V^{-1} V_1 = U_1 U^{-1} E_1 M E_1 V^{-1} V_1$$
$$+ U_1 U^{-1} E_1 M E_2 V^{-1} V_1 + U_1 U^{-1} E_2 M E_1 V^{-1} V_1$$
$$+ U_1 U^{-1} E_2 M E_2 V^{-1} V,$$

so folgt aus der unter 16) gemachten Bemerkung

$$E_1 U_1 \Phi V_1 E_1 = E_1 M_1 E_1 = E_1 U_1 U^{-1} E_1 (E_1 M E_1) E_1 V^{-1} V_1 E_1$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\Omega_1 = E_1 U_1 U^{-1} E_1, \qquad \Omega_2 = E_1 V^{-1} V_1 E_1$$

gesetzt wird,

17) $$E_1 M_1 E_1 = \Omega_1 E_1 M E_1 \Omega_2.$$

Es ist aber nach 16) ebenfalls

$$U_1 U^{-1} = \Omega_1 + E_2 U_1 U^{-1} E_1 + E_2 U_1 U^{-1} E_2$$
$$V^{-1} V_1 = \Omega_2 + E_1 V^{-1} V_1 E_2 + E_2 V^{-1} V_1 E_2,$$

also

$$| U_1 U^{-1} | = | \Omega_1 | \, | E_2 U_1 U^{-1} E_2 |$$
$$| V^{-1} V_1 | = | \Omega_2 | \, | E_2 V^{-1} V_1 E_2 |.$$

Da nun die Determinanten linkerhand sicher von Null verschieden sind, sind es auch die beiden Determinanten Ω_1 und Ω_2. Der nur von den in E_1 enthaltenen Variabeln abhängige Theil der Form M_1 hat daher, wie 17) zeigt, die Eigenschaft durch die Substitution Ω_1, Ω_2 aus $E_1 M E_1$ hervorzugehen, wie zu zeigen war.

Die Formeln I (I′) beantworten daher die im Eingange dieser Arbeit gestellte Frage vollständig, sobald die Determinanten $|S' + S|$, $(|S' - S|)$ nicht verschwinden, und ausserdem eine gewisse Invariante[1]) der Form $S' - S$, $(S' + S)$ von Null verschieden ist.

Die obigen Abzählungen können durch eine directe Rechnung bestätigt werden. In derselben sollen die Indices $j, j', j'' \ldots$ die Werthe $\mu + 1 \ldots . n$, die Indices $i, i', i'', \ldots$ die Werthe $1 \ldots \mu$, endlich die Indices $l, m \ldots$ die Werthe $1 \ldots n$ durchlaufen, und jedem $\sum$ Zeichen dasjenige System der Indices, in Bezug auf welches summirt wird, beigefügt werden. Bezeichnet man ferner die Coefficienten der Formen

$$s, \; a, \; \Sigma, \; A$$

in derselben Reihenfolge durch

$$s_{pq}, \; a_{pq}, \; \sigma_{pq}, \; \alpha_{pq},$$

wobei

$$s_{pq} = s_{qp}, \; \sigma_{pq} = \sigma_{qp}, \; a_{pq} = - a_{qp}, \; \alpha_{pq} = - \alpha_{qp},$$

ist, so treten an Stelle der Gleichungen 4) und 6) die folgenden

4a) $$\sum_m \sigma_{jm} s_{mi'} = 0$$

6a) $$\sum_{l, j''} (s_{jl} \sigma_{lj''} a_{j''j'} - a_{jj''} \sigma_{j''l} s_{lj'}) = 0.$$

[1]) Vgl. die Bemerkung am Ende von § VII.

Die Anzahl der Gleichungen 4a) beträgt $\mu(n-\mu)$, die Gleichungen 6a) zerfallen in $n-\mu$ Gleichungen

$$\sum_{l\,j''} s_{jl}\,\sigma_{lj''}\,a_{j''j} = 0,$$

entsprechend dem Falle $j = j'$ und $\frac{1}{2}(n-\mu)(n-\mu-1)$ weitere Gleichungen, wenn $j \neq j'$. Zu diesen kommen endlich noch die Bedingungen

7a)
$$\sum_m \sigma_{jm}\,s_{mi'} = 0.$$

Alsdann gehört, wie oben bemerkt, zu jedem System der σ, welches diese Gleichungen befriedigt, ein System von Grössen α_{pq}, in dem $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ Coefficienten ganz willkürlich angenommen werden können. Nun enthalten die Gleichungen 4a), 6a) nur diejenigen σ, in denen wenigenstens einer der Indices aus der Reihe der j entnommen ist, sie lassen daher die $\mu\frac{(\mu+1)}{2}$ Grössen $\sigma_{ii'}$ ganz willkürlich, es besitzen also die Gleichungen 4a), 6a) genau

$$q - \frac{\mu(\mu+1)}{2}$$

von einander unabhängige Lösungen σ.

Die Gleichungen 7a) bestimmen aber die Grössen $\sigma_{ii'}$ vermöge der Grössen σ_{jm} und zwar so, dass erstere von selbst ein System symmetrischer Grössen bilden, so dass keine neuen Bedingungen für die σ_{jm} hinzutreten, sobald vorausgesetzt wird, dass die aus den $s_{ii'}$ gebildete μ reihige Determinante, welche oben durch $|E_1\,s\,E_1|$ bezeichnet wurde, nicht verschwindet. Um dies zu zeigen, bringe man die Gleichungen 7a) in die Form

7a)
$$\sum_{i''} s_{ii''}\,\sigma_{i''i'} + \sum_j s_{ij}\,\sigma_{ji'} = 0,$$

multiplicire dieselben mit den Unterdeterminanten $S_{ii'''}$ der Determinante

$$|s_{ii'''}| = S$$

und summire über i. Dann entsteht

$$S\,\sigma_{i''' i'} + \sum_{i,j} s_{ij}\,\sigma_{ji'}\,S_{i i'''} = 0. \tag{18}$$

Entfernt man hierin die aus der Gleichung 4a) oder

$$\sum_{i'} \sigma_{ji'}\,s_{i' i} + \sum_{j'} \sigma_{jj'}\,s_{j' i} = 0$$

folgenden Werthe der $\sigma_{ji'}$, nämlich

$$S\,\sigma_{ji'} = -\sum_{j',i} \sigma_{jj'}\,s_{j' i}\,S_{i i'}$$

so wird aus 18)

$$S^2\,\sigma_{i''' i'} = \sum_{i,j,j',i''} s_{ij}\,\sigma_{jj'}\,s_{j' i''}\,S_{i'' i'}\,S_{i i'''}$$

und hieraus folgt durch einfache Vertauschungen gleichwerthiger Indices, dass

$$\sigma_{i' i'''} = \sigma_{i''' i'}$$

ist, wie zu zeigen war. Damit ist zugleich die Formel 10) hergeleitet, in welcher $X = 0$ zu setzen ist.

Eine ganz ähnliche Betrachtung lässt sich nun auch an den Gleichungen 4′), 6′), 7′) vornehmen, mit der einzigen Modification, dass die Indices j jetzt von $\nu + 1 \ldots n$, die Indices i von $1 \ldots \nu$ gehen.

Man erhält nämlich an Stelle der Gleichungen 4′), 6′) jetzt

$$\sum_{l} a_{il}\,a_{lj} = 0 \tag{4′a}$$

$$\sum_{l\,j''} (a_{jl}\,a_{lj''}\,s_{j''j'} - s_{jj''}\,a_{j''l}\,a_{lj'}) = 0 \tag{6′a}$$

und diese Gleichungen 6′a) repräsentiren nur

$$\frac{1}{2}(n-\nu)\,(n-\nu-1)$$

Gleichungen, da sie für $j = j'$ von selbst erfüllt sind.

Die Bedingungen 4′a), 6′a) lassen

$$p - \frac{\nu(\nu-1)}{2}$$

wesentliche Parameter für die α zu. Aus den Bedingungen 7′) oder

7′a) $$\sum_{i''} \alpha_{i\,i''}\, a_{i''\,i'} + \sum_{j'} \alpha_{i\,j'}\, a_{j'\,i'} = 0$$

findet man unter der Voraussetzung, dass die mit

$$|\, E_1\, a\, E_1 \,| = A = |\, a_{i'\,i''} \,|$$

bezeichnete Determinante, deren Unterdeterminanten $A_{i'\,i''}$ seien, nicht verschwindet,

18′) $$A\, \alpha_{i\,i'''} + \sum_{j'\,i'} \alpha_{i\,j'}\, a_{j'\,i'}\, A_{i'''\,i'} = 0,$$

während aus den Gleichungen 4′a), oder

$$\sum_{i''} \alpha_{i''\,j'}\, a_{i''\,i'} + \sum_{j''} \alpha_{j''\,j'}\, a_{j''\,i'} = 0$$

durch Multiplication mit $A_{i\,i'}$ und Summation nach i' folgt

$$A\, \alpha_{i\,j'} + \sum_{j'',\,i'''} \alpha_{j''\,j'}\, a_{j''\,i'''}\, A_{i\,i'''} = 0.$$

Setzt man diesen Werth in 18′) ein, so folgt

$$A^2\, \alpha_{i'''\,i} - \sum_{j',\,i',\,i''',\,j''} a_{j'\,i'}\, A_{i\,i'}\, \alpha_{j''\,j}\, A_{i'''\,i''}\, a_{j''\,i''} = 0$$

und hieraus durch Vertauschung der Indices, dass die so bestimmten Grössen α ein alternirendes System bilden. Dadurch ist zugleich der unter 11) angegebene Werth von Q bestätigt.

Endlich wird man sich ohne Mühe davon überzeugen, dass bei der Untersuchung der zu den Gleichungen 4), 6), 7) analogen aus der Betrachtung von 2) entstehenden Relationen ganz entsprechende Verhältnisse stattfinden, deren besondere Darlegung hier unterbleiben mag.

§ VI.

Bestimmung der Zahlen P, Q, p, q.

Zweiter Fall.

Die vorhergehenden Betrachtungen beruhten auf dem Umstande, dass von vorneherein drei Relationen zwischen den gesuchten Zahlen P, Q, p, q vorhanden waren. Es soll jetzt angenommen werden, dass für die Form

$$S + S'$$

noch die $\mu - 1^{\text{ten}}$, für

$$S' - S$$

noch die $\nu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwinden. Alsdann lässt sich $S + S'$ durch cogrediente Transformation verwandeln in die nur von den $n - \mu$ in E_2 vorkommenden Variabeln abhängige Form s und bei dieser Transformation geht $S' - S$ über in a. Ebenso geht auch $S' - S$ bei einer anderen cogredienten Transformation in die alternirende, nur von den $n - \nu$ in E_2' vorkommenden Variabeln abhängende Form a', gleichzeitig aber $S' + S$ in s' über. Dabei ist $S = E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$. Endlich soll noch vorausgesetzt werden, dass die beiden Determinanten

$$|E_1 \, a \, E_1|, \quad |E_1' \, s_1 \, E_1'|$$

von Null verschieden sind, und gleiches gilt selbstverständlich von

$$|E_2 \, s \, E_2|, \quad |E_2' \, a' \, E_2'|.$$

Ich betrachte nun zuerst die der Gleichung I des § I äquivalente Gleichung

$$s \Sigma + a A = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung

$$a A s - s A a = 0 \tag{2}$$

hat p Lösungen, und zu p_1 von ihnen gehört jedesmal nach der in § V geführten Rechnung eine ganz bestimmte Form Σ vermöge der Gleichungen

$$\begin{gathered} E_2 \, s \, E_2 \, E_2 \, \Sigma \, E_1 + E_2 \, a \, A \, E_1 = 0 \\ E_2 \, s \, E_2 \, E_2 \, \Sigma \, E_2 + E_1 \, a \, A \, E_2 = 0 \\ E_1 \, a \, A \, E_2 = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

falls noch die Bedingung

$$E_1 \, a \, A \, E_1 = 0 \tag{4}$$

hinzugefügt wird, — bis auf die in $E_1 \Sigma E_1$ auftretenden $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ willkürlich bleibenden Coefficienten, wobei

$$p_1 = p - \frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

ist. Die Formen A, welche die Gleichung 2) erfüllen, zerfallen nun in drei Klassen. Die erste Klasse besteht aus denjenigen Formen A, für die

$$A\,a = 0$$

ist, d. h. für Formen A, welche $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ willkürliche Parameter enthalten. Aber zu diesen Formen A gehören, den Gleichungen 3) zufolge, nur Formen Σ, deren Coefficienten, soweit sie aus diesen Gleichungen bestimmt werden, sämmtlich verschwinden.

Die zweite Klasse besteht aus den Formen A, für die

5) $$s\,A = 0$$

ist. Die Bedingung 2) ist dann erfüllt; aber diese A liefern nur dann Formen Σ, wenn nach 3) und 4)

6) $$E_1\,a\,A = 0$$

ist. Nun folgt aus 5) aber

$$E_2\,A = 0$$

und aus $E_1\,a\,A = E_1\,a\,E_1\,A + E_1\,a\,E_2\,A = E_1\,a\,E_1\,A$ zufolge der eben gefundenen Gleichung

$$E_1\,A = 0.$$

Mithin ist A selbst identisch Null; die Formen dieser Klasse sind unter den p_1 überhaupt nicht mit einbegriffen.

Die Formen Σ, deren aus den Gleichungen 3) folgende Coefficienten aus den A herstammende Parameter enthalten, gehören daher ausschliesslich zu den Formen A der dritten Klasse, für die weder

$$A\,a \qquad \text{noch} \qquad A\,s$$

verschwindet.

Jeder in diesen A vorkommende Parameter muss nun aber auch in Σ auftreten. Aber es genügt nicht, nur dies nachzuweisen; vielmehr muss gezeigt werden, dass jeder in den A vorkommende wesentliche Parameter auch ein wesentlicher Parameter für die Σ wird. Zu diesem Zwecke bezeichne man die unabhängigen Formen der dritten Klasse durch

$$A_1\, A_2\, \ldots\, A_\varrho,$$

dann ergeben sich vermöge der Gleichungen 3) ebenso viele Formen

$$\Sigma_1\, \Sigma_2\, \ldots\, \Sigma_\varrho.$$

Gesetzt nun, es wäre

$$\sum (\alpha_k\, \Sigma_k) = 0,$$

also diese Formen nicht von einander unabhängig, so wäre auch nach den Gleichungen 3) und 4)

$$\sum a\, (A_k\, \alpha_k) = 0,$$

d. h. unter den Werthen der A_ϱ wären Formen erster Klasse mitgezählt — im Widerspruch mit der Voraussetzung.

Demnach enthalten die Formen Σ, soweit sie der Gleichung 1) genügen, sicher

$$p - \frac{\nu(\nu-1)}{2} - \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \frac{\mu(\mu+1)}{2}$$

wesentliche Parameter. Nun genügt aber jede dieser Formen zugleich der Gleichung

5) $$a\, \Sigma s - s\, \Sigma a = 0.$$

Unter den q Lösungen derselben befinden sich die bereits bei der soeben ausgeführten Analyse bemerkten

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2}$$

Formen, für die 1) deshalb erfüllt ist, weil $A\, a$ und Σs gleichzeitig verschwinden. Dagegen gehören zu den Lösungen von 5) auch noch diejenigen, für die

$$\Sigma a = 0$$

ist. Lässt sich nun zeigen, dass keine dieser $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ Formen Σ zu den vorhin gefundenen gehören kann, so hat man

$$6)\ q - \frac{\nu(\nu+1)}{2} = p - \frac{\nu(\nu-1)}{2} - \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \frac{\mu(\mu+1)}{2} + X,$$

wo X eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet. Um dies nachzuweisen, gehe man noch einmal zu der Gleichung 1) zurück. Durch die cogredienten Transformationen

$$U' a U = a', \qquad U' s U = s'$$
$$U^{-1} \Sigma U'^{-1} = \Sigma', \qquad U^{-1} A U'^{-1} = A'$$

gehen die Gleichungen 1) und 5) über in

$$1')\qquad s' \Sigma' + a' A' = 0$$
$$5')\qquad a' \Sigma' s' - s' \Sigma' a' = 0.$$

Diese Gleichung ist allerdings erfüllt, wenn $\Sigma' a' = 0$ ist. Aber zu diesen Werthen von Σ' können nie Werthe von A' gehören, so lange Σ' von Null verschieden ist. Denn vermöge 1') ist

$$E_1' s' \Sigma' = 0 \quad \text{oder} \quad E_1' \Sigma' = 0.$$

Wäre nun auch $a' \Sigma' = 0$, so ist wegen

$$E_2 a' \Sigma' = E_2' a' E_1' \Sigma' + E_2' a' E_2' \Sigma' = 0$$

auch

$$E_2' \Sigma' = 0,$$

mithin Σ' selbst gleich Null. Dann aber ist nach 1') $a' A' = 0$, und da

$$U' a A U'^{-1} = a' A',$$

so ist auch $a A = 0$. Demnach gehören die Werthe der A zu der ersten Klasse, die bereits ausgeschieden war, und hiermit ist der Beweis für die Gleichung 6) erbracht. Unter der Voraussetzung, dass die beiden Determinanten

$$|E_1 a E_1|, \quad |E_1' s' E_1'|$$

von Null verschieden sind, kann also die Gleichung

$$s\Sigma + aA = 0$$

nicht durch Formen A befriedigt werden, für die $As = 0$ ist, und ebenso wenig durch Formen Σ für die $\Sigma a = 0$ ist. Und ebenso lässt sich zeigen, dass die Gleichung

7) $$a\Sigma + sA = 0,$$

d. h. die Gleichung II) des § I nicht durch Formen A befriedigt wird, für die $Aa = 0$, oder durch Formen Σ, für die $\Sigma s = 0$ ist.

Eine ganz analoge, an der Gleichung 1) ausgeführte Betrachtung, bei der man zuerst die Formen Σ aus der Bedingung 5) und dann die zugehörigen Formen A ermittelt, liefert die Gleichung

8) $$p - \frac{\mu(\mu-1)}{2} = q - \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} - \frac{\mu(\mu+1)}{2} + Y.$$

Da nun aus 6) und 8) folgt

$$X + Y = 0, \qquad X = Y = 0,$$

so ergiebt sich

I) $$\begin{cases} 2p = N - \nu - \mu \\ 2q = N + \nu + \mu. \end{cases}$$

Diese Formeln bestimmen die Anzahl der alternirenden und symmetrischen Formen, welche der Gleichung 1) des § II genügen. In ihnen bedeutet aber $n-\mu$, sowie ν stets eine gerade Zahl, da nur in diesem Falle die gemachten Voraussetzungen zutreffen.

Nach dem Hülfssatze des § III findet man ferner aus der Gleichung 1), ausgehend von der Gleichung 2), für die Zahl P den Werth

$$P = q - \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + X_1$$

und ebenso, wenn man von 5) ausgeht,

$$P = p - \frac{\nu(\nu-1)}{2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} + X_2$$

und hieraus durch Addition

$$8)\qquad 2P = N + \nu - \mu + \xi,$$

wo $\xi = X_1 + X_2$ wieder eine positive ganze Zahl oder Null ist. Verfährt man ganz ebenso mit der Gleichung 7), so ergeben sich die Gleichungen

$$Q = p + \frac{\mu(\mu+1)}{2} - \frac{\mu(\mu-1)}{2} + Y_1$$

$$Q = q - \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} + Y_2,$$

mithin

$$9)\qquad 2Q = N + \mu - \nu + \eta$$

und endlich durch Addition von 8) und 9)

$$\xi + \eta = 0,$$

$$\xi = 0,\ \eta = 0,\ X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0,$$

also

$$\text{II)}\qquad \begin{cases} 2P = N + \nu - \mu \\ 2Q = N + \mu - \nu \end{cases}$$

und zugleich ergeben sich aufs Neue auch die Werthe von p, q, so dass diese letzteren Zahlen auf zwei von einander unabhängigen Wegen bestimmt sind.

Sei, um diese Theorie auf ein Beispiel anzuwenden, die Form S von vorne herein zerlegbar

$$S = s + a,$$

wo s nur $n - \nu = \mu$ Variabele aus E_1, a nur die übrigen $\nu = n - \mu$ aus E_2 enthält, und s eine symmetrische, a eine alternirende Form ist. In diesem Falle sind die übrigen Voraussetzungen ebenfalls erfüllt, da

$$|S| = |s|\,|a|,$$

also keiner der Factoren rechterhand verschwinden kann. Da nun (vgl. den folgenden §)

$$N = n + \nu(\nu - 1) + \mu(\mu - 1)$$

ist, so ergiebt sich nach II)

$$P = \frac{1}{2}[\mu(\mu - 1) + \nu(\nu + 1)].$$

Die Richtigkeit dieser Zahl lässt sich durch eine directe Untersuchung von S leicht bestätigen. Denn die Gleichung

$$s\Sigma + aA = 0$$

wird hier nur dadurch befriedigt werden können, dass

$$E_2 a A = 0 \quad \text{und} \quad E_1 s \Sigma = 0$$

sind, woraus für A und Σ sich nach § III $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ und $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ willkürliche Parameter ergeben, was mit dem für P gefundenen Werthe übereinstimmt.

Und die Gleichung

$$s\Sigma a - a\Sigma s = 0$$

liefert hier nur

$$E_2 a E_2 \Sigma E_1 s E_1 = 0,$$

wonach also Σ selbst eine symmetrische, ebenso wie s zerlegbare Form sein muss, welche

$$q = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{\mu(\mu+1)}{2}$$

willkürliche Coefficienten besitzt, wie auch aus I) hervorgeht.

§ VII.

Bestimmung der Zahl N.

Nach Herrn Frobenius ist die Zahl der mit einer Form U vertauschbaren Formen

$$N = n + 2\Sigma n_k; \quad k = 1, 2 \ldots.,$$

wo n_k der Grad des grössten gemeinsamen Factors aller Unterdeterminanten $n-k^{\text{ten}}$ Grades der charakteristischen Function von U ist.[1])

[1]) Ueber bilineare Formen, Journal für Math., Bd. 84, S. 29.

In dem vorliegenden Falle handelt es sich daher um die Untersuchung der Function

$$| S + S' \varrho |$$

oder

$$| (S + S')(1 + \varrho) + (S' - S)(\varrho - 1) |,$$

welche man durch cogrediente Transformation auf Gestalt

1) $$\omega = | s\,\xi + a\,\eta | = | s'\,\xi + a'\,\eta |$$

bringen kann, wo s, a, s', a' symmetrische und alternirende Formen bedeuten und ξ, η zur Abkürzung für $1 + \varrho$, $\varrho - 1$ gesetzt ist. Die Determinante von $s + a$ oder $s' + a'$ bleibt dabei immer von Null verschieden.

Wenn $| S' - S |$ mit allen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten noch verschwindet, so kann man voraussetzen, dass alle a_{ik}, soweit sie den Variabeln in E_1 zugehören, gleich Null sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$| E_1\, s\, E_1 | = \varDelta_1,$$
$$| E_2\, a\, E_2 | = \varDelta_2 \neq 0,$$

so giebt

2) $$\omega = \xi^\mu\, \eta^{n-\mu}\, \varDelta_1\, \varDelta_2 + \ldots$$

das Glied in der Entwicklung von ω, welches die niedrigste Potenz von ξ enthält. Die Wurzel $\varrho = -1$ ist also μ fach vorhanden, wenn $\varDelta_1$ nicht verschwindet. Und zugleich erhält man, falls man ω mit einem aus je μ willkürlichen Grössenreihen u, v gebildeten Rande versieht, für diese Determinante als von ξ unabhängiges Anfangsglied

$$\eta^{n-\mu}\, \varDelta_2\, U\, V,$$

wo U, V zwei aus den u, v allein zusammengesetzte μ reihige Determinanten sind. Die μ^{ten} Unterdeterminanten von ω verschwinden daher niemals mehr für $\xi = 0$, während dies, wie leicht zu sehen, noch bei allen $(\mu - k)^{\text{ten}}$ der Fall ist.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten, wenn $| S' + S |$ noch mit allen $\nu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten Null ist, und bei der entsprechenden cogredienten Transformation

$$|E_2' s' E_2'| = \Delta_2' \gtrless 0$$

$$|E_1' a' E_1'| = \Delta_1'$$

gesetzt wird.

Wenn nun die beiden Determinanten Δ_1 und Δ_1' nicht verschwinden, gehören zu den Wurzeln $\varrho = \pm 1$ nur einfache Elementartheiler. Aber es gilt auch umgekehrt der Satz: Damit die zu $\varrho = -1$ ($\varrho = +1$) gehörigen Elementartheiler alle einfach sind, müssen die Determinanten Δ_1 (Δ_1') von Null verschieden sein. Es ergiebt sich dies unmittelbar aus der Bemerkung, dass das Verschwinden der Unterdeterminanten sich niemals weiter als auf die $\mu - 1^{\text{ten}}$ ($\nu - 1^{\text{ten}}$) erstrecken kann, während die Vielfachheit des Wurzelfactors ξ (η) in der Determinante ω selbst jedenfalls um eine Einheit höher ist als μ (ν).

In diesem Falle lässt sich also auch ohne weitere Untersuchung der Coefficienten von $S' + S$ und $S' - S$ die Zahl N bestimmen. Aber sobald eine der beiden Determinanten verschwindet, ist dies allgemein — wenigstens auf diesem Wege — nicht mehr möglich, und dies ist auch der Grund, weshalb die Ermittelung der Zahlen P, Q, p, q (ohne besondere Voraussetzungen) über diesen Fall hinaus weitläufiger wird. Nur einige hierher gehörige Bemerkungen, die im folgenden § zur Anwendung kommen, mögen hier Platz finden.

Wenn die mit Δ_1 bezeichnete Determinante verschwindet, so kann man annehmen, dass alle die Coefficienten s_{ik}, deren einer Index aus der Reihe

$$\mu_1 + 1 \; . \; . \; . \; \mu$$

entnommen ist, während der andere der Reihe der $1 \; 2 \; . \; . \; . \; \mu$ angehört, identisch Null sind, und dass $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ ist.

Ist zunächst $\mu_2 = 1$, verschwindet also Δ_1 ohne seine ersten Unterdeterminanten, so hat ω, wie aus einer bekannten Eigenschaft schiefer Determinanten folgt, mindestens die $\mu + 2$ fache Wurzel $\xi = 0$. Dagegen liefert die Entwicklung der mit beliebigen Grössenreihen u, v einfach geränderten Determinante ω als Anfangsglied in ξ

$$\xi^{\mu-1}\,\eta^{n-\mu}\,\Delta_2\,\delta\,u_\mu\,v_\mu,$$

wo δ die $\mu-1$ reihige, von Null verschiedene Determinante derjenigen Form ist, auf welche die Form $E_1\,s\,E_1$ reducirt wurde. Unter keinen Umständen können also die ersten Unterdeterminanten der charakteristischen Function den Factor ξ in höherem als $\mu-1^{\text{ten}}$ Grade enthalten. Der erste Elementartheiler ist also mindestens 3fach, die folgenden sind sämmtlich einfach.

Wenn dagegen $\mu_2=2$ ist, hat ω mindestens den Factor $\xi^{\mu+2}$. Und die ersten Unterdeterminanten beginnen mindestens mit dem Factor ξ^μ, während die zweiten Unterdeterminanten niemals einen höheren Factor als $\xi^{\mu-2}$ erhalten können.

So fortfahrend erkennt man die Richtigkeit des folgenden Satzes.

Unter der Voraussetzung, dass die Determinante von $E_1\,s\,E_1$ mit allen μ_2-1^{ten} Unterdeterminanten verschwindet, aber weitere besondere Relationen zwischen den Coefficienten von s und a nicht stattfinden, welche eine Erhöhung von Wurzelfactoren hervorbringen können, ist bei geradem $\mu_2=2k$ der Wurzelfactor ξ in den $0, 1, 2\ \ldots\ 2k^{\text{ten}}$ Unterdeminanten $\mu+2k$, $\mu+2k-2$, $\mu+2k-4\ \ldots\ldots\ \mu-2k$ fach vorhanden, d. h. es sind zu $\varrho=-1$ gehörig $2k$ Elementartheiler gleich 2 und die übrigen sind gleich 1.

Bei ungeradem $\mu_2=2k+1$ ist dagegen der Wurzelfactor ξ in den $0, 1, 2\ \ldots\ldots\ 2k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten $\mu+2k+2$, $\mu+2k-1$, $\mu+2k-3, \ldots\ \mu-(2k-1)$ fach vorhanden, d. h. ein Elementartheiler ist gleich 3, die $2k$ folgenden gleich 2 und die übrigen gleich 1.

Ganz ähnliche Resultate ergeben sich, wenn die Determinante

$$|\,E_1'\,a'\,E_1'\,|=\Delta_1'$$

mit den ν_2-1^{ten} Unterdeterminanten verschwindet, und $\nu=\nu_1+\nu_2$ (wobei ν_1 eine gerade Zahl) ist, falls man nicht weitere Voraussetzungen über die Coefficienten von a und s hinzufügt.

Ist zunächst $\nu_2 = 1$, also ν ungerade, so hat ω mindestens den Factor $\eta^{\nu+1}$; die ersten Unterdeterminanten aber haben niemals einen höheren Wurzelfactor als $\eta^{\nu-1}$, denn die Entwicklung der einfach mit u, v geränderten Determinante beginnt mit dem Gliede

$$\Delta_2^1 \, \alpha \, u_\nu \, v_\nu \, \xi^{n-\nu},$$

wo α die von Null verschiedene Determinante derjenigen alternirenden Form ist, auf die $E_1' \, \alpha' \, E_1'$ reducirt werden konnte; ein Elementartheiler ist gleich 2; die übrigen, in gerader Anzahl vorhandenen sind gleich 1. Ist $\nu_2 = 2$, also ν gerade, so hat ω den Factor $\eta^{\nu+2}$; die ersten Unterdeterminanten haben mindestens den Factor η^ν und die zweiten keinen höheren Factor als $\eta^{\nu-2}$. So fortfahrend zeigt sich, dass für $\nu_2 = k$ k Elementartheiler gleich 2, die übrigen $\nu - k$ in gerader Zahl vorhandenen gleich 1 sind.

Bekanntlich ist die charakteristische Function $| A\xi + B\eta |$ zweier Formen A, B bei allen simultanen Transformationen von A und B eine Invariante; d. h. alle Coefficienten der nach Potenzen von ξ, η entwickelten Function sind simultane Invarianten von A und B. Verschwindet nun die Determinante von B noch mit allen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten und ist

$$| A\xi + B\eta | = C \xi^\mu \eta^{n-\mu} + \ldots,$$

wo $C \neq 0$, so gehören zu $\xi = 0$ lauter einfache Elementartheiler. Die beiden Invarianten, welche am Schlusse des § V, S. 245, erwähnt sind, sind daher die Coefficienten von $\xi^\mu \eta^{n-\mu}$, $\xi^{n-\nu} \eta^\nu$ in der Entwicklung von

$$| (S + S')\xi + (S' - S)\eta |.$$

§ VIII.

Erweiterung der vorhergehenden Untersuchungen.

Es möge jetzt angenommen werden, dass in der Gleichung

$$s\Sigma + aA = 0,$$

falls $S' - S$ durch cogrediente Transformation auf eine alternirende Form a von nicht verschwindender Determinante reducirt ist, welche nur von den in E_2 vorkommenden Variabeln abhängt, die Determinante

$$| E_1 \, s \, E_1 |$$

nicht mehr von Null verschieden ist. In diesem Falle kann durch cogrediente Transformation bewirkt werden, dass wenn man die zu E_1 gehörenden Indices

$$i = 1, 2 \ldots \mu$$

in zwei Gruppen

$$J = 1, 2 \ldots \mu_1$$
$$H = \mu_1 + 1 \ldots \mu$$

theilt, wobei $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ sein möge, alle Coefficienten von s verschwinden, deren einer Index aus der Reihe der i, der andere aus der Reihe der H entnommen ist, während die Determinante

$$S = | s_{JJ'} |$$

nicht mehr verschwindet; ihre Unterdeterminanten seien $S_{JJ'}$.

Unter dieser Voraussetzung nehmen die Gleichungen 4a) 7a) des § VI oder

1) $$\sum_m \sigma_{jm} s_{mi} = 0$$

2) $$\sum_m \sigma_{i'm} s_{mi} = 0$$

folgende Form an. Die Gleichung 1) zerlegt sich in

1a) $$\sum_{J'} \sigma_{jJ'} s_{J'J} + \sum_{j'} \sigma_{jj'} s_{j'J} = 0$$

1b) $$\sum_{j'} \sigma_{jj'} s_{j'H} = 0,$$

Gleichung 2) in

2a) $$\sum_{J'} \sigma_{iJ'} s_{J'J} + \sum_{j} \sigma_{ij} s_{jJ} = 0,$$

2b) $$\sum_{j} \sigma_{ij} s_{jH} = 0$$

und diese letzteren wieder in

2aa) $$\Sigma \sigma_{J''J'} s_{J'J} + \Sigma \sigma_{J''j} s_{jJ} = 0,$$

2ab) $$\Sigma\, \sigma_{HJ'}\, s_{J'J} + \Sigma\, \sigma_{Hj}\, s_{jJ} = 0\,,$$

2ba) $$\Sigma\, \sigma_{Jj}\, s_{jH} = 0\,,$$

2bb) $$\Sigma\, \sigma_{H'j}\, s_{jH} = 0\,;$$

in jeder dieser Gleichungen wie auch in den folgenden ist in Bezug auf diejenigen Indices zu summiren, die unter dem ΣZeichen doppelt vorkommen.

Aus den Gleichungen 2aa) folgt nun

$$S\,\sigma_{J''J'''} + \Sigma\, \sigma_{J''j}\, s_{jJ}\, S_{J'''J} = 0$$

und ebenso aus 1a)

3) $$S\,\sigma_{jJ''} + \Sigma\, \sigma_{jj'}\, s_{j'J'}\, S_{J''J'} = 0\,,$$

mithin

$$S^2\,\sigma_{J''J'''} - \Sigma\, \sigma_{jj'}\, s_{j'J'}\, S_{J''J'}\, s_{jJ}\, S_{J'''J}\,,$$

aus welcher Gleichung sich ergiebt, dass die auf diesem Wege bestimmten $\sigma_{J''J'''}$ von selbst zu einem symmetrischen System gehören. Aus den Gleichungen 2ab) folgen die Werthe der $\sigma_{HJ'}$.

Setzt man ferner den aus 3) folgenden Werth von σ_{jJ} in 2ba) ein, so entsteht:

$$\Sigma\, s_{jH}\, \sigma_{jj'}\, s_{j'J'}\, S_{J''J'} = 0\,;$$

diese Bedingung ist aber vermöge der Gleichungen 1b erfüllt. Das Gleichungssystem 2bb) ist also allein noch den Gleichungen

4) $$\begin{aligned} &\Sigma\, s_{jl}\, \sigma_{lj''}\, a_{j''j'} = 0 \\ &\Sigma\, (s_{jl}\, \sigma_{lj''}\, a_{j''j'} - a_{jj''}\, \sigma_{j''l}\, s_{lj'}) = 0 \\ &\Sigma\, \sigma_{jm}\, s_{mi} = 0 \end{aligned}$$

hinzufügen. Wie man sieht, bleiben dabei die

$$\frac{1}{2}\,\mu_2\,(\mu_2 + 1)$$

Grössen $\sigma_{HH'}$ ganz willkürlich. Die μ_2^2 Bedingungen 2bb) sind von einander unabhängig, da die Determinante von $s + a$ nicht verschwinden darf; es ist dadurch aber nicht ausgeschlossen, dass die Gleichungen 4) und 2bb) nicht von einander unabhängig sind.[1]) Man hat also

$$5)\quad P = q - \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2} - \frac{\mu_2}{2}(\mu_2 - 1) + X_1.$$

Eine ganz ähnliche Untersuchung lässt sich anstellen, unter der Voraussetzung, dass $S' + S$ durch cogrediente Transformation auf die Form s gebracht ist, welche nur noch $n - \nu$ in E_2' vorkommende Variabeln enthält, deren Determinante nicht verschwindet. Bei dieser Operation gehe nun $S' - S$ über in a'; es möge aber die Determinante

$$| E_1' a' E_1' |$$

so verschwinden, dass die Form $E_1' a' E_1'$ durch cogrediente Transformation in eine Form von ν_1 Variabeln verwandelt werden kann, deren Determinante nicht Null ist; auch sei $\nu = \nu_1 + \nu_2$ gesetzt, wobei ν_1 eine gerade Zahl ist. Alsdann ergiebt eine Rechnung, die hier nicht ausgeführt werden soll, da sie der früheren ganz analog einzurichten ist, dass zu den vorher aufgestellten Bedingungen noch weitere

$$\frac{1}{2}\nu_2(\nu_2 + 1)$$

---

[1]) Man nehme z. B. an, dass n von der Form $4k$ ist, dass die alternirende Form $S' - S$ sich auf $2k = n - \mu$ Variable reduciren lasse und $E_1 s E_1$ identisch Null ist. Alsdann geben die Gleichungen 4a) 7a), falls die Indices $\mu + 1 \ldots n$ durch j bezeichnet werden,

$$\Sigma\, \sigma_{jj'} s_{j'i} = 0$$
$$\Sigma\, \sigma_{i'j'} s_{j'i} = 0$$

und sie erfordern, dass alle $\sigma_{jj'}, \sigma_{ij}$ verschwinden. Damit sind dann aber die Gleichungen 6a) von selbst erfüllt, und man findet so

$$P = \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2} = 4k^2 = \frac{n^2}{4}.$$

Und ähnlich ist es, wenn die symmetrische Form $S' - S$ sich auf $n = 2k$ Variable reduciren lässt und die Form $E_1' a' E_1'$ identisch Null ist; man erhält

$$P = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k^2 = \frac{n^2}{4}.$$

hinzuzufügen sind, man findet also

$$6)\qquad P = p - \frac{\nu(\nu-1)}{2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} - \frac{\nu_2(\nu_2+1)}{2} + X_2,$$

wobei X_1 und X_2 wieder positive ganze Zahlen oder die Null bedeuten. Durch Addition von 5), 6) folgt also

$$2P = N + \nu - \mu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2-1) - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2+1) + \xi.$$

Auf ganz analogem Wege findet man die Gleichungen

$$7)\qquad Q = p + \frac{\mu(\mu+1)}{2} - \frac{\mu(\mu-1)}{2} - \frac{\mu_2(\mu_2+1)}{2} + Y_1,$$

$$8)\qquad Q = q - \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} - \frac{\nu_2(\nu_2-1)}{2} + Y_2$$

und hieraus durch Addition von 5), 6); 7), 8)

$$\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} 2P &= N + \nu - \mu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2-1) - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2+1) + \xi \\ 2Q &= N + \mu - \nu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2+1) - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1) + \eta \end{aligned}\right.$$

wobei

$$9)\qquad \xi = X_1 + X_2, \quad \eta = Y_1 + Y_2$$

und

$$10)\qquad \xi + \eta = \mu_2^2 + \nu_2^2$$

sein muss. Und umgekehrt findet man aus 5, 6), 7), 8)

$$p = N - P - \mu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2-1) + X_1$$

$$q = N - Q + \mu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2+1) + Y_1$$

$$p = N - Q - \nu - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1) + Y_2$$

$$q = N - P + \nu - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2+1) + X_2,$$

woraus durch Addition

$$11)\qquad X_1 + Y_1 = \mu_2^2, \quad Y_2 + X_2 = \nu_2^2,$$

sowie

$$\text{II)}\quad \begin{cases} 2p = N - \mu - \nu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2 - 1) - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2 - 1) + X_1 - Y_2 \\ 2q = N + \mu + \nu - \frac{1}{2}\mu_2(\mu_2 + 1) - \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2 + 1) + Y_1 + X_2 \end{cases}$$

folgt. Aber diese Gleichungen reichen nur in den einfachsten Fällen zur Bestimmung der Zahlen P, p . . . hin, und selbst wenn P und Q ermittelt sind, sind p und q noch nicht völlig bestimmt.

Ist z. B. $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = 0$, so ist $\xi + \eta = 1$. Da aber jetzt ν eine gerade Zahl sein muss, folgt aus der ersten Gleichung I), dass $\xi = 0$, $\eta = 1$ ist; die Zahlen P und Q bleiben also in diesem Falle ungeändert. Wenn dagegen $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = 1$, so muss ν ungerade sein und daraus folgt wieder $\xi = 0$, $\eta = 1$. Aber in dem Falle $\mu_2 = \nu_2 = 1$ lassen sich die Werthe der X, Y nicht mehr durch Congruenzen (modulo 2) bestimmen. In diesem Falle kann man sich indessen der auch sonst verwendbaren Bemerkung bedienen, dass die Zahlen P, Q durch eine weitere Specialisirung der Coefficienten von S niemals abnehmen können. Lässt man nun den Fall $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = 1$ aus dem Fall $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = 1$ hervorgehen, so hat man für den letzteren, wie gezeigt:

$$2(P) = N + \nu - \mu - 1$$
$$2(Q) = N + \mu - \nu + 1$$

und nach I)

$$2P = N + \nu - \mu - 1 + \xi \qquad \xi + \eta = 2.$$
$$2Q = N + \mu - \nu - 1 + \eta$$

Nun erfährt, wie in § VII gezeigt wurde, der von den Wurzeln $\varrho = \pm 1$ herrührende Theil von N keine Veränderung, wenn μ_2, ν_2 die Einheit nicht überschreiten. Setzt man also voraus, dass durch die eingeführte Specialisirung der Coefficienten nicht etwa in dem von den übrigen Wurzeln herrührenden Theile von N eine Zunahme stattfindet, und würde man $\eta = 0$

annehmen, so würde Q um 2 Einheiten kleiner sein als (Q). Also ist $\eta = 2$, $\xi = 0$.

Man kommt daher zu folgenden Resultaten. Unter der Voraussetzung, dass die Zahlen μ_2, ν_2 die Einheit nicht übersteigen, hat man

Erstens, wenn $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = 0$ (ν gerade)

a)
$$\begin{aligned} 2P &= N + \nu - \mu \qquad X_1 = Y_2 = X_2 = 0,\ Y_1 = 1. \\ 2Q &= N + \mu - \nu \\ 2p &= N - \mu - \nu \\ 2q &= N + \mu + \nu. \end{aligned}$$

Zweitens, wenn $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = 1$ (ν ungerade)

b)
$$\begin{aligned} 2P &= N + \nu - \mu - 1 \\ 2Q &= N + \mu - \nu + 1 \qquad X_1 = X_2 = Y_1 = 0, \\ 2p &= N - \mu - \nu + 1 \qquad Y_2 = 1. \\ 2q &= N + \mu + \nu - 1. \end{aligned}$$

Drittens, für $\mu_2 = \nu_2 = 1$ (ν ungerade), „im allgemeinen" dieselben Werthe, wie im zweiten Falle.

Es ist wohl nicht überflüssig, durch einige Beispiele die allgemeinen Untersuchungen der vorigen §§ zu bestätigen. Da weitläufigere Rechnungen nöthig werden, sobald die Gleichungen 6a) oder 6′a) des § in grösserer Zahl vorhanden sind, so wähle ich dazu die Fälle, in denen sich dieselben so weit wie möglich reduciren.

1) Die Form S bestehe aus einer allgemeinen alternirenden Form und dem Gliede $x_n y_n$. Alsdann hat man den Fall eines geraden oder ungeraden n zu unterscheiden.

Es sei n zunächst ungerade. Nun reduciren sich die Gleichungen 4′a), 6′a), 7′a) auf

$$\begin{aligned} &4'\text{a})\quad \Sigma\, a_{il}\, \alpha_{ln} = 0, \\ &7'\text{a})\quad \Sigma\, a_{il}\, \alpha_{li'} = 0 \qquad i, i' = 1, \ldots n-1;\ l = 1 \ldots n, \end{aligned}$$

die schiefe Determinante $\Delta_1' = |a_{ii'}|$ darf hier nicht verschwinden, da sonst die Determinante von S selbst Null wäre.

Demzufolge findet man aus 4'a) $\alpha_{in} = 0$ und aus 7'a) $\alpha_{li'} = 0$, $l = 1, 2 \ldots n - 1$. Es bleiben also nur $\frac{(n-1)n}{2}$ Parameter einer symmetrischen Form von $n - 1$ Variabeln willkürlich, daher $P = \frac{n(n-1)}{2}$. Denselben Werth liefert Formel II), § VI, in welcher $\mu = 1$, $\nu = n - 1$ zu setzen ist,

$$2P = n + (n-2)(n-1) + n - 1 - 1.$$

Ist dagegen n eine gerade Zahl, so ist die Determinante $\Delta_1' = 0$; aber die Determinante der a_{ik} darf hier nicht Null sein. Nimmt man an, dass alle $a_{n-1,1} \ldots a_{n-1,n-1}$ Null sind, was immer erreicht werden kann, so muss a_{nn-1} und ebenso die Determinante $|a_{ii'}|$ für $i, i' = 1, \ldots n - 2$ von Null verschieden sein, da sonst die Determinante von S verschwinden würde. Alsdann ergiebt sich aber wieder, dass alle α_{ik} verschwinden müssen und für P derselbe Werth, wie vorhin.

2) Die Form S bestehe aus einer alternirenden Form $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ und einer symmetrischen von zwei Variabeln, so dass nur $s_{n-1\,n-1}$, $s_{n-1\,n}$, s_{nn} vorkommen und ihre Determinante $s_{n-1\,n-1}\, s_{nn} - s^2_{n\,n-1}$ von Null verschieden ist.

Die Gleichungen 4'a), 6'a), 7'a) reduciren sich jetzt auf

4'a) $$\sum_l a_{il}\, \alpha_{ln} = 0, \qquad \sum a_{il}\, \alpha_{ln-1} = 0$$

7'a) $$\sum_l a_{il}\, \alpha_{li'} = 0$$

$$i, i' = 1, 2 \ldots n-2, \qquad l = 1, 2 \ldots n$$

und die einzige Gleichung

6'a) $$\sum_l a_{nl}\, \alpha_{ln}\, s_{n-1\,n-1} + \sum_l a_{nl}\, \alpha_{ln}\, s_{n\,n-1}$$
$$- \sum a_{ln-1}\, \alpha_{n-1\,l}\, s_{n\,n-1} - \sum a_{ln-1}\, \alpha_{nl}\, s_{nn} = 0, \quad l = 1, \ldots n.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Sei zunächst n gerade und die Determinante der alternen Form nicht Null. Wenn nun auch die Determinante $|a_{ii'}|$, $i, i' = 1, \ldots n-2$ nicht Null ist, so kann man aus 4a′) die α_{ln}, $\alpha_{l\,n-1}$; $l = 1 \ldots n-2$ vermöge des willkürlich bleibenden $\alpha_{n\,n-1}$ berechnen. Und die Gleichungen 7′a) ergeben die Werthe der $\alpha_{li'}$, $l = 1 \ldots n-2$, ausgedrückt durch eben dieselbe Grösse; da die Gleichung 6′a) vermöge der angegebenen Werthe von selbst erfüllt ist, so erhält man $P = \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1$, was mit der Formel $2P = n + (n-2)(n-3) + n - 2$ für $\nu = n-2$, $\mu = 0$ übereinstimmt (II, § VI).

Wenn die Determinante $|a_{ii'}| = 0$, so hat man sicher $\nu_2 \geqq 2$; dieser Fall soll hier nicht betrachtet werden.

Wenn ferner bei geraden n die Determinante der alternen Form verschwindet, so hat man $\mu = 2$, denn sie verschwindet dann mit allen ersten Unterdeterminanten, es darf aber die Determinante $|a_{ii'}|$; $i, i' = 1 \ldots n-2$ nicht mehr Null sein, denn die Determinante von S ist gleich

$$|a_{ii'}|\,(s_{n-1\,n-1} \cdot s_{nn} - s^2_{n\,n-1});$$

man findet daher für P denselben Werth wie vorhin, entsprechend dem jetzt vorliegenden Falle $\mu = 2$, $\nu = n-2$.

Ist aber zweitens n ungerade, so verschwindet auch die Determinante $|a_{ii'}|$ $i, i' = 1, \ldots n-2$. Man kann also voraussetzen, dass

$$a_{n-2,i} = 0$$

ist für $i = 1, \ldots n-2$, dagegen dürfen $a_{n-2\,n-1}$ und $a_{n-2,n}$ nicht beide Null sein und die Determinante $|a_{ii'}|$, $i, i' = 1, \ldots n-3$ ist auch nicht Null. Letzteres geht daraus hervor, dass die Determinante der Form S jetzt gleich $\Delta\,|a_{ii'}|$ ist, wenn unter Δ der Ausdruck

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{n-2\,n-1} & a_{n-2\,n} \\ a_{n-1\,n-2} & s_{n-1\,n-1} & s_{n-1\,n} \\ a_{n\,n-2} & s_{n\,n-1} & s_{nn} \end{vmatrix}$$

verstanden wird. Man erhält jetzt aus den Gleichungen 4′a)

$$\alpha_{n-1,n} = 0,$$

$$a_{i1}\,\alpha_{1n} + \,.\,.\; a_{in-3}\,\alpha_{n-3n} + a_{in-1}\,\alpha_{n-1n} = 0,$$

$$a_{i1}\,\alpha_{1n-1} + \,.\,.\; a_{in-3}\,\alpha_{n-3n-1} + a_{in}\,\alpha_{n-1n} = 0,$$

also:

$$\alpha_{in} = 0, \quad \alpha_{in-1} = 0, \quad i = 1, 2 \,.\,.\,.\, n-3,$$

so dass nur α_{n-2n}, α_{n-2n-1} willkürlich bleiben. Die Gleichungen 7′a) werden

$$\begin{aligned} a_{11}\,\alpha_{1i'} + \,.\,.\, a_{1n-3}\,\alpha_{n-3i'} + a_{1n-1}\,\alpha_{n-1i'} + a_{1n}\,\alpha_{ni'} &= 0, \\ &\vdots \\ a_{n-3}\,\alpha_{1i'} + \,.\, a_{n-3n-3}\,\alpha_{n-3i'} + a_{n-3n-1}\,\alpha_{n-1i'} + a_{n-3n}\,\alpha_{ni'} &= 0, \\ a_{n-2n-1}\,\alpha_{n-1i'} + a_{n-2n}\,\alpha_{ni'} &= 0; \end{aligned}$$

sie liefern für $i' = 1, \,.\,.\,.\, n-3$ aber das Resultat

$$\alpha_{ii'} = 0 \quad \text{für} \quad i, i' = 1, 2 \,.\,.\,.\, n-3.$$

Endlich wird die Gleichung 6′a), falls man die bereits gefundenen Werthe einsetzt:

$$\begin{gathered} a_{nn-2}\,\alpha_{n-2n-1}\,s_{n-1n-1} + a_{nn-2}\,\alpha_{n-2n}\,s_{nn-1} \\ - a_{n-1n-2}\,(\alpha_{n-2n-1}\,s_{nn-1} + \alpha_{n-2n}\,s_{nn}) = 0. \end{gathered}$$

Da aber der vorhin mit Δ bezeichnete Ausdruck von Null verschieden sein muss, so kann die noch zu befriedigende Gleichung

$$a_{n-2n-1}\,\alpha_{n-1n-2} + a_{n-2n}\,\alpha_{nn-2} = 0$$

nur durch die Werthe $\alpha_{n-1n-2} = \alpha_{nn-2} = 0$ erfüllt werden. Man findet also $P = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ und ebenso aus der Formel b) § VIII für $\nu = n-2$, $\nu_2 = 1$, $\mu = 1$

$$2P = n + (n-2)(n-3) + n - 2 - 1 - 1,$$

was damit in Einklang steht.

3) Die alternirende Form $S' - S$ möge durch cogrediente Transformation auf die Form

$$a = x_{n-1}\, y_n - x_n\, y_{n-1}$$

gebracht werden können, $S' + S$ dagegen sei dann gleich $s = \Sigma s_{ik}\, x_i\, y_k$. Alsdann besitzen die unter 4a), 6a), 7a) benutzten Indices j nur die Werthe n, $n-1$ und man erhält

4aa) $\quad \Sigma\, \sigma_{nl}\, s_{li} = 0$

4ab) $\quad \Sigma\, \sigma_{n-1\,l}\, s_{li} = 0$

7a) $\quad \Sigma\, \sigma_{il}\, s_{li'} = 0$

6aa) $\quad \Sigma\, \sigma_{nl}\, s_{l\,n-1} = 0$

6ab) $\quad \Sigma\, \sigma_{n-1\,l}\, s_{ln} = 0$

6a) $\quad \Sigma\, (s_{nl}\, \sigma_{ln} - s_{n-1\,l}\, \sigma_{l\,n-1}) = 0$

$$i, i' = 1, 2 \ldots n-2; \; l = 1, \ldots n.$$

Bei der Discussion dieses Systems sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Die Determinante $\Delta_0 = |s_{ik}|$ verschwindet nicht.

Aus den Gleichungen 4aa), 6aa) und ebenso aus 4ab), 6ab) erhält man

12) $$\begin{aligned} \sigma_{n-1\,l} &= \lambda\, S_{n-1,l} \\ \sigma_{nl} &= \mu\, S_{n,l} \end{aligned} \qquad l = 1, 2 \ldots n$$

wenn mit S_{ik} die ersten Unterdeterminanten von Δ_0 bezeichnet werden. Aus 6a) folgt dann

$$(\lambda - \mu)\, \Delta_0 = 0,$$

also $\lambda = \mu$. Und aus den Gleichungen 7a) kann man, sobald die Determinante

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} s_{11} & \cdot & \cdot & s_{1\,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-2,1} & \cdot & \cdot & s_{n-2\,n-2} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, alle σ_{il}, $l = 1, 2 \ldots n-2$ berechnen.

Es bleiben daher nur λ und die Coefficienten einer alternirenden Form von $n-2$ Variablen willkürlich, d. h. es ist

$$P = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$$

und dasselbe ergiebt sich aus der Formel II) § VI, in der $\mu = n-2$ zu setzen ist, für $N = n + (n-2(n-3)$.

Ganz anders verläuft die Berechnung der σ_{pq}, wenn die Determinante Δ_1' verschwindet, ohne dass die ersten Unterdeterminanten sämmtlich Null sind. Da nun $\mu_2 = 1$, so kann man voraussetzen, dass

$$s_{1\,n-2},\ s_{2\,n-2}\ \ldots\ s_{n-2\,n-2}$$

sämmtlich gleich Null sind. Zunächst bleiben die unter 12) angegebenen Werthe bestehen, ebenso die Gleichung $\lambda = \mu$. Nun giebt aber die Gleichung 7a) für $i' = n-2$

$$\sigma_{i\,n-1}\, s_{n-1\,n-2} + \sigma_{in}\, s_{n\,n-2} = 0,$$

also für $i = n-2$ nach 12)

$$\lambda\,(S_{n-2\,n-1}\, s_{n-1\,n-2} + S_{n-n-2}\, s_{n\,n-2}) = 0.$$

Da nun der Factor von λ hier gleich der Determinante Δ_0 ist, so lässt sich diese Gleichung nur durch $\lambda = 0$ befriedigen. Damit verschwinden also alle Grössen σ_1 bis auf $\sigma_{n-2,\,n-2}$, welches vollkommen willkürlich bleibt, womit sich dieselbe Zahl für P, wie vorhin, ergiebt.

Zweiter Fall. Die Determinante Δ_0 ist gleich Null. Alsdann darf die mit Δ_1' bezeichnete Determinante nicht mehr verschwinden, da sonst die Determinante der Form $s+a$ nicht mehr von Null verschieden wäre, wie aus der Gleichung

$$|s+a| = \Delta_0 + \Delta_1'$$

hervorgeht. Man hat hier die weiteren Unterfälle zu unterscheiden.

Wenn erstens weder alle S_{nl}, noch alle $S_{n-1\,l}$, $l = 1, \ldots n$ verschwinden, bleiben die vorigen Resultate ohne Einschränkung gültig. Nur die Möglichkeit, dass $S_{n\,n-1} = 0$

wäre, scheint eine Ausnahme bilden zu können, da alsdann $\lambda = \mu$ in Wegfall kommen würde. Ist aber $S_{nn-1} = 0$, so folgt aus der bekannten Identität

$$0 = S_{ik} S_{lm} - S_{il} S_{km}$$

für $i = n$, $l = n - 1$

$$S_{nk} S_{n-1\,m} = 0$$

und hieraus ergiebt sich, dass alle S_{kn} verschwinden müssen, sobald nur ein einziges $S_{n-1\,m}$ nicht Null ist — im Widerspruch mit der eingeführten Voraussetzung. Es muss also der Fall $\mu = n - 2$, $\nu = \nu_2 = 1$ (b) § VIII) vorliegen, und man erhält denselben Werth von P wie im ersten Falle.

Wenn zweitens die aus der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & \cdot\ \cdot & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdot\ \cdot & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ s_{n-2\,1} & s_{n-2\,2} & \cdot\ \cdot & s_{n-2\,n} \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdot\ \cdot & s_{nn} \end{array} \right\|$$

gebildeten $n - 1$ reihigen Determinanten, also alle $S_{n-1,\,l}$ verschwinden, die S_{nl} aber nicht alle Null sind, so hat man

13) $$s_{kn} = \Sigma \alpha_i s_{ik}$$

für

$$k = 1,\ 2\ \ldots\ n$$
$$i = 1,\ 2\ \ldots\ n - 2$$

und die mit beliebigen Grössen $u_1 \ldots u_n$, $v_1 \ldots v_n$ einfach geränderte Determinante der s_{ik} wird

$$-[u_n - \Sigma \alpha_i u_i]\,[v_n - \Sigma \alpha_i v_i]\, S_{nn}$$

so dass, falls nicht alle ersten Unterdeterminanten von Δ_0 verschwinden, auch $S_{nn} \neq 0$ ist. Bestimmt man nun aus den Gleichungen 4ab), 6ab) die $\sigma_{n-1,\,l}$, so findet man

$$\Delta_1' \Sigma \sigma_{n-1\,l} s_{n-1\,l} = S_{nn} \sigma_{n-1\,n-1},$$

also, da nach 6a) die Summe linker Hand verschwinden muss

$$\sigma_{n-1\,n-1} = 0$$

und man erhält jetzt aus den Gleichungen 4ab) sämmtliche $\sigma_{n-1\,l}$, $l = 1, 2 \,.\,.\, n-2$, ausgedrückt durch $\sigma_{n\,n-1}$, während $\sigma_{nl} = \mu\, S_{nl}$, $l = 1, 2 \,.\,.\,.\, n$ ist. Wie man sieht, bleibt auch hier nur μ willkürlich und die Zahl P bleibt dieselbe wie früher.

Wenn endlich drittens alle $S_{n-1\,l}$ und S_{nl} verschwinden, so verschwinden überhaupt alle ersten Unterdeterminanten von Δ_0. Man kann dann in den Gleichungen 4aa), 4ab) die Werthe der σ_{nn-1}, σ_{nn}, $\sigma_{n-1\,n-1}$ ganz willkürlich annehmen; die Gleichungen 6aa), 6ab) sind nun von selbst erfüllt, und Gleiches gilt, wie sich zeigt, auch von der Gleichung 6a). Die Zahl P wird hiernach

$$\frac{(n-2)\,(n-3)}{2} + 3$$

und zu demselben Resultate gelangt man auch durch Formel II) § VI für $\mu = n - 2$, $\nu = 2$.

Hiermit sind die sämmtlichen gesuchten Transformationen der Form

$$S = \Sigma\, s_{ik}\, x_i\, y_k + (x_n\, y_{n-1} - x_{n-1}\, y_n)$$

in sich selbst bestimmt. Bei weiteren Untersuchungen ähnlicher Art wird man sich mit Vortheil der Kronecker'schen Normalform[1]) der alternirenden und bilinearen Formen bedienen können; eine weitere Ausführung derartiger Rechnungen muss hier indessen unterbleiben.

[1]) Berliner Monatsberichte, 1874, S. 398.