Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Bemerkung zur Theorie der konjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst.

Von **Alfred Löwy** in Göttingen.

(Eingelaufen 1. Februar.)

Transformirt man die bilineare Form:

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, x_i\, y_k,$$

deren Determinante, wie im Folgenden stets angenommen wird, nicht verschwinden soll, durch die zwei Substitutionen:

$$x_i = \sum_{l=1}^{l=n} p_{il}\, \xi_l,\quad i = 1, 2 \,..\, n$$

$$y_i = \sum_{l=1}^{l=n} p_{li}\, \eta_l,\quad i = 1, 2 \,..\, n$$

in eine andere bilineare Form, so heisst eine derartige Transformation nach Jakobi konjugirt. Mit der konjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst hat sich Herr Voss in einer in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie (Sitzung vom 1. Juni 1889) erschienenen Abhandlung[1]) auf das Eingehendste beschäftigt. Diese Note ist im Anschluss an die erwähnte Arbeit jenes Gelehrten abgefasst worden.

Ordnet man der linearen Substitution

$$x_i = \sum p_{il}\, \xi_l$$

[1]) Ueber die konjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst; Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse, Bd. 19, p. 175 ff.

die bilineare Form $P = \sum p_{il}\, x_i\, y_l$ zu und bedient sich der von Herrn Frobenius in die Theorie der bilinearen Formen eingeführten Symbolik[1]), so wird die von Herrn Voss a. a. O. behandelte Aufgabe symbolisch durch die Gleichung:

$$P\,A\,P = A$$

dargestellt. Wie Herr Voss nachweist, lässt eine jede bilineare Form A von nicht verschwindender Determinante, vorausgesetzt, dass dieselbe nicht etwa in Bezug auf kontragrediente Transformationen irreducibel ist, von der identischen Substitution verschiedene konjugirte Substitutionen in sich zu.

Die Transformationsdeterminante hat bei der zu betrachtenden Substitution stets den Wert $+1$ oder -1, und dementsprechend unterscheidet Herr Voss auch hier zwischen eigentlichen und uneigentlichen Transformationen. Bezeichnet man, wie es üblich ist, die Determinante der bilinearen Form:

$$P - \varrho\, E,$$

wo ϱ einen variablen Parameter bedeutet und

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, y_i$$

ist, als charakteristische Funktion der Form P, so erhält man sofort folgende Ergebnisse:

Das Produkt aller Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|P - \varrho\, E| = 0$ besitzt den Wert $+1$ oder -1, je nachdem die Transformation eigentlich oder uneigentlich ist. Da die charakteristische Gleichung nur reciproke Wurzeln ausser den Wurzeln ± 1 besitzt, so muss bei uneigentlicher Transformation die charakteristische Funktion stets die Wurzel -1 eine ungerade Anzal mal besitzen.

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir die Frage, welche uns hier beschäftigen soll.

---

[1]) Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84, p. 1 ff.

Man soll, wenn eine bilineare Form A von nicht verschwindender Determinante gegeben ist, aus ihrem Charakter entscheiden, ob sie nur eigentliche oder sowohl eigentliche wie uneigentliche konjugirte Transformationen in sich zulässt.[1])

Das Resultat, zu dem wir gelangen, zeigt wieder, wie glücklich und vorteilhaft gewählt die von Cauchy stammende „charakteristische Funktion" und die von Weierstrass eingeführten „Elementarteiler" sind. Wir finden folgendes Ergebnis:

Damit eine bilineare Form A von nicht verschwindender Determinante sowohl durch eigentliche wie uneigentliche Transformationen konjugirt in sich übergehen soll, ist notwendig und hinreichend, dass die charakteristische Funktion $|A-\varrho E|$ von A wenigstens einen Elementarteiler mit ungeradem Exponenten besitzt. Die Aussagen, dass die charakteristiche Funktion einer bilinearen Form nur Elementarteiler mit geraden Exponenten besitzt oder dass die bilineare Form nur durch eigentliche Transformationen in sich übergeht, sind daher identisch.[2])

Zum Beweise bedenken wir, dass ähnliche Formen stets durch ähnliche Substitutionen konjugirt in sich übergeführt werden und dass ähnliche Transformationen stets Determinanten von gleichem Werte haben. Hieraus folgt, dass ähnliche Formen stets in gleicher Weise entweder nur durch eigentliche oder durch beide Gattungen von Transformationen konjugirt in sich übergehen. Hat die charakteristische Funktion $|A-\varrho E|$ einer Form A die Elementarteiler:

---

[1]) Vgl. Frobenius, Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 86, p. 44.

[2]) Eine bilineare Form A, welche eine ungerade Anzahl von Variablenpaaren besitzt, hat stets einen Elementarteiler mit ungeradem Exponenten, da die Summe aller Elementarteiler gleich der Anzahl n von Variablenpaaren ist. Eine derartige Form geht ersichtlich durch die Transformation $-E$ von der Determinante -1 in sich über.

$$(\varrho - a_1)^{\alpha_1} (\varrho - a_2)^{\alpha_2} \ldots (\varrho - a_i)^{\alpha_i}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha = n,$$

wo n die Anzahl von Variablenpaaren der Form A ist und einzelne a und α auch unter einander gleich werden können, so ist A der Form:

$$a_1 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_{\alpha_1} y_{\alpha_1}) + (x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots x_{\alpha_1 - 1} y_{\alpha_1}) + \\ + a_2 (x_{\alpha_1+1} y_{\alpha_1+1} + \ldots x_{\alpha_1+\alpha_2} y_{\alpha_1+\alpha_2}) + (x_{\alpha_1+1} y_{\alpha_1+2} + \\ + \ldots x_{\alpha_1+\alpha_2-1} y_{\alpha_1+\alpha_2}) + \ldots$$

ähnlich; die letztere Form wird nun durch die Substitutionen:

$$x_1 = -\xi_1;\ x_2 = -\xi_2;\ \ldots x_{\alpha_1} = -\xi_{\alpha_1};\ x_{\alpha_1+1} = \\ = \xi_{\alpha_1+1};\ x_{\alpha_1+2} = \xi_{\alpha_1+2};\ \ldots x_{\alpha_1+m} = \xi_{\alpha_1+m}$$

$$y_1 = -\eta_1;\ y_2 = -\eta_2;\ \ldots y_{\alpha_1} = -\eta_{\alpha_1};\ y_{\alpha_1+1} = \\ = \eta_{\alpha_1+1};\ y_{\alpha_1+2} = \eta_{\alpha_1+2};\ \ldots y_{\alpha_1+m} = \eta_{\alpha_1+m}$$

konjugirt in sich übergeführt. Für ungerades α_1 ist diese Transformation uneigentlich. Jede bilineare Form, deren charakteristische Funktion einen Elementarteiler mit ungeradem Exponenten hat, lässt also uneigentliche konjugirte Transformationen in sich zu.

Wir wollen nun annehmen, dass eine bilineare Form A von nicht verschwindender Determinante durch uneigentliche Substitutionen konjugirt in sich übergehe; es sei also $PAP = A$. Da P eine uneigentliche Transformation ist, so hat die charakteristische Funktion $\psi(\varrho) = |P - \varrho E|$ den Faktor $(\varrho + 1)$ eine ungerade Anzahl etwa p mal. Es sei $\psi(\varrho)$ zerlegt in $\psi(\varrho) = \psi_1(\varrho)\,\psi_2(\varrho)$, wo $\psi_1(\varrho)$ das Produkt aller derjenigen Elementarteiler ist, die für $\varrho = -1$ verschwinden; $\psi_2(\varrho)$ hingegen verschwindet nicht für $\varrho = -1$. Wir konstruiren uns dann eine bilineare Form P_1, welche nur die p Variablenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots x_p y_p$ hat und dieselben Elementarteiler wie $\psi_1(\varrho)$ besitzt; ebenso möge die aus den Variablenpaaren

$x_{p+1}\, y_{p+1} \ldots x_n\, y_n$ konstruirte bilineare Form P_2 dieselben Elementarteiler wie $\psi_2(\varrho)$ aufweisen. $P_0 = P_1 + P_2$ ist dann der Form P ähnlich, da beide Formen die nämlichen Elementarteiler haben. Aehnliche Substitutionen führen ähnliche Formen konjugirt in sich über; daher giebt es eine zu A ähnliche Form A_0, dass

$$P_0\, A_0\, P_0 = A_0$$

wird. Setzt man

$$E_1 = \sum_1^p x_i\, y_i; \quad E_2 = \sum_{p+1}^n x_i\, y_i,$$

so ist

$$E = \sum_1^n x_i\, y_i = E_1 + E_2.$$

Da

$$E_1\, A_0\, E_2 = E_1\, P_0\, A_0\, P_0\, E_2 = P_1\, E_1\, A_0\, E_2\, P_2$$

wird, so folgt, dass $E_1\, A_0\, E_2$ identisch verschwindet; denn diese Form wird durch zwei Substitutionen P_1 und P_2, deren charakteristische Gleichungen keine reciproken Wurzeln haben, in sich übergeführt.[1]) Ebenso zeigt man das identische Verschwinden von $E_2\, A_0\, E_1$. Hieraus ergiebt sich, dass A_0 in derselben Weise wie P_0 zerlegbar ist, also $A_0 = A_1 + A_2$.

Die Form A_1 hat mithin auch eine ungerade Anzahl von Variablenpaaren, und daher hat die charakteristische Funktion von A_1 nämlich $|A_1 - \varrho E|$ wenigstens einen Elementarteiler mit ungeradem Exponenten. Folglich besitzt auch die charakteristische Funktion von A_0 nämlich $|A_0 - \varrho E|$ wenigstens einen Elementarteiler mit ungeradem Exponenten; denn die Elementarteiler von $|A_0 - \varrho E|$ sind das Produkt derjenigen von $|A_1 - \varrho E|$ und $|A_2 - \varrho E|$. Da die charakteristischen Funktionen von A_0 und A dieselben Elementarteiler haben, so ist unser Satz bewiesen.

---

[1]) Frobenius, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84, p. 33.

Ein specieller Fall der konjugirten Transformation ist die symmetrische Transformation, mit welcher sich Herr Voss in seiner Arbeit „Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst“[1]) im § 6 beschäftigt. Er zeigt dort z. B., dass jede symmetrische Form durch symmetrische Transformationen in sich übergeht. Durch unsere Betrachtung ist dargethan, dass nicht jede symmetrische Form durch uneigentliche symmetrische Transformationen in sich übergeht.

---

[1]) Abhandl. der bayer. Akademie der Wiss. II. Kl., XVII. Bd., II. Abth. 1890.