BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1967

MÜNCHEN 1968

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Bewegungen des hyperbolischen Raumes

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 3. November 1967

Übersicht

Erstes Kapitel: Die Bewegungen der Ebene in sich

§ 1. Längentreue Abbildung

Zum Studium der Bewegung verwenden wir rechtwinklige und W-(= Weierstraß'sche)Koordinaten. In der Ebene erreicht man nach Einführung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes den Punkt mit den Koordinaten x, y, indem man vom Nullpunkt aus auf der x-Achse die Strecke x (mit Vorzeichen) abträgt und vom Endpunkt aus senkrecht zur x-Achse die Strecke y (mit Vorzeichen). Unter den W-Koordinaten X, Y, P des Punktes versteht man dann die Ausdrücke

$$X = \cosh y \, \sinh x, \quad Y = \sinh y, \quad P = \cosh y \, \cosh x. \tag{I.1}$$

Dabei besteht die Identität

$$P^2 - X^2 - Y^2 = 1 \tag{I.2}$$

und es ist stets $P > 0$. Jedes reelle Zahlentripel X, Y, P mit $P > 0$, das der Forderung (I.2) genügt, repräsentiert genau einen Punkt. Denn die zugehörige Koordinate y ergibt sich aus der zweiten Gleichung (I.1), sodann x aus der ersten Gleichung (I.1), worauf die dritte Gleichung (I.1) von selbst erfüllt ist. Der Abstand zweier Punkte $i = 1, 2$ mit den W-Koordinaten X_i, Y_i, P_i ist gegeben durch die Formel

$$\cosh(12) = P_1 P_2 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2$$

und die Gleichung einer Geraden lautet

$$AX + BY + CP = 0,$$

wo die Konstanten A, B, C der Ungleichung $A^2 + B^2 > C^2$ genügen.

Nun betrachten wir die lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ P \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

und wollen erreichen, daß, wenn X, Y, P die W-Koordinaten eines Punktes sind, für X', Y', P' dasselbe gilt. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$X'^2 + Y'^2 - P'^2 = X^2 + Y^2 - P^2 \tag{I.4}$$

ist, also

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 &= 1, & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 &= 1, & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 &= -1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} &= 0, \end{aligned} \tag{I.5}$$

und daß außerdem für $P > 0$ stets $P' > 0$ wird. Diese scheinbar unkontrollierbare Zusatzforderung kann durch eine sehr bequeme ersetzt werden, nämlich

$$a_{33} > 0. \tag{I.6}$$

Um das einzusehen, bemerken wir zunächst, daß die Gleichungen (I.5) soviel besagen wie die Matrixrelation

(I.7)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & -a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ (Einheitsmatrix).}$$

Der erste Faktor links ist also die zum zweiten reziproke Matrix, so daß die Transformation (I.3) eindeutig umkehrbar ist und die Umkehrtransformation so lautet:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & -a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ P' \end{pmatrix}. \tag{I.8}$$

Wie nun aus (I.3) wegen der Forderung (I.4) das System (I.5) folgte, so folgt aus (I.8) das System

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} - a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} - a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{33}^2 &= -1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} - a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{I.9}$$

Das System (I.9) ist mit dem System (I.5) völlig gleichbedeutend, eines folgt aus dem andern.

Nunmehr können wir beweisen, daß die obige Zusatzforderung, für $P > 0$ solle stets $P' > 0$ sein, durch (I.6) ersetzt werden kann. Denn zunächst kommt für den Nullpunkt $X = 0$, $Y = 0$, $P = 1$ nach (I.3): $P' = a_{33}$, also muß (I.6) gelten. Wenn das aber der Fall ist, dann ist nach der letzten Zeile von (I.9) links und nach (I.2)

$$a_{33}P = \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + 1}.$$

Ferner ist identisch

$$(a_{31}X + a_{32}Y)^2 + (a_{31}Y - a_{32}X)^2 = (a_{31}^2 + a_{32}^2)(X^2 + Y^2), \text{ also}$$

$$|a_{31}X + a_{32}Y| \leqq \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Nach der Transformation (I.3) ist aber $P' = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}P$, also

$$P' \geqq a_{33}P - |a_{31}X + a_{32}Y|$$

$$\geqq \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + 1} - \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} > 0.$$

W. z. b. w.

Wenn zwei Punkte $i = 1, 2$ mit den W-Koordinaten X_i, Y_i, P_i durch die Transformation (I.3) in $i' = 1', 2'$ mit den W-Koordinaten X_i', Y_i', P_i' übergeführt werden, so ergibt sich aus den Formeln (I.5) sofort, daß

$$X_1'X_2' + Y_1'Y_2' - P_1'P_2' = X_1X_2 + Y_1Y_2 - P_1P_2$$

ist, also auch $\cosh(1'\,2') = \cosh(12)$ und folglich $(1'\,2') = (12)$. Es handelt sich also um eine umkehrbar eindeutige *längentreue* Abbildung der ganzen Ebene auf sich. Dabei geht jede Gerade $AX + BY + CP = 0$, bei der ja $A^2 + B^2 > C^2$ sein muß, wieder in eine Gerade über. Denn nach (I.8) ist

$$AX + BY + CP = A'X' + B'Y' + C'P', \qquad \text{wobei}$$

$$A' = Aa_{11} + Ba_{12} - Ca_{13}, \quad B' = Aa_{21} + Ba_{22} - Ca_{23},$$
$$C' = -Aa_{31} - Ba_{32} + Ca_{33},$$

also wegen (I.5)

$$A'^2 + B'^2 - C'^2 = A^2 + B^2 - C^2 > 0$$

ist, so daß die Gleichung $A'X' + B'Y' + C'P' = 0$ eine Gerade darstellt.

§ 2. Bewegung und Spiegelung

Die Gesamtheit unserer längentreuen Abbildungen, die nach den Kongruenzaxiomen natürlich auch winkeltreu sind, bildet eine Gruppe. Denn jede hat eine der Gesamtheit angehörende

Reziproke und die Nacheinanderausführung von zweien wird durch ein Matrixprodukt geleistet, wo jeder Faktor, also auch das Produkt, die Form $X^2 + Y^2 - P^2$ mit $P > 0$ wieder in $X^2 + Y^2 - P^2$ mit $P > 0$ überführt[1]. Diese Gruppe zerfällt aber in zwei getrennte Kontinua. Denn wenn man

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \tag{I.10}$$

setzt, so folgt aus (I. 7) durch Übergang von den Matrices zu den Determinanten sofort: $\Delta^2 = 1$, also ist Δ gleich 1 oder -1. Unsere Abbildungen zerfallen daher in zwei Klassen. Zur Klasse mit $\Delta = 1$ gehört z. B. die identische Abbildung $X' = X$, $Y' = Y$, $P' = P$; zur Klasse mit $\Delta = -1$ gehört die Abbildung $X' = X$, $Y' = -Y$, $P' = P$ (Spiegelung an der x-Achse). Bei stetiger Änderung der Abbildung kann sich auch die Determinante nur stetig ändern. Daher können zwei Abbildungen verschiedener Klassen nicht stetig ineinander übergeführt werden. Dagegen lassen sich zwei Abbildungen der gleichen Klasse stetig ineinander überführen. Man kann sich das genau wie in der Euklidischen Ebene überlegen, etwa so:

Wenn zwei Punkte 1, 2 als Bilder die Punkte 1', 2' haben und wenn 4 ein Punkt zwischen 1 und 2 ist, so liegt sein Bild 4' zwischen 1' und 2', weil ja $(1'\,4') + (4'\,2') = (14) + (42)$ ist. Wenn ferner 3 ein Punkt außerhalb der Geraden 12 ist, so daß sein Bild 3' auch außerhalb der Geraden 1' 2' liegt, und wenn 5 ein Punkt zwischen 3 und 4 ist, so liegt auch 5' zwischen 3' und 4'. Das besagt aber: Wenn die Ecken eines Dreiecks 123 auf die Ecken des Dreiecks 1' 2' 3' abgebildet werden, dann wird auch das ganze Innere von 123 auf das Innere von 1' 2' 3' abgebildet. Nun denken wir uns die ganze Ebene in Zellen (Dreiecke) zerlegt; dann ist auch die Bildebene in Zellen mit topologisch gleichem Aufbau

---

[1] Auch ohne die Zusatzforderung $P > 0$ bilden die linearen Transformationen, die die Form $X^2 + Y^2 - P^2$ in sich überführen, natürlich eine Gruppe. Von dieser ist die uns interessierende nur eine durch die Einschränkung $a_{33} > 0$ charakterisierte Untergruppe.

zerlegt, die den Originalzellen kongruent sind, so daß beide Ebenen als Ganzes kongruent sind und durch Bewegung (im Raume) so aufeinander gelegt werden können, daß jeder Bildpunkt auf sein Original zu liegen kommt. Damit sind aber auch alle Bewegungen bereits erfaßt. Denn eine Bewegung (genauer: das Resultat einer ausgeführten Bewegung) ist völlig festgelegt, wenn sie etwa die drei Punkte

$$\begin{array}{lll} X_1 = 0, & Y_1 = 0, & P_1 = 1, \\ X_2 = \sinh a, & Y_2 = 0, & P_2 = \cosh a, \\ X_3 = 0, & Y_3 = \sinh b, & P_3 = \cosh b \end{array}$$

überführt in

$$\begin{array}{lll} X_1' = c_{11}, & Y_1' = c_{21}, & P_1' = c_{31}, \\ X_2' = c_{12}, & Y_2' = c_{22}, & P_2' = c_{32}, \\ X_3' = c_{13}, & Y_3' = c_{23}, & P_3' = c_{33}, \end{array}$$

wobei natürlich $c_{3k} > 0$ und wegen (I.2) und aus Kongruenzgründen

(I.11)

$$\begin{array}{ll} c_{31}^2 - c_{11}^2 - c_{21}^2 = 1, & c_{31}c_{32} - c_{11}c_{12} - c_{21}c_{22} = \cosh a, \\ c_{32}^2 - c_{12}^2 - c_{22}^2 = 1, & c_{31}c_{33} - c_{11}c_{13} - c_{21}c_{23} = \cosh b, \\ c_{33}^2 - c_{13}^2 - c_{23}^2 = 1, & c_{32}c_{33} - c_{12}c_{13} - c_{22}c_{23} = \cosh a \cosh b \end{array}$$

ist. Das wird aber durch die Abbildung (I.3) geleistet, wenn man $a_{11}, \ldots, a_{33}$ aus den neun Bedingungen berechnet:

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh a \\ 0 \\ \cosh a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh b \\ \cosh b \end{pmatrix}.$$

Diese Bedingungen besagen

$$c_{i1} = a_{i3},$$
$$c_{i2} = a_{i1} \sinh a + a_{i3} \cosh a,$$
$$c_{i3} = a_{i2} \sinh b + a_{i3} \cosh b$$

für $i = 1, 2, 3$ und die Auflösung nach a_{ik} lautet

$$a_{i3} = c_{i1}, \quad a_{i1} = \frac{c_{i2} - c_{i1} \cosh a}{\sinh a}, \quad a_{i2} = \frac{c_{i3} - c_{i1} \cosh b}{\sinh b}.$$

Daher ist $a_{33} = c_{31} > 0$ und mittels der Gleichungen (I.11) bestätigt man leicht, daß auch die Forderungen (I.5) erfüllt sind; es handelt sich also wirklich um eine unserer längentreuen Abbildungen. W. z. b. w.

Wenn nun eine Zelle Z_1 denselben Umlaufsinn hat wie ihre Bildzelle, so gilt das für eine anstoßende Zelle Z_2 ebenfalls, weil Z_1 und Z_2 nebeneinander liegen und ihre Bildzellen ebenso. Somit haben alle Bildzellen denselben Umlaufsinn wie die Originalzellen, so daß die Abbildung einfach durch Verschiebung der ganzen Ebene in sich zustande kommt (eigentliche Bewegung der Ebene). Wenn dagegen eine Zelle den entgegengesetzten Umlaufsinn hat wie ihre Bildzelle, so gilt dasselbe für alle Zellen, und alle Winkel werden umgelegt. Die Bildebene ist ein Spiegelbild der ursprünglichen und kann nur durch Herausbewegen in den Raum punktweise auf die ursprüngliche gelegt werden. Die eigentlichen Bewegungen können nun offenbar stetig ineinander übergeführt werden, bilden also ein Kontinuum, so daß bei ihnen Δ konstant bleibt, und zwar $= 1$, weil das bei der identischen Abbildung gilt. Ebenso bilden die Bewegungen mit Umlegung der Winkel ein Kontinuum und es ist $\Delta = -1$, weil das bei der Spiegelung an der x-Achse so ist. Alle Bewegungen mit $\Delta = -1$ gehen aus denen mit $\Delta = 1$ hervor, indem man nachträglich noch eine Spiegelung, etwa an der x-Achse, vornimmt. Wir wollen uns daher auf die eigentlichen Bewegungen beschränken. Sie bilden natürlich wieder eine Gruppe, weil ja, wenn zwei Matrices die Determinante 1 haben, für ihr Produkt dasselbe gilt. Eine Matrix, für deren Elemente a_{ik} die Formeln (I.5), (I.6) und $\Delta = 1$ gelten, wollen wir eine **kinetische** Matrix nennen, weil sie eben eine *Bewegung* der ganzen Ebene in sich festlegt. Die Matrix (I.3) ist also jetzt kinetisch.

§ 3. Parameterdarstellung einer kinetischen Matrix

Bei einer n-reihigen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

sind die Elemente der Reziproken

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ - & - & - \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

bekanntlich gegeben durch

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ki}}.$$

Für die kinetische Matrix in (I.3) ist uns die Reziproke bereits als der erste Faktor in Formel (I.7) bekannt. Durch Vergleich speziell der Diagonalelemente (die andern werden wir nicht brauchen) mit der jetzigen Formel ergibt sich wegen $\Delta = 1$

$$\begin{aligned} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} &= a_{11}, \\ a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} &= a_{22}, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= a_{33}. \end{aligned} \tag{I.12}$$

Daraus erkennt man, daß die sog. charakteristische Gleichung unserer kinetischen Matrix

$$\begin{vmatrix} \varrho - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \varrho - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \varrho - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

so aussieht:

$$\varrho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\varrho^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\varrho - 1 = 0.$$

Es ist also die charakteristische Wurzel $\varrho = 1$ vorhanden.

Wir wollen jetzt für die neun Elemente a_{ik} einer kinetischen Matrix, zwischen denen die sechs unabhängigen Relationen (I.5) bestehen, eine rationale Darstellung durch $9 - 6 = 3$ Parameter geben oder, was auf dasselbe hinauskommt, 4 homogene Parameter. Aus (I.12), (I.5) und (I.9) ergibt sich

$$(a_{12} \pm a_{21})^2 + (a_{22} \mp a_{11})^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{21}^2 + a_{11}^2 \mp 2\, a_{33}$$
$$= a_{32}^2 + 1 + a_{31}^2 + 1 \mp 2\, a_{33} = a_{33}^2 + 1 \mp 2\, a_{33} = (a_{33} \mp 1)^2.$$

Daher ist

(I.13)
$$(a_{12} \pm a_{21})^2 = (a_{33} \mp 1 + a_{22} \mp a_{11})\ (a_{33} \mp 1 - a_{22} \pm a_{11}).$$

Weiter ergibt sich aus (I.12), (I.5) und (I.9) auch

$$(a_{13} \pm a_{31})^2 - (a_{33} \pm a_{11})^2 = a_{13}^2 - a_{33}^2 + a_{31}^2 - a_{11}^2 \mp 2\, a_{22}$$
$$= - a_{23}^2 - 1 + a_{21}^2 - 1 \mp 2\, a_{22} = - a_{22}^2 - 1 \mp 2\, a_{22}$$
$$= - (a_{22} \pm 1)^2.$$

Daher ist

(I.14)
$$(a_{13} \pm a_{31})^2 = (a_{33} \pm a_{11} + a_{22} \pm 1)\ (a_{33} \pm a_{11} - a_{22} \mp 1).$$

Schließlich ergibt sich aus (I.12), (I.5) und (I.9) auch noch

$$(a_{23} \pm a_{32})^2 - (a_{33} \pm a_{22})^2 = a_{23}^2 - a_{33}^2 + a_{32}^2 - a_{22}^2 \mp 2\, a_{11}$$
$$= - a_{13}^2 - 1 + a_{12}^2 - 1 \mp 2\, a_{11} = - a_{11}^2 - 1 \mp 2\, a_{11}$$
$$= - (a_{11} \pm 1)^2.$$

Daher ist

(I.15)
$$(a_{23} \pm a_{32})^2 = (a_{33} \pm a_{22} + a_{11} \pm 1)\ (a_{33} \pm a_{22} - a_{11} \mp 1).$$

Jetzt führen wir die vier Abkürzungen ein:

$$\text{(I.16)}\qquad \begin{aligned} a_{33} + a_{22} + a_{11} + 1 &= 4\, A_0^2, \\ a_{33} + a_{22} - a_{11} - 1 &= 4\, A_1^2, \\ a_{33} - a_{22} + a_{11} - 1 &= 4\, A_2^2, \\ a_{33} - a_{22} - a_{11} + 1 &= 4\, A_3^2, \end{aligned}$$

da sich sogleich herausstellen wird, daß diese vier Ausdrücke $\geqq 0$ sind, also als Quadrate bezeichnet werden können. Aus (I.16) folgt sofort

$$\text{(I.17)}\quad \begin{aligned} 1 &= A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2, \\ a_{11} &= A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 = 1 + 2\,(A_2^2 - A_3^2), \\ a_{22} &= A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = 1 + 2\,(A_1^2 - A_3^2), \\ a_{33} &= A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1 + 2\,(A_1^2 + A_2^2), \end{aligned}$$

und die Formeln (I.13), (I.14), (I.15) lassen sich jetzt so schreiben:

$$\text{(I.18)}\quad \begin{aligned} (a_{12} + a_{21})^2 &= 16\,A_1^2 A_2^2, & (a_{12} - a_{21})^2 &= 16\,A_0^2 A_3^2, \\ (a_{13} + a_{31})^2 &= 16\,A_0^2 A_2^2, & (a_{13} - a_{31})^2 &= 16\,A_1^2 A_3^2, \\ (a_{23} + a_{32})^2 &= 16\,A_0^2 A_1^2, & (a_{23} - a_{32})^2 &= 16\,A_2^2 A_3^2. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß die vier Ausdrücke A_i^2 gleiches Vorzeichen (0 eingeschlossen) haben, und da ihre Summe nach (I.16) gleich a_{33}, also > 0 ist, muß es das positive sein, wie oben behauptet. Wir können nun unter A_i einen beliebigen der beiden Wurzelwerte von A_i^2 verstehen und dürfen daher, wenn wir in (I.18) die Wurzeln ziehen, einfach festsetzen:

$$\text{(I.19)}\qquad a_{12} + a_{21} = 4\,A_1 A_2, \quad a_{12} - a_{21} = 4\,A_0 A_3,$$

$$\text{(I.20)}\qquad a_{13} + a_{31} = 4\,A_0 A_2;$$

aber dann sind fürs weitere Wurzelziehen die Vorzeichen schon festgelegt und dürfen nicht mehr willkürlich gewählt werden. Nun ist nach (I.9), (I.5) und (I.19)

$$\begin{aligned} a_{13}^2 - a_{31}^2 = (a_{13}^2 - a_{11}^2 + 1) - (a_{31}^2 - a_{11}^2 + 1) &= a_{12}^2 - a_{21}^2 \\ &= 16\,A_0 A_1 A_2 A_3, \end{aligned}$$

so daß sich nach Division durch (I.20) ergibt:

$$\text{(I.21)}\qquad a_{13} - a_{31} = 4\,A_1 A_3.$$

Nur wenn A_0 oder A_2 verschwindet, wäre das eine unerlaubte Division durch 0, und nach (I.18) wäre auch $a_{13} - a_{31} = -4\,A_1 A_3$ möglich. Aber im Fall $A_0 = 0$ kann man, ohne die in (I.19) und (I.20) getroffenen Festsetzungen zu verletzen, die Parameter A_1 und A_2 ruhig in $-A_1$ und $-A_2$ umbenennen und im

Fall $A_2 = 0$ kann man A_1 in $-A_1$ umbenennen. In beiden Fällen kommt dann doch wieder (I.21) heraus.

Aus (I.19) sowie (I.20) und (I.21) ergibt sich

$$a_{12} = 2(A_1A_2 + A_0A_3), \quad a_{21} = 2(A_1A_2 - A_0A_3), \tag{I.22}$$

$$a_{13} = 2(A_0A_2 + A_1A_3), \quad a_{31} = 2(A_0A_2 - A_1A_3). \tag{I.23}$$

Jetzt fehlen uns nur noch a_{23} und a_{32}. Nach (I.9), (I.5) und (I.19) ist

$$\begin{aligned} a_{23}^2 - a_{32}^2 &= (a_{23}^2 - a_{22}^2 + 1) - (a_{32}^2 - a_{22}^2 + 1) \\ &= a_{21}^2 - a_{12}^2 = -16\,A_0A_1A_2A_3, \end{aligned}$$

so daß wir aus den zwei untersten der Gleichungen (I.18), wenn die Produkte A_0A_1 und A_2A_3 nicht beide verschwinden, nur schließen können:

$$a_{23} + a_{32} = \pm 4\,A_0A_1, \quad a_{23} - a_{32} = \mp 4\,A_2A_3, \tag{I.24}$$

wo entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen richtig sind. Wenn aber beide Produkte verschwinden, spielen die Vorzeichen überhaupt keine Rolle, so daß die Formeln (I.24) in jedem Fall gelten.

Um jetzt das richtige Vorzeichen zu bestimmen, ziehen wir aus (I.9) und (I.5) die untersten Formeln rechts heran:

$$a_{23}a_{33} - a_{22}a_{32} = a_{21}a_{31}, \quad a_{32}a_{33} - a_{22}a_{23} = a_{12}a_{13}.$$

Durch Addition und Subtraktion kommt

$$\begin{aligned} (a_{33} - a_{22})(a_{23} + a_{32}) &= a_{21}a_{31} + a_{12}a_{13}, \\ (a_{33} + a_{22})(a_{23} - a_{32}) &= a_{21}a_{31} - a_{12}a_{13}. \end{aligned}$$

Aus (I.17) folgt aber

$$a_{33} - a_{22} = 2(A_2^2 + A_3^2), \quad a_{33} + a_{22} = 2(A_0^2 + A_1^2)$$

und aus (I.22) und (I.23) folgt

$$\begin{aligned} a_{21}a_{31} + a_{12}a_{13} &= 8\,A_0A_1(A_2^2 + A_3^2), \\ a_{21}a_{31} - a_{12}a_{13} &= -8\,A_2A_3(A_0^2 + A_1^2), \end{aligned}$$

so daß die vorigen Formeln übergehen in

$$\begin{aligned} 2\,(A_2^2+A_3^2)\,(a_{23}+a_{32}) &= 8\,A_0A_1\,(A_2^2+A_3^2),\\ 2\,(A_0^2+A_1^2)\,(a_{23}-a_{32}) &= -8\,A_2A_3\,(A_0^2+A_1^2). \end{aligned}$$

Nun können die Faktoren $A_2^2+A_3^2$ und $A_0^2+A_1^2$ nicht beide verschwinden, weil ihre Summe nach (I.16) gleich $a_{33}>0$ ist. Daher ergibt sich durch Division, daß wenigstens eine der beiden Formeln

$$a_{23}+a_{32} = 4A_0A_1, \quad a_{23}-a_{32} = -4A_2A_3$$

richtig ist, und dann nach (I.24) auch die andere. Durch Addition und Subtraktion folgt jetzt

$$\text{(I.25)} \qquad a_{23} = 2\,(A_0A_1-A_2A_3), \quad a_{32} = 2\,(A_0A_1+A_2A_3).$$

Zusammenfassend erhalten wir also für eine kinetische Matrix die Gestalt:

(I.26)

$$\begin{pmatrix} 1+2\,(A_2^2-A_3^2) & 2\,(A_1A_2+A_0A_3) & 2\,(A_0A_2+A_1A_3)\\ 2\,(A_1A_2-A_0A_3) & 1+2\,(A_1^2-A_3^2) & 2\,(A_0A_1-A_2A_3)\\ 2\,(A_0A_2-A_1A_3) & 2\,(A_0A_1+A_2A_3) & 1+2\,(A_1^2+A_2^2) \end{pmatrix},$$

wo zwischen den vier Parametern A_i die Relation $A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2=1$ besteht. Umgekehrt ist auch leicht nachzuprüfen, daß jede solche Matrix wirklich kinetisch ist. Denn a_{33} ist offenbar >0, und wenn man die Einser in der Diagonale durch $A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2$ ersetzt, bestätigt man durch ganz elementare Rechnung, daß die Relationen (I.5) erfüllt sind, infolge deren dann die Determinante Δ nur gleich 1 oder -1 sein kann. Da aber Δ eine stetige Funktion der A_i ist und speziell für $A_1=A_2=A_3=0$ den Wert 1 hat, ist $\Delta=1$. Wenn man die Einser in der Diagonale von (I.26) durch $A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2$ ersetzt und dann noch bei allen neun Elementen den gemeinsamen Nenner $A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2$ anbringt, der ja gleich 1 ist, hat man die gewünschte Darstellung mit vier homogenen Parametern. Doch ist es meistens bequemer, bei der Darstellung (I.26) zu bleiben. Die Transformation (I.3) sieht dann so aus:

(I.27)

$$\begin{aligned}
X' &= [1 + 2(A_2^2 - A_3^2)]\,X + 2(A_1A_2 + A_0A_3)\,Y \\
&\qquad + 2(A_0A_2 + A_1A_3)\,P, \\
Y' &= 2(A_1A_2 - A_0A_3)\,X + [1 + 2(A_1^2 - A_3^2)]\,Y \\
&\qquad + 2(A_0A_1 - A_2A_3)\,P, \\
P' &= 2(A_0A_2 - A_1A_3)\,X + 2(A_0A_1 + A_2A_3)\,Y \\
&\qquad + [1 + 2(A_1^2 + A_2^2)]\,P.
\end{aligned}$$

§ 4. Die verschiedenen möglichen Bewegungen

Wir fragen zuerst, ob bei einer Bewegung ein Punkt fest bleibt, das heißt, ob er nach ausgeführter Bewegung wieder seinen alten Platz einnimmt (Fixpunkt). Da die charakteristische Gleichung einer kinetischen Matrix die Wurzel 1 hat, sieht es so aus. Die W-Koordinaten eines Fixpunktes müssen nach (I. 27) dem Gleichungssystem

(I.28)

$$\begin{aligned}
(A_2^2 - A_3^2)\,X + (A_1A_2 + A_0A_3)\,Y + (A_0A_2 + A_1A_3)\,P &= 0, \\
(A_1A_2 - A_0A_3)\,X + (A_1^2 - A_3^2)\,Y + (A_0A_1 - A_2A_3)\,P &= 0, \\
(A_0A_2 - A_1A_3)\,X + (A_0A_1 + A_2A_3)\,Y + (A_1^2 + A_2^2)\,P &= 0.
\end{aligned}$$

genügen. Die Auflösung ist, wie sofort zu sehen,

$$X = \lambda A_1, \quad Y = -\lambda A_2, \quad P = \lambda A_3.$$

Damit das die W-Koordinanten eines Punktes sind, muß λ so bestimmt werden, daß $P > 0$ und $P^2 - X^2 - Y^2 = 1$ ist. Das ist dann und nur dann möglich, wenn $A_3^2 > A_1^2 + A_2^2$ oder, in den a_{ik} ausgedrückt, wenn $a_{11} + a_{22} + a_{33} < 3$ ist, und zwar ist dann

$$\lambda = \frac{\operatorname{sign} A_3}{\sqrt{A_3^2 - A_1^2 - A_2^2}}$$

und die W-Koordinaten des Fixpunktes f sind

(I.29)

$$X_f = \frac{A_1 \operatorname{sign} A_3}{\sqrt{A_3^2 - A_1^2 - A_2^2}}, \quad Y_f = \frac{-A_2 \operatorname{sign} A_3}{\sqrt{A_3^2 - A_1^2 - A_2^2}}, \quad P_f = \frac{A_3 \operatorname{sign} A_3}{\sqrt{A_3^2 - A_1^2 - A_2^2}}.$$

Die Bewegung ist einfach eine Drehung um den Fixpunkt f, wobei jeder Kreis mit dem Mittelpunkt in f so weit in sich verschoben wird, daß die Radien wieder in Radien übergehen.

Die Größe dieser Verschiebung wird durch den Drehwinkel α gemessen, den wir noch berechnen wollen. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt X, Y, P, der vom Fixpunkt f den Abstand r haben möge. Der gedrehte Punkt X', Y', P' hat von f natürlich auch den Abstand r und mag von seinem Ausgangspunkt den Abstand a haben. Wenn man das gleichschenklige Dreieck der drei Punkte durch eine Höhe in zwei kongruente rechtwinklige zerlegt, liest man aus diesen ab:

$$\text{(I.30)} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sinh\frac{a}{2}}{\sinh r} \quad \text{(nach [6], § 28, Formel (II)).}$$

Nun ist $\cosh a = PP' - XX' - YY'$, und wenn man für X', Y', P' die Ausdrücke (I.27) einsetzt, kommt nach leichter Rechnung, da $P^2 = 1 + X^2 + Y^2$ ist:

$$\begin{aligned}\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cosh a - 1}{2} &= A_1^2 + A_2^2 + (A_1^2 + A_3^2)\,X^2 \\ &+ (A_2^2 + A_3^2)\,Y^2 - 2A_1A_2XY \\ &- 2A_1A_3XP + 2A_2A_3YP.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\cosh r = P_fP - X_fX - Y_fY = \frac{\operatorname{sign} A_3(A_3P - A_1X + A_2Y)}{\sqrt{A_3^2 - A_1^2 - A_2^2}}, \text{ also}$$

$$\sinh^2 r = \cosh^2 r - 1 = \frac{(A_3P - A_1X + A_2Y)^2 - A_3^2 + A_1^2 + A_2^2}{A_3^2 - A_1^2 - A_2^2}.$$

Hier ist der Zähler, wenn man ausquadriert und dann P^2 durch $1 + X^2 + Y^2$ ersetzt, genau gleich dem oben gefundenen Ausdruck für $\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)$. Aus (I.30) folgt also $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = A_3^2 - A_1^2 - A_2^2$, und folglich $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = A_0^2$. Zusammenfassend haben wir also den

Satz I. 1. *Wenn $a_{11} + a_{22} + a_{33} < 3$, also $A_3^2 > A_1^2 + A_2^2$ ist, dann gibt es einen Fixpunkt, seine Koordinaten sind durch (I.29) gegeben. Die Bewegung ist eine Drehung um den Fix-*

punkt, wobei der Drehwinkel α *durch die Formeln* $sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = A_3^2 - A_1^2 - A_2^2$, $cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = A_0^2$ *gegeben ist.*

Legen wir den Nullpunkt speziell in den Fixpunkt, so ist nach (I.29) $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ und dann nach Satz I.1: $A_3^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $A_0^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Die kinetische Matrix (I.26) bekommt daher wegen $1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha$ und $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$ das Aussehen

$$\text{(I.31)} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Transformation lautet

(I.32)

$$X' = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y, \quad Y' = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y, \quad P' = P.$$

Statt α hätten wir auch $-\alpha$ schreiben können. Bei unserer Schreibung bedeutet, wie man sich leicht überlegt, positives α eine Drehrichtung von der positiven x-Achse über den ersten Quadranten zur positiven y-Achse.

Jetzt kommen wir zum Fall $a_{11} + a_{22} + a_{33} > 3$, also $A_3^2 < A_1^2 + A_2^2$. Da gibt es keinen Fixpunkt. Aber jetzt stellt die Gleichung

$$-A_1 X + A_2 Y + A_3 P = 0$$

eine Gerade dar. Sie wird durch die Bewegung (I.27) übergeführt in

$$\begin{aligned} 0 &= -A_1 X' + A_2 Y' + A_3 P' \\ &= -A_1\{[1 + 2(A_2^2 - A_3^2)]X + 2(A_1A_2 + A_0A_3)\,Y + 2(A_0A_2 + A_1A_3)P\} \\ &\quad + A_2\{2(A_1A_2 - A_0A_3)X + [1 + 2(A_1^2 - A_3^2)]\,Y + 2(A_0A_1 - A_2A_3)P\} \\ &\quad + A_3\{2(A_0A_2 - A_1A_3)X + 2(A_0A_1 + A_2A_3)\,Y + [1 + 2(A_1^2 + A_2^2)]\,P\}, \end{aligned}$$

oder nach X, Y, P geordnet, wobei sich viele Glieder wegheben,

$$0 = -A_1X + A_2Y + A_3P.$$

Die Gerade geht also in sich selbst über (Fixgerade). Dabei kann aber ihre Durchlaufungsrichtung nicht umgedreht werden, weil es sonst auf ihr einen Fixpunkt geben müßte; sie wird also nur in sich verschoben. Für die Schubstrecke c ergibt sich:

$$\cosh c = P'P - X'X - Y'Y$$

und wenn man für X', Y', P' die Werte aus (I.27) einsetzt,

$$\begin{aligned}\cosh c = {} & [1 + 2(A_1^2 + A_2^2)]\, P^2 - [1 + 2(A_2^2 - A_3^2)]\, X^2 \\ & - [1 + 2(A_1^2 - A_3^2)]\, Y^2 \\ & - 4A_1A_3PX + 4A_2A_3PY - 4A_1A_2XY.\end{aligned}$$

Dabei darf X, Y, P ein beliebiger Punkt der Fixgeraden sein. Nun ist $P^2 = 1 + X^2 + Y^2$, und da der Punkt auf der Fixgeraden liegt, ist $-A_1X + A_2Y = -A_3P$, wodurch die letzte Formel übergeht in:

$$\begin{aligned}\cosh c & = [1 + 2(A_1^2 + A_2^2)]\,(1 + X^2 + Y^2) - [1 + 2(A_2^2 - A_3^2)]\, X^2 \\ & \qquad - [1 + 2(A_1^2 - A_3^2)]\, Y^2 - 4A_3^2P^2 - 4A_1A_2XY \\ & = 1 + 2(A_1^2 + A_2^2) + 2(A_1^2 + A_3^2)\, X^2 + 2(A_2^2 + A_3^2)\, Y^2 \\ & \qquad - 4A_3^2P^2 - 4A_1A_2XY \\ & = 1 + 2(A_1^2 + A_2^2) + 2(A_1X - A_2Y)^2 + 2A_3^2(X^2 + Y^2) - 4A_3^2P^2 \\ & = 1 + 2(A_1^2 + A_2^2) + 2A_3^2P^2 + 2A_3^2(P^2 - 1) - 4A_3^2P^2 \\ & = 1 + 2(A_1^2 + A_2^2 - A_3^2).\end{aligned}$$

Damit gewinnen wir den

Satz I.2. *Wenn $a_{11} + a_{22} + a_{33} > 3$, also $A_3^2 < A_1^2 + A_2^2$ ist, dann geht die Gerade $-A_1X + A_2Y + A_3P = 0$ bei der Bewegung in sich über (Fixgerade). Sie wird aber um eine Strecke in sich verschoben, deren Länge c durch die Gleichung $\cosh c = 1 + 2(A_1^2 + A_2^2 - A_3^2)$ gegeben ist. Diese Bewegung heißt Schiebung längs der Fixgeraden.*

Macht man die Fixgerade $-A_1X + A_2Y + A_3P = 0$ zur y-Achse $X = 0$, so ist $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, also $A_0^2 - A_1^2 = 1$ und die kinetische Matrix (I.26) sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2A_1^2 & 2A_0A_1 \\ 0 & 2A_0A_1 & 1+2A_1^2 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz I.2 ist aber jetzt

$$1+2A_1^2 = \cosh c, \text{ also } \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) = A_1^2, \quad \cosh^2\left(\frac{c}{2}\right) = A_1^2+1 = A_0^2.$$

Wegen $\sinh c = 2\sinh\frac{c}{2}\cosh\frac{c}{2}$ kann man die Matrix auch so schreiben:

$$\text{(I.33)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh c & \sinh c \\ 0 & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix}$$

und die Transformation lautet:

(I.34)
$$X' = X, \quad Y' = \cosh c\, Y + \sinh c\, P, \quad P' = \sinh c\, Y + \cosh c\, P.$$

Statt c hätten wir auch $-c$ schreiben können. Bei unserer Schreibung ist es so, daß bei positivem c der Nullpunkt in die positive y-Achse geschoben wird.

In der Euklidischen Geometrie wird, wenn eine Gerade g in sich verschoben wird, die ganze daran hängende Ebene mit verschoben, das ist in der hyperbolischen natürlich ebenso. Während aber in der Euklidischen auch die zu g parallelen Geraden in sich verschoben werden, werden in der hyperbolischen keine weiteren Geraden in sich verschoben, wohl aber die von g in konstantem Abstand gewissermaßen mitgezogenen Linien; das sind aber keine Geraden, sondern die Abstandslinien mit der Null-Linie g. Die auf einer solchen krummen Abstandslinie gemessene Schubstrecke ist nach [6], § 52 gleich $c \cosh a$, wenn a der Abstand von der Null-Linie g ist.

Nun bleibt noch der Fall $a_{11}+a_{22}+a_{33} = 3$, oder also $A_1^2+A_2^2 = A_3^2$. In diesem stellt die Gleichung

$$-A_1X + A_2Y + A_3P = A_3D \qquad (D > 0)$$

eine Schar konzentrischer Grenzkreise dar. Sie gehen durch die kinetische Transformation (I.27) nach der gleichen Rechnung wie im vorigen Fall über in

$$-A_1X + A_2Y + A_3P = A_3D.$$

Es geht also jeder Grenzkreis dieser Schar in sich selbst über und wird nur in sich verschoben. Ihr festbleibender unendlich ferner Mittelpunkt M hat nach [1], S. 125 die Amplitude μ, wobei $\cos\mu = A_1/A_3$, $\sin\mu = -A_2/A_3$ ist. Jeder Radius geht wieder in eine Gerade durch M, also in einen andern Radius über. Daher handelt es sich um eine Drehung um den unendlich fernen Punkt M, eine sog. Paralleldrehung oder Grenzdrehung. Von einem individuellen Drehwinkel kann hier nicht gesprochen werden, wenn man nicht sagen will, er hat stets die Breite 0.

Satz I.3. *Im Fall* $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3$, *also* $A_1^2 + A_2^2 = A_3^2$ *ist die Bewegung eine Paralleldrehung (Grenzdrehung).*

Macht man das positive Ende der x-Achse zum Mittelpunkt der konzentrischen Grenzkreise, so muß deren Gleichung so lauten:

$$X - P = -D \quad (D > 0).$$

Also ist $A_2 = 0$, $A_1 = A_3\,(= a)$, $A_0 = \pm 1$. Die kinetische Matrix (I.26) ist also, wenn man wegen des doppelten Vorzeichens von A_0 statt a eventuell $-a$ schreibt:

$$\text{(I.35)} \qquad \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & 2a & 2a^2 \\ -2a & 1 & 2a \\ -2a^2 & 2a & 1 + 2a^2 \end{pmatrix}$$

und die Transformation lautet:

$$\text{(I.36)} \qquad \begin{aligned} X' &= (1 - 2a^2)X + 2aY + 2a^2P, \\ Y' &= \quad -2aX \quad + \quad Y \quad + 2aP, \\ P' &= \quad -2a^2X \quad + 2aY + (1 + 2a^2)P. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$X' - P' = X - P, \qquad Y' = Y - 2a(X - P),$$
$$Y = Y' + 2a(X' - P').$$

Das positive Ende der x-Achse (charakterisiert durch $X - P = 0$, $Y = 0$) geht in sich über. Die x-Achse $Y = 0$ geht in die Parallele $Y + 2a(X - P) = 0$ über. Eine beliebige Parallele zur x-Achse $Y + 2b(X - P) = 0$ geht in die weitere Parallele $Y + 2(b + a)(X - P) = 0$ über.

Zur Vereinheitlichung der Sprache ist es oft zweckmäßig, bei einer Abstandslinie ihre Null-Linie, obwohl sie natürlich eine Gerade und kein Punkt ist, als ihr Zentrum (Mittelpunkt) zu bezeichnen, und die Lote zur Null-Linie, die übrigens auch Lote (Normalen) zur Abstandslinie sind (Siehe [6], Satz XV.4), als ihre Radien. Mit dieser Terminologie läßt sich ein Teil unserer Resultate sehr einheitlich zusammenfassen:

Satz I.4. *Das Resultat einer Bewegung der vollen Ebene in sich besteht immer darin, daß eine gewisse Schar konzentrischer Kreisformen (gewöhnliche Kreise oder Grenzkreise oder Abstandslinien) ihren alten Platz wieder einnimmt, aber jede dieser Kreisformen derart in sich verschoben ist, daß die Radien wieder Radien sind.*

§ 5. Kinetisch ähnliche kinetische Matrices

Wir haben drei Typen von Bewegungen der vollen Ebene in sich kennen gelernt: Drehung um einen festen Punkt, Schiebung längs einer festen Geraden, Grenzdrehung um ein festes Ende. Wenn wir nur die Existenz dieser Bewegungstypen hätten beweisen wollen, dann hätte es genügt, für jeden Typus ein Beispiel vorzuführen, wie das schon Liebmann [4], S. 79 gemacht hat. Aber das Wesentliche unserer Bemühungen war ja der Nachweis, daß es keine anderen Bewegungen mehr gibt. Wir haben auch für jeden Typus durch Übergang zu einem passenden Koordinatensystem einen handlichen Vertreter ausfindig gemacht. Aber dazu ist noch einiges zu sagen. Der Übergang zu einem anderen gleichorientierten Koordinatensystem kann nämlich, weil ja alle Längen fest bleiben und die Winkel nicht umgelegt werden, auch nur durch eine lineare Transformation mit kinetischer Matrix bewirkt werden. Haben wir irgendeine Bewegung mit der kinetischen Matrix A und gehen wir vom Koordinatensystem X, Y, P zu einem neuen $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{P}$ über mittels der kinetischen Matrix B, so gelten wegen der Bewegung die Formeln

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ P' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ P \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{P}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P} \end{pmatrix}$$

und wegen der Koordinatentransformation die Formeln

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ P \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{P}' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ P' \end{pmatrix},$$

woraus folgt:

$$\begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{P}' \end{pmatrix} = BAB^{-1} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P} \end{pmatrix} = \dot{A} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P} \end{pmatrix}.$$

Nun heißt bekanntlich eine Matrix A zu einer zweiten $\dot{A}$ ähnlich, wenn es eine dritte Matrix B gibt derart, daß $\dot{A} = BAB^{-1}$ ist. Dieser Begriff ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und hat noch andere bemerkenswerte Eigenschaften (siehe [2], S. 152f.). Wir wollen nun speziell zwei *kinetische* Matrices A und $\dot{A}$ *kinetisch ähnlich* nennen, wenn es eine *kinetische* Matrix B gibt, für die $\dot{A} = BAB^{-1}$ ist. Mit diesem Begriff, der natürlich wieder reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, lassen sich unsere Resultate so formulieren:

Satz I.5. *Jede kinetische Matrix ist einer Matrix der Form (I.31) oder (I.33) oder (I.35) kinetisch ähnlich.*

Nun kann man noch fragen, ob diese Typen wirklich alle verschieden oder vielleicht zum Teil einander kinetisch ähnlich sind. Klar ist, daß eine Drehung durch keine Koordinatentransformation in eine Schiebung oder Grenzdrehung verwandelt werden kann, auch keine Schiebung in eine Grenzdrehung. Außerdem kann, da eine Koordinatentransformation winkel- und streckentreu ist, aus einer Drehung um den Winkel α nicht eine Drehung um einen anderen Winkel und aus einer Schiebung um die Strekke c nicht eine Schiebung um eine andere Strecke hervorgehen.[1] Dagegen haben wir bei der Matrix (I.35) noch keine besondere Bedeutung der Größe a kennen gelernt. Und in der Tat hängt diese nicht von der Bewegung, sondern von der Wahl des Nullpunkts auf der bereits festgelegten x-Achse ab. Es gilt der

Satz I.6. *Die Matrix (I.35) ist für positives bzw. negatives a der für $a = 1$ bzw. $a = -1$ entstehenden Matrix*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

kinetisch ähnlich.

In der Tat sind

$$\begin{pmatrix} \cosh c & 0 & \sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \cosh c & 0 & -\sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix}$$

zwei zueinander reziproke kinetische Matrices (Schiebungen längs der x-Achse) und man rechnet leicht nach:

$$\begin{pmatrix} \cosh c & 0 & \sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pm 2 & 2 \\ \mp 2 & 1 & \pm 2 \\ -2 & \pm 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh c & 0 & -\sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\exp^2 c & \pm 2 \exp c & 2 \exp^2 c \\ \mp 2 \exp c & 1 & \pm 2 \exp c \\ -2\exp^2 c & \pm 2 \exp c & 1 + 2\exp^2 c \end{pmatrix};$$

$\exp c$ kann aber jede positive Zahl a sein.

---

[1] Allerdings sind zwei Schiebungen mit den Schubstrecken c und $-c$ nicht nur spiegelbildlich zueinander, sondern gemäß der Formel

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh c & \sinh c \\ 0 & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh c & -\sinh c \\ 0 & -\sinh c & \cosh c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auch kinetisch ähnlich, während zwei Drehungen mit den Drehwinkeln α und $-\alpha$ es nicht sind.

Die beiden in Satz I.6 auftretenden Matrices sind nicht kinetisch ähnlich, repräsentieren also zwei verschiedene Bewegungstypen, die nicht durch Koordinatentransformation auseinander hervorgehen. In der Tat sehen die zugehörigen Transformationsformeln so aus:

$$X' = -X \pm 2Y + 2P, \quad Y' = \mp 2X + Y \pm 2P,$$
$$P' = -2X \pm 2Y + 3P.$$

Da stets $P > |X|$ ist, ist also beim oberen Vorzeichen $Y' > Y$, beim unteren aber $Y' < Y$. Es wird also die x-Achse um ihr positives Ende beim oberen Vorzeichen in die Halbebene $Y > 0$, beim unteren Vorzeichen in die Halbebene $Y < 0$ hineingedreht. Es handelt sich also um entgegengesetzte Drehungen, die nicht durch Bewegung der Ebene ineinander übergeführt werden können, sondern nur durch Spiegelung.

§ 6. Ein bemerkenswerter Unterschied gegenüber der Euklidischen Geometrie

In der Euklidischen Geometrie sind zwei nacheinander ausgeführte Schiebungen vertauschbar und das Resultat ist wieder eine Schiebung. Die Schiebungen bilden also eine Abel'sche Gruppe. In der hyperbolischen Geometrie ist das ganz anders. Es wird genügen, hier zwei typische Gegenbeispiele anzugeben.

Erstes Beispiel: Die beiden Matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cosh a & 0 & \sinh a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh a & 0 & \cosh a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh b & \sinh b \\ 0 & \sinh b & \cosh b \end{pmatrix}$$

stellen Schiebungen dar, die erste längs der x-Achse, die zweite längs der y-Achse. Sie sind nicht vertauschbar. Denn im Produkt AB ist z. B. das zweite Element der ersten Zeile gleich $\sinh a \sinh b$, im Produkt BA ist es 0. Die Summe der Diagonalelemente ist aber in beiden Produkten gleich $\cosh a + \cosh b +$

cosh a cosh b, also > 3, so daß beide Produkte wieder Schiebungen darstellen.

Zweites Beispiel: Die beiden Matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cosh a & 0 & \sinh a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh a & 0 & \cosh a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 + 2(A_2^2 - A_3^2) & 2A_0A_3 & 2A_0A_2 \\ -2A_0A_3 & 1 - 2A_3^2 & -2A_2A_3 \\ 2A_0A_2 & 2A_2A_3 & 1 + 2A_2^2 \end{pmatrix}$$

mit $A_2^2 > A_3^2$, $A_0 = \pm\sqrt{1 + A_2^2 - A_3^2}$ stellen Schiebungen dar; die erste längs der x-Achse, die zweite ist der Spezialfall $A_1 = 0$ der Matrix (I.26) und stellt nach Satz I.2 wegen $A_2^2 > A_3^2$ eine Schiebung längs der Geraden $A_2 Y + A_3 P = 0$ dar. Die Produkte AB und BA sind wieder verschieden. Aber in beiden ist die Summe der Diagonalelemente gleich

$$\text{(I.37)} \qquad \cosh a\,(2 + 4A_2^2 - 2A_3^2) + 1 - 2A_3^2 + 4\sinh a\, A_0A_2.$$

Nun spezialisieren wir, wählen a positiv, aber so klein, daß $\cosh a < 1 + a^2$, $\sinh a > \frac{a}{2}$ ist, setzen etwa $A_2 = 1$, $A_3^2 = 1 - a^2$ und nehmen für A_0 das negative Vorzeichen der Quadratwurzel, also $A_0 = -\sqrt{1 + a^2}$. Dann wird der Ausdruck (I.37) kleiner als

$$(1 + a^2)(4 + 2a^2) - 1 + 2a^2 - 4\sinh a\sqrt{1 + a^2}$$
$$< 3 + 8a^2 + 2a^4 - 4\,\frac{a}{2}\,1,$$

er wird also für hinreichend kleine a kleiner als 3, und das besagt nach Satz I.1, daß die Produkte AB und BA keine Schiebungen darstellen, sondern Drehungen.

Andererseits kann man aber auch so spezialisieren, daß der Ausdruck (I.37) beliebig groß, also > 3 wird (auch bei negativem A_0). Man braucht bloß A_2 genügend groß zu nehmen. Dann werden die Produkte AB und BA wieder Schiebungen. Und aus Stetigkeitsgründen kann man dann auch so spezialisieren, daß der Ausdruck (I.37) gleich 3 wird; dann sind AB und BA Paralleldrehungen.

Zweites Kapitel: Die Bewegungen des Raumes

§ 7. Längentreue Abbildung

Im Raum erreicht man nach Einführung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes den Punkt mit den Koordinaten x, y, z, indem man vom Nullpunkt aus auf der x-Achse die Strecke x (mit Vorzeichen) abträgt, dann vom Endpunkt aus in der xy-Ebene senkrecht zur x-Achse die Strecke y (mit Vorzeichen) und schließlich vom jetzt erreichten Endpunkt aus senkrecht zur xy-Ebene die Strecke z (mit Vorzeichen). Unter den W-Koordinaten X, Y, Z, P des Punktes versteht man dann die Ausdrücke

(II.1)

$$X = \cosh z \cosh y \sinh x, \quad Y = \cosh z \sinh y, \quad Z = \sinh z,$$
$$P = \cosh z \cosh y \cosh x.$$

Dabei besteht die Identität

$$P^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 1 \tag{II.2}$$

und es ist stets $P > 0$. Jedes reelle Zahlenquadrupel X, Y, Z, P mit $P > 0$, das der Gleichung (II.2) genügt, repräsentiert genau einen Punkt. Der Abstand zweier Punkte $i = 1, 2$ mit den W-Koordinaten X_i, Y_i, Z_i, P_i ist gegeben durch die Formel

$$\cosh (12) = P_1 P_2 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2$$

und die Gleichung einer Ebene lautet

$$AX + BY + CZ + DP = 0,$$

wo die Konstanten A, B, C, D der Ungleichung $A^2 + B^2 + C^2 > D^2$ genügen.

Nun betrachten wir die lineare Transformation

$$(\mathrm{II}.3)\qquad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ P \end{pmatrix}$$

und wollen erreichen, daß, wenn X, Y, Z, P W-Koordinaten eines Punktes sind, für X', Y', Z', P' dasselbe gilt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$(\mathrm{II}.4)\qquad X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - P'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - P^2$$

ist, also

(II.5)

$$\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - a_{41}^2 &= 1, & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} - a_{41}a_{42} &= 0,\\
a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - a_{42}^2 &= 1, & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} - a_{41}a_{43} &= 0,\\
a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - a_{43}^2 &= 1, & a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34} - a_{41}a_{44} &= 0,\\
a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}^2 &= -1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} - a_{42}a_{43} &= 0,\\
& & a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34} - a_{42}a_{44} &= 0,\\
& & a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34} - a_{43}a_{44} &= 0
\end{aligned}$$

und daß außerdem für $P > 0$ stets $P' > 0$ wird. Diese zusätzliche Forderung werden wir gleich durch

$$(\mathrm{II}.6)\qquad a_{44} > 0$$

ersetzen können. Zunächst bemerken wir, daß die Gleichungen (II.5) soviel besagen wie die Matrixrelation

(II.7)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = E \text{ (Einheitsmatrix).}$$

Der erste Faktor ist also die zum zweiten reziproke Matrix, so daß die eindeutige Umkehrung der Transformation (II.3) so aussieht:

$$\text{(II.8)}\qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ P' \end{pmatrix}$$

und auch die zu (II.5) analogen Formeln gelten:

(II.9)

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 - a_{14}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} - a_{14}a_{24} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 - a_{24}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} - a_{14}a_{34} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - a_{34}^2 &= 1, & a_{11}a_{41} + a_{12}a_{42} + a_{13}a_{43} - a_{14}a_{44} &= 0, \\ a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 - a_{44}^2 &= -1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} - a_{24}a_{34} &= 0, \\ & & a_{21}a_{41} + a_{22}a_{42} + a_{23}a_{43} - a_{24}a_{44} &= 0, \\ & & a_{31}a_{41} + a_{32}a_{42} + a_{33}a_{43} - a_{34}a_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Um nun zu zeigen, daß die obige Zusatzforderung $P' > 0$, falls $P > 0$, durch $a_{44} > 0$ ersetzt werden kann, bemerken wir zuerst, daß die Transformation (II.3) speziell für den Nullpunkt $X = Y = Z = 0$, $P = 1$ ergibt: $P' = a_{44}$; also muß $a_{44} > 0$ sein. Wenn das aber der Fall ist, dann ist nach der letzten Zeile von (II.9) links und nach (II.2)

$$a_{44} P = \sqrt{a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 + 1} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1}.$$

Ferner ist identisch

$$\begin{aligned} (a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} Z)^2 = (a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ - (a_{41} Y - a_{42} X)^2 - (a_{41} Z - a_{43} Y)^2 - (a_{42} Z - a_{43} Y)^2, \end{aligned}$$

also

$$|a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} Z| \leqq \sqrt{a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Nach der Transformation (II.3) ist aber $P' = a_{41}X + a_{42} Y + a_{43} Z + a_{44} P$, also

$$\begin{aligned} P' &\geqq a_{44} P - |a_{41} X + a_{42} Y + a_{43} Z| \\ &\geqq \sqrt{a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 + 1} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1} \\ &\quad - \sqrt{a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} > 0. \end{aligned}$$

W. z. b. w.

Wenn zwei Punkte $i = 1, 2$ mit den W-Koordinaten X_i, Y_i, Z_i, P_i durch die Transformation (II.3) in $i' = 1', 2'$ mit den W-Koordinaten X'_i, Y'_i, Z'_i, P'_i übergeführt werden, so ergibt sich aus den Formeln (II.5) sofort, daß

$$X'_1 X'_2 + Y'_1 Y'_2 + Z'_1 Z'_2 - P'_1 P'_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 - P_1 P_2$$

ist, also auch $\cosh(1'2') = \cosh(12)$ und folglich $(1'2') = (12)$. Es handelt sich also um eine umkehrbar eindeutige *längentreue* Abbildung des ganzen Raumes auf sich. Dabei geht jede Ebene $AX + BY + CZ + DP = 0$ wieder in eine Ebene über. Denn nach (II.8) ist

$$AX + BY + CZ + DP = A'X' + B'Y' + C'Z' + D'P',$$

wobei

$$\begin{aligned} A' &= A\,a_{11} + B\,a_{12} + C\,a_{13} - D\,a_{14}, \\ B' &= A\,a_{21} + B\,a_{22} + C\,a_{23} - D\,a_{24}, \\ C' &= A\,a_{31} + B\,a_{32} + C\,a_{33} - D\,a_{34}, \\ D' &= -A\,a_{41} - B\,a_{42} - C\,a_{43} + D\,a_{44}, \end{aligned}$$

also wegen (II.5)

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 - D'^2 = A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0$$

ist, so daß die Gleichung $A'X' + B'Y' + C'Z' + D'P' = 0$ eine Ebene darstellt. Die Gesamtheit unserer Transformationen bildet natürlich wieder eine Gruppe. Diese zerfällt in zwei getrennte Kontinua. Denn die Formel (II.7) lehrt, daß die Determinante Δ der Transformation (II.3) gleich 1 oder -1 ist, und ganz entsprechend wie in § 2 überlegt man sich, daß die Transformationen mit $\Delta = 1$ den Raum als Ganzes kongruent (das ist längentreu mit Erhaltung der Orientierung) auf sich abbilden. Das sind also die *Bewegungen* des Raumes, sie bilden natürlich auch schon eine Gruppe. Dagegen bilden die Transformationen mit $\Delta = -1$ zwar auch den Raum als Ganzes längentreu auf sich ab, aber mit Umkehrung der Orientierung. Die Bildpunkte können nicht durch Bewegung des (dreidimensionalen) Raumes mit den Originalen zur Deckung gebracht werden, sondern es muß noch eine Spiegelung an einer Ebene hinzukommen. Wir wollen nun eine vierreihige Matrix, für deren Elemente die Formeln (II.5), (II.6) und

$\Delta = 1$ gelten, eine **kinetische** Matrix nennen, weil sie eben eine *Bewegung* des ganzen Raumes in sich festlegt. Die kinetischen Matrices sind, wenn man von der Forderung (II.6) absieht, in der Literatur bereits weitverbreitet, es sind die Lorentztransformationen der Physik, wenn man die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 setzt.

§ 8. Die möglichen Bewegungen, falls die kinetische Matrix die charakteristische Wurzel 1 hat

Sei A eine kinetische Matrix mit den Elementen a_{ik}, E die Einheitsmatrix. Die charakteristische Gleichung $|A - \varrho E| = 0$ ist

$$\varrho^4 - p\,\varrho^3 + q\,\varrho^2 - r\,\varrho + s = 0, \tag{II.10}$$

wo p die Summe der Diagonalelemente von A, q die Summe der zweireihigen, r die Summe der dreireihigen Diagonalunterdeterminanten und schließlich s die Determinante $|A|$, also gleich $\Delta = 1$ ist. Die zum i^{ten} Diagonalelement a_{ii} adjungierte dreireihige Unterdeterminante α_{ii} ist aber nach dem zu Beginn des § 3 erwähnten Satz, da $|A| = 1$ ist, gleich dem i^{ten} Diagonalelement der um die Hauptdiagonale gedrehten Matrix, also wieder gleich a_{ii}. Daher ist $r = p$ und, da auch $s = 1$ ist, ist die charakteristische Gleichung eine reziproke (vgl. [5], § 17). Sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 ihre Wurzeln, so sind also ϱ_1^{-1}, ϱ_2^{-1}, ϱ_3^{-1}, ϱ_4^{-1} ebenfalls diese Wurzeln. Daraus läßt sich schließen, daß die charakteristische Wurzel $\varrho = 1$, wenn sie (ausnahmsweise) einmal vorhanden ist, eine Doppelwurzel (oder sogar eine vierfache) sein muß. Doch werden wir davon keinen Gebrauch machen, es wird sich von selbst herausstellen.

Wir behandeln zuerst gerade diesen Ausnahmsfall. Da hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
T &= a_{11}\,T + a_{12}\,U + a_{13}\,V + a_{14}\,W,\\
U &= a_{21}\,T + a_{22}\,U + a_{23}\,V + a_{24}\,W,\\
V &= a_{31}\,T + a_{32}\,U + a_{33}\,V + a_{34}\,W,\\
W &= a_{41}\,T + a_{42}\,U + a_{43}\,V + a_{44}\,W
\end{aligned} \tag{II.11}$$

eine nichttriviale Lösung und wir müssen nun verschiedene Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Das System (II.11) hat eine Lösung mit $W^2 > T^2 + U^2 + V^2$. Dann können wir durch einen Proportionalitätsfaktor erreichen, daß $W^2 - T^2 - U^2 - V^2 = 1$ und $W > 0$ ist, so daß $X = T$, $Y = U$, $Z = V$, $P = W$ die W-Koordinaten eines Punktes sind. Das ist dann bei der Bewegung ein Fixpunkt. Wir legen jetzt das Koordinatensystem so, daß der Nullpunkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $P = 1$ gerade dieser Fixpunkt ist. Dann bleiben bei der Bewegung alle Abstände vom Nullpunkt erhalten. Es ist also $P' = P$, so daß in der Transformation (II.3) die Gleichung $P' = P$ enthalten sein muß. Das besagt aber, daß $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, $a_{44} = 1$ ist. Aus der vierten der Formeln (II.5) links folgt dann noch $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Die Transformation (II.3) gewinnt dadurch das Aussehen

$$\text{(II.12)} \qquad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \qquad P' = P,$$

wobei die dreireihige Matrix nach den Formeln (II.5) und $\Delta = 1$ einfach eine orthogonale ist, wie man sie aus der Euklidischen Geometrie kennt. Da weiß man, daß nochmals die charakteristische Wurzel $\varrho = 1$ vorhanden ist und daß es drei bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutige[1] Zahlen l, m, n gibt, für die

$$\begin{aligned} l &= a_{11}\, l + a_{12}\, m + a_{13}\, n, \\ m &= a_{21}\, l + a_{22}\, m + a_{23}\, n, \\ n &= a_{31}\, l + a_{32}\, m + a_{33}\, n \end{aligned}$$

ist. Daher sind die Punkte der durch den Nullpunkt gehenden Geraden $X : Y : Z = l : m : n$ lauter Fixpunkte und die Bewegung ist einfach eine Drehung um diese Gerade (Rotationsachse). Die zu ihr senkrechten Ebenen sind dann Fixebenen, die in sich selbst übergehen und um ihren Schnittpunkt mit der Rotationsachse gedreht werden. Auch alle Kugeln mit Mittelpunkt auf der Rotationsachse gehen in sich über, sind also Fixgebilde und das

[1] Außer im trivialen Fall der Einheitsmatrix.

gleiche gilt für die Grenzkugeln, die ein Ende der Rotationsachse zum Mittelpunkt haben.

Wählt man die Rotationsachse, die ja durch den bereits gewählten Nullpunkt geht, als z-Achse, dann bleibt die Koordinate z, also auch $Z = \sinh z$ für jeden Punkt unverändert. In der Transformation (II.12) muß also die Formel $Z' = Z$ enthalten sein, was besagt, daß $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$ ist. Aus den Formeln (II.5) links folgt dann noch $a_{13} = a_{23} = 0$ und für die vier noch übrig bleibenden a_{ik} muß nach (II.5) und wegen $\Delta = 1$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$$

sein, so daß man

$$a_{11} = a_{22} = \cos\alpha, \quad a_{21} = -a_{12} = \sin\alpha$$

setzen kann. Die Matrix A sieht daher bei der getroffenen Wahl des Koordinatensystems so aus

$$\text{(II.13)} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Transformationsformeln lauten

(II.14)
$$X' = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y, \quad Y' = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y, \quad Z' = Z, \quad P' = P.$$

Die Bewegung ist eine Drehung um die z-Achse und α ist dabei nach § 4 der Drehwinkel. Die charakteristischen Wurzeln der Matrix (II.13) sind $1, 1, \cos\alpha \pm \sqrt{-1}\,\sin\alpha$. In unserem Resultat steckt auch der

Satz II.1. *Wenn eine Kugel sich so bewegt, daß ihr Mittelpunkt fest bleibt, dann ist das Resultat eine Drehung um einen ihrer Durchmesser.*

Zweiter Fall. Das System (II.11) hat keine Lösung mit $W^2 > T^2 + U^2 + V^2$, wohl aber eine mit $W^2 < T^2 + U^2 + V^2$.

Dann kann es keinen Fixpunkt geben. Aber jetzt stellt die Gleichung

$$(\mathrm{II}.15) \qquad TX + UY + VZ - WP = 0$$

eine Ebene dar, die durch die Transformation (I.3) übergeht in

$$\begin{aligned} &T\,(a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}P) \\ +\,&U\,(a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}P) \\ +\,&V\,(a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}P) \\ -\,&W(a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}P) = 0. \end{aligned}$$

Nun ist uns aus (II.7) die reziproke Matrix A^{-1} bekannt, so daß wir die Gleichungen (II.11) durch Auflösung nach den rechts stehenden T, U, V, W auch so schreiben können:

$$(\mathrm{II}.16) \qquad \begin{aligned} T &= a_{11}\,T + a_{21}\,U + a_{31}\,V - a_{41}\,W, \\ U &= a_{12}\,T + a_{22}\,U + a_{32}\,V - a_{42}\,W, \\ V &= a_{13}\,T + a_{23}\,U + a_{33}\,V - a_{43}\,W, \\ W &= -a_{14}\,T - a_{24}\,U - a_{34}\,V + a_{44}\,W. \end{aligned}$$

Daher geht die vorige Gleichung, wenn man nach X, Y, Z, P ordnet, über in $TX + UY + VZ - WP = 0$. Die Ebene (II.15) geht also bei der Bewegung in sich selbst über (Fixebene). Wählen wir sie als yz-Ebene $X = 0$, so muß das System (II.11) und das damit gleichbedeutende (II.16) die Lösung $T = 1$, $U = V = W = 0$ haben. Daher ist $a_{11} = 1$, $a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$. Die Transformation (II.3) sieht also jetzt so aus:

$$(\mathrm{II}.17) \qquad X' = X, \quad \begin{pmatrix} Y' \\ Z' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ P \end{pmatrix},$$

wo die dreireihige Matrix die Determinante 1 hat, also kinetisch ist, so daß die Orientierung der Fixebene erhalten bleibt.[1] Daher

---

[1] Es kommt auch vor, daß eine Fixebene bei der Bewegung ihre Orientierung umkehrt, z. B. bei Kehrtwendung um eine Achse, das heißt bei Drehung um den Winkel π, geht jede Ebene, in der die Achse liegt, in sich selbst

können wir an die Ergebnisse des ersten Kapitels anknüpfen. Wenn $a_{22}+a_{33}+a_{44}<3$ wäre, so gäbe es nach Satz I.1 in der Fixebene $X=0$ einen Fixpunkt, was unserer jetzigen Voraussetzung widerspricht. Wenn dagegen $a_{22}+a_{33}+a_{44}>3$ ist, dann gibt es in der Fixebene $X=0$ nach Satz I.2 eine Fixgerade, die nur in sich um eine Strecke c verschoben wird. Machen wir diese zur z-Achse, dann gewinnt die Matrix in (II.17) in Analogie zu (I.33) das Aussehen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh c & \sinh c \\ 0 & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix}.$$

Unsere vierreihige Matrix ist daher

$$\text{(II.18)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh c & \sinh c \\ 0 & 0 & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix}$$

und die Transformation lautet

(II.19)

$$X' = X,\ Y' = Y,\ Z' = \cosh c Z + \sinh c P,\ P' = \sinh c Z + \cosh c P.$$

Die charakteristischen Wurzeln der Matrix (II.18) sind 1, 1, $\cosh c \pm \sinh c$. Die Bewegung ist eine Schiebung längs der z-Achse, die um die Strecke c in sich verschoben wird. Nicht nur die Ebene $X=0$, sondern alle Ebenen durch die z-Achse und nur sie sind Fixebenen und alle (in diesen liegenden) Abstands-

---

über, ist also Fixebene, sie kehrt aber ihre Orientierung um. Anderes Beispiel: Wenn eine der drei Matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & -a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & -a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & -a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & -a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & -a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

kinetisch ist, dann sind es die anderen auch. Für die durch die zweite oder dritte Matrix vermittelten Bewegungen ist $X=0$ eine Fixebene, die ihre Orientierung umkehrt, weil die Matrix aus den letzten drei Zeilen und Spalten die Determinante -1 hat, also nicht kinetisch ist.

linien mit der z-Achse als Null-Linie werden in sich verschoben, und zwar um eine auf der krummen Abstandslinie gemessene Strecke der Länge $c \cosh a$, wenn a der Abstand von der z-Achse ist.

Es bleibt noch die Möglichkeit $a_{22} + a_{33} + a_{44} = 3$. Da macht die Fixebene $X = 0$ nach Satz I.3 eine Parallеldrehung, wobei die Punkte der Fixebene sich auf einer Schar konzentrischer Grenzkreise bewegen, deren Radien wieder Radien werden. Macht man das positive Ende der y-Achse zum Mittelpunkt dieser Grenzkreise, so bekommt die Matrix (II.17) die Gestalt (I.35), und nach § 5 genügt es, $a = \pm 1$ zu setzen, wodurch die beiden in Satz I.6 angegebenen Matrices entstehen. Die ganze vierreihige kinetische Matrix ist also

$$\text{(II.20)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \pm 2 & 2 \\ 0 & \mp 2 & 1 & \pm 2 \\ 0 & -2 & \pm 2 & 3 \end{pmatrix},$$

wo die oberen und unteren Vorzeichen zusammen gehören, und die Transformation lautet:

(II.21)

$$X' = X, \quad Y' = -Y \pm 2Z + 2P,$$
$$Z' = \mp 2Y + Z \pm 2P, \quad P' = -2Y \pm 2Z + 3P.$$

Die charakteristischen Wurzeln sind hier alle vier gleich 1. Außer der Ebene $X = 0$ sind auch alle Ebenen $X + a(Y - P) = 0$ Fixebenen. Sie bilden ein Parallelbüschel mit dem positiven Ende der y-Achse als einzigem gemeinsamen (unendlich fernen) Punkt (unendlich ferne Geraden gibt es nicht). Aber keine Fixebene kann eine Fixgerade g enthalten, die in sich verschoben wird. Sonst hätten wir den vorigen Fall und alle Fixebenen hätten die Fixgerade g, während doch die Fixebene $X = 0$ sie nicht enthält, sondern eine Parallеldrehung macht. Somit müssen jetzt alle Fixebenen ebenfalls Paralleldrehungen machen. Wir wollen diese Art von Bewegung, wo es also ein Parallelbüschel von Fixebenen gibt, die ihrerseits in sich Paralleldrehungen machen, als „räumliche Paralleldrehung“ bezeichnen.

Dritter Fall: Das System (II.11) hat nur Lösungen mit $W^2 = T^2 + U^2 + V^2$. Dieser Fall ist unmöglich. Denn wenn es überhaupt eine Lösung mit $W^2 = T^2 + U^2 + V^2$ gibt, dann gibt es auch eine mit $W^2 > T^2 + U^2 + V^2$ oder eine mit $W^2 < T^2 + U^2 + V^2$, so daß in Wahrheit der erste oder zweite Fall vorliegt.

Beweis. Wenn es eine Lösung mit $W^2 = T^2 + U^2 + V^2$ gibt, dann stellt die Gleichung $TX + UY + VZ - WP = -DW$ mit $D > 0$ eine Schar konzentrischer Grenzkugeln dar, die bei der Bewegung in sich übergehen. Wir wollen das Koordinatensystem so wählen, daß der Mittelpunkt dieser Grenzkugeln das positive Ende der y-Achse ist, so daß die Gleichung der Grenzkugelschar so lautet: $Y - P = -D$. Dann muß das System (II.11) und folglich auch (II.16) erfüllt sein für $T = V = 0$, $U = W = 1$. Es ist also

$$\begin{array}{llll} a_{12} + a_{14} = 0, & a_{22} + a_{24} = 1, & a_{32} + a_{34} = 0, & a_{42} + a_{44} = 1, \\ a_{21} - a_{41} = 0, & a_{22} - a_{42} = 1, & a_{23} - a_{43} = 0, & -a_{24} + a_{44} = 1. \end{array}$$

Setzt man daher

$$a_{12} = 2a,\ a_{32} = 2b,\ a_{21} = 2c,\ a_{23} = 2d,\ a_{44} = e,$$

dann kommt der Reihe nach

$$\begin{array}{l} a_{14} = -2a,\ a_{34} = -2b,\ a_{41} = 2c,\ a_{43} = 2d, \\ a_{42} = 1 - e,\ a_{24} = e - 1,\ a_{22} = 2 - e \end{array}$$

und unsere Matrix sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 2a & a_{13} & -2a \\ 2c & 2-e & 2d & e-1 \\ a_{31} & 2b & a_{33} & -2b \\ 2c & 1-e & 2d & e \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante, die gleich 1 sein muß, ergibt sich sofort, wenn man zu der vierten Spalte die zweite addiert und dann von der zweiten Zeile die vierte abzieht; so kommt

$$a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = 1.$$

Nach den Formeln (II.5) erste und dritte links und zweite rechts ist

$$a_{11}^2 + a_{31}^2 = 1, \quad a_{13}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{11}a_{13} + a_{31}a_{33} = 0,$$

woraus sich in Verbindung mit der vorausgehenden Formel ergibt, daß man

$$a_{11} = \cos\alpha, \; a_{31} = \sin\alpha, \; a_{13} = -\sin\alpha, \; a_{33} = \cos\alpha$$

setzen kann. Nach der vierten Formel (II.5) links ist noch

$$4\,a^2 + 4\,b^2 + e^2 - 2\,e + 1 - e^2 = -1,$$

also

$$e = 1 + 2\,a^2 + 2\,b^2.$$

Schließlich ist nach der ersten und vierten Formel (II.5) rechts

$$\begin{aligned} 2\,a\cos\alpha + 2\,b\sin\alpha + 2\,c &= 0, \\ -2\,a\sin\alpha + 2\,b\cos\alpha + 2\,d &= 0, \end{aligned}$$

so daß unsere Matrix endgültig die folgende ist:

(II.22)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 2a & -\sin\alpha & -2a \\ -2a\cos\alpha - 2b\sin\alpha & 1-2a^2-2b^2 & 2a\sin\alpha - 2b\cos\alpha & 2a^2+2b^2 \\ \sin\alpha & 2b & \cos\alpha & -2b \\ -2a\cos\alpha - 2b\sin\alpha & -2a^2-2b^2 & 2a\sin\alpha - 2b\cos\alpha & 1+2a^2+2b^2 \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt verifiziert man auch sofort, daß diese Matrix wirklich kinetisch ist. Das System (II.11) ist jetzt folgendes:

$$\begin{aligned} (\cos\alpha - 1)\,T \qquad\qquad - \sin\alpha\, V \qquad\qquad + 2a\,(U-W) &= 0, \\ -(a\cos\alpha + b\sin\alpha)\,T + (a\sin\alpha - b\cos\alpha)\,V - (a^2+b^2)\,(U-W) &= 0, \\ \sin\alpha\, T + (\cos\alpha - 1)\,V + 2\,b\,(U-W) &= 0, \end{aligned}$$

und die vierte Gleichung ist nochmal die zweite. Das System hat, wie vorausgesehen, die Lösung $T = V = 0$, $U = W = 1$. Es hat aber außerdem, wie man sofort nachrechnet, die Lösung

$$T = a\,(\cos\alpha - 1) + b\sin\alpha, \quad V = -a\sin\alpha + b\,(\cos\alpha - 1),$$
$$U = c - (1 - \cos\alpha), \quad W = c$$

mit beliebigem c. Bei dieser ist

$$T^2 + V^2 + U^2 - W^2 = (a^2 + b^2)(2 - 2\cos\alpha) \\ + (1 - \cos\alpha)^2 - 2c(1 - \cos\alpha),$$

also, wenn nicht $\alpha = 0$ ist, wenigstens für hinreichend große c negativ, so daß in Wahrheit der erste Fall vorliegt (Drehung um eine Achse). Wenn aber $\alpha = 0$ ist, dann ist die angegebene Lösung nur die alte $T = V = 0$, $U = W$. Es gibt aber noch eine. Selbstverständlich ist in diesem Fall vorauszusetzen, daß wenigstens eine der beiden Zahlen a, b von 0 verschieden ist, weil wir sonst die Einheitsmatrix vor uns hätten und überhaupt keine Bewegung stattfände. Unser System sieht jetzt so aus:

$$2a(U - W) = 0, \quad 2b(U - W) = 0, \\ -aT - bV - (a^2 + b^2)(U - W) = 0.$$

Da gibt es die Lösung $T = \lambda b$, $V = -\lambda a$, $U = W = \mu$ mit beliebigem λ, μ. Hier ist $T^2 + V^2 + U^2 > W^2$ und es gibt die Fixebenen $\lambda(bX - aZ) + \mu(Y - P) = 0$, die keine gemeinsame Fixgerade haben, sondern ein Parallelbüschel bilden. Es liegt also der vorhin behandelte Fall vor, wo die Fixebenen Paralleldrehungen machen. In der Tat geht auch die Matrix (II.22) mit $\alpha = 0$ durch die Spezialisierung $a = 0$, $b = \mp 1$ (die übrigens nur auf Änderung des Koordinatensystems hinausläuft) über in (II.20). Interessant sind auch die anderen durch das positive Ende der y-Achse gehenden Parallelbüschel

$$\lambda(kX + lZ) + \mu(Y - P) = 0.$$

Für diese liest man aus der Matrix (II.22) mit $\alpha = 0$ ab:

$$\lambda(kX' + lZ') + \mu(Y' - P') \\ = \lambda(kX + lZ) + (\mu + 2a\lambda k + 2b\lambda l)(Y - P).$$

Jede Ebene eines solchen Büschels geht also wieder in eine Ebene des gleichen Büschels über.

In Analogie zum Satz II.1 ist man versucht zu glauben, daß das bei Grenzkugeln wohl auch so sein müsse, daß ein Radius festbleibt. Das ist aber ein Irrtum; vielmehr ergibt sich aus unseren Betrachtungen folgender

Satz II.2. *Wenn eine Grenzkugel sich so bewegt, daß ihr Mittelpunkt fest bleibt, dann ist das Resultat entweder eine Drehung um einen Radius oder eine Wanderung aller Punkte auf einem durch den Mittelpunkt gehenden Parallelbüschel von Ebenen, jeder Punkt auf einer Ebene des Büschels, so daß kein Punkt seinen Platz behalten kann. Die Ebenen aller anderen durch den Mittelpunkt gehenden Parallelbüschel werden dabei ausgetauscht.*

§ 9. Vorbemerkungen zum Fall, daß die kinetische Matrix nicht die charakteristische Wurzel 1 hat

Um diesen Fall, wo es also keinen Fixpunkt (und auch keine Fixebene) geben kann, anzugreifen, erinnern wir uns an den bekannten Satz, daß jede Bewegung (genauer: das Resultat jeder Bewegung) des Euklidischen Raumes entweder eine Drehung um eine feste Achse oder eine Schiebung oder eine Schraubung um eine in sich verschobene Achse ist (von Hohenberg [3], S. 288 als Satz von Chasles (1860) bezeichnet). Hiernach gibt es, wenn die Bewegung keine Drehung um eine Achse ist, stets *wenigstens eine* Fixgerade g, die in sich um eine Strecke verschoben wird. Es läßt sich vermuten, daß, von der bereits gefundenen räumlichen Paralleldrehung abgesehen, im hyperbolischen Raum wohl etwas Ähnliches gilt. Wenn das der Fall ist, dann wird ein beliebiger Punkt 1 der Geraden g durch die kinetische Matrix A in einen Punkt 2 derselben Geraden übergeführt und der Punkt 1 muß selbst aus einem Punkt 3 dieser Geraden hervorgehen, wobei die Strecken 21 und 13 gleich lang und gleichgerichtet sind, so daß 1 der Mittelpunkt der Strecke 23 ist. Nach [7], § 2 muß daher $X_1 \sinh(23) = X_2 \sinh(13) + X_3 \sinh(21)$ sein, somit wegen $(13) = (21) = \frac{(23)}{2}$

$$X_1 = (X_2 + X_3)\,\frac{\sinh\frac{(23)}{2}}{\sinh(23)} = \frac{X_2 + X_3}{2\cosh\frac{(23)}{2}}$$

und entsprechend auch für Y, Z, P; also ist

(II.23)
$$X_1 = \frac{X_2+X_3}{2\sigma},\ Y_1 = \frac{Y_2+Y_3}{2\sigma},\ Z_1 = \frac{Z_2+Z_3}{2\sigma},\ P_1 = \frac{P_2+P_3}{2\sigma}$$
$$\text{mit } \sigma = \cosh\frac{(23)}{2}.$$

Natürlich muß σ als cosh einer nicht verschwindenden Strecke größer als 1 sein. Nun ist

(II.24)
$$\begin{pmatrix} X_2 \\ \cdot\ \cdot \\ P_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_3 \\ \cdot\ \cdot \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \begin{pmatrix} X_3 \\ \cdot\ \cdot \\ P_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix}.$$

Addiert man die erste und dritte dieser Gleichungen und nimmt die Hälfte, dann kommt nach (II.23)

$$\text{(II.25)} \qquad \sigma \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{A+A^{-1}}{2}\right) \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix}.$$

Das besagt aber, daß σ eine charakteristische Wurzel der Matrix

$$\text{(II.26)} \qquad \frac{A+A^{-1}}{2} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

ist. Dabei haben wegen (vgl. (II.7))

(II.27)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

die c_{ik} das Aussehen

(II.28)
$$c_{ik} = \begin{cases} \dfrac{a_{ik}+a_{ki}}{2}, & \text{wenn } i, k \text{ beide } < 4 \text{ oder beide } = 4 \text{ sind,} \\[2ex] \dfrac{a_{ik}-a_{ki}}{2}, & \text{wenn } i = 4,\ k < 4 \text{ oder } i < 4,\ k = 4 \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun darf aber die Gleichung (II.25) nicht nur *einen* Lösungsvektor X_1, Y_1, Z_1, P_1, sondern muß wenigstens zwei linear unabhängige haben, weil ja jeder Punkt der Geraden g eine Lösung sein soll. Infolgedessen muß nicht nur die charakteristische Determinante $|C - \sigma E|$ verschwinden, sondern auch ihre sämtlichen dreireihigen Unterdeterminanten.

Da wir den Fall, daß die kinetische Matrix A die charakteristische Wurzel 1 hat, daß also die Determinante $|A - E| = |A - 1 \cdot E|$ gleich 0 ist, im vorigen Paragraphen vollständig erledigt haben, brauchen wir uns jetzt nur noch mit solchen kinetischen Matrices zu beschäftigen, für die $|A - E| \neq 0$ ist, und für solche werden wir im nächsten Paragraphen zeigen, daß in der Tat die Matrix (II.26) eine charakteristische Wurzel σ hat, die größer als 1 ist, und daß für diese nicht nur die Determinante $|C - \sigma E|$ verschwindet, sondern auch alle ihre dreireihigen Unterdeterminanten.

§ 10. Kinetische Matrices, die nicht die charakteristische Wurzel 1 haben

Wir wollen jetzt jeder vierreihigen Matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

eine gesternte Matrix

$$G^* = \begin{pmatrix} \overset{*}{g}_{11} & \overset{*}{g}_{12} & \overset{*}{g}_{13} & \overset{*}{g}_{14} \\ \overset{*}{g}_{21} & \overset{*}{g}_{22} & \overset{*}{g}_{23} & \overset{*}{g}_{24} \\ \overset{*}{g}_{31} & \overset{*}{g}_{32} & \overset{*}{g}_{33} & \overset{*}{g}_{34} \\ \overset{*}{g}_{41} & \overset{*}{g}_{42} & \overset{*}{g}_{43} & \overset{*}{g}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & -g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & -g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & -g_{43} \\ -g_{14} & -g_{24} & -g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}$$

zuordnen, deren Elemente also so definiert sind:

$$\overset{*}{g}_{ik} = \begin{cases} g_{ki}, & \text{wenn } i, k \text{ beide} < 4 \text{ oder beide} = 4 \text{ sind,} \\ -g_{ki}, & \text{wenn } i = 4,\ k < 4 \text{ oder } i < 4,\ k = 4 \text{ ist.} \end{cases}$$

Trivialerweise ist dann, wenn a eine Zahl ist, $(aG)^* = aG^*$, und für die Einheitsmatrix E und die Nullmatrix o ist $E^* = E$, $0^* = 0$. Ebenso trivial ist der Satz: Wenn $G + H = K$ ist, dann ist auch $G^* + H^* = K^*$, und für das Produkt überlegt man sich leicht: Wenn $GH = L$ ist, dann ist $H^* G^* = L^*$. Für eine kinetische Matrix A folgt aus (II.27) sofort, daß $A^{-1} = A^*$ ist. Da uns nur noch der Fall $|A - E| \neq 0$ interessiert, hat $A - E$ eine reziproke Matrix, und wir können setzen:

$$\frac{A+E}{A-E} = G. \tag{II.29}$$

Dann ist

$$G + E = \frac{2A}{A-E}, \qquad G - E = \frac{2E}{A-E}.$$

Daher ist auch $|G + E| \neq 0$, $|G - E| \neq 0$, und es ergibt sich durch Division

$$A = \frac{G+E}{G-E}, \quad A(G-E) = G + E. \tag{II.30}$$

Hieraus folgt durch Übergang zu den gesternten Matrices:

$$(G^* - E)A^* = G^* + E$$

und jetzt nach Multiplikation mit der vorigen Gleichung:

$$(G^* - E)A^* A(G - E) = (G^* + E)(G + E),$$

oder also, weil $A^* = A^{-1}$ ist,

$$(G^* - E)(G - E) = (G^* + E)(G + E)$$

und nach Ausmultiplizieren

$$G + G^* = 0 \tag{II.31}$$

oder ausführlicher

$$0 = \begin{cases} g_{ik} + g_{ki}, & \text{wenn } i, k \text{ beide } < 4 \text{ oder beide } = 4 \text{ sind,} \\ g_{ik} - g_{ki}, & \text{wenn } i = 4,\ k < 4 \text{ oder } i < 4,\ k = 4 \text{ ist.} \end{cases}$$

Das besagt aber, daß G so aussieht:

$$(\text{II}.32)\qquad G = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 & \lambda_6 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von G ist, wenn wir ihre Wurzeln mit ω bezeichnen $|G - \omega E| = 0$, oder ausgerechnet:

$$(\text{II}.33)\qquad \omega^4 + \lambda\,\omega^2 - \Lambda^2 = 0,$$

wobei

$$(\text{II}.34)\qquad \lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2 - \lambda_5^2 - \lambda_6^2,$$

$$(\text{II}.35)\qquad \Lambda = \lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4$$

ist. Wegen $|G \pm E| \neq 0$ sind 1 und -1 keine charakteristischen Wurzeln von G, es ist also

$$(\text{II}.36)\qquad 1 + \lambda - \Lambda^2 \neq 0.$$

Nun sei umgekehrt G eine Matrix der Form (II.32) und es sei $|G \pm E| \neq 0$, so daß (II.31) und (II.36) gilt. Definiert man dann eine Matrix A durch die Formel (II.30), so ist auch $(G^* - E)\,A^* = G^* + E$, also wegen (II.31)

$$(-G - E)\,A^* = -G + E \quad \text{oder also} \quad A^* = \frac{G-E}{G+E}\,.$$

Daher ist $A^* A = E$. Das ist aber nach (II.7) gleichbedeutend damit, daß für die Elemente a_{ik} von A die Gleichungen (II.5) gelten. Außerdem ist

$$|A| = \frac{|G+E|}{|G-E|} = \frac{1+\lambda-\Lambda^2}{1+\lambda-\Lambda^2} = 1.$$

Aus (II.30) folgt

$$\frac{A+A^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{G+E}{G-E} + \frac{G-E}{G+E}\right) = \frac{G^2+E}{G^2-E}$$
$$= \frac{(G^2+E)\,(G^2+\lambda E+E)}{(G^2-E)\,(G^2+\lambda E+E)} = \frac{G^4+(\lambda+2)\,G^2+(\lambda+1)\,E}{G^4+\lambda G^2-(\lambda+1)\,E}.$$

Nun kann nach einem Fundamentalsatz über Matrices (siehe [2], S. 151) aus der charakteristischen Gleichung (II.33) für G gefolgert werden, daß $G^4 + \lambda G^2 = \Lambda^2 E$ ist, so daß die letzte Formel sich vereinfacht zu

$$\text{(II.37)} \qquad \frac{A + A^{-1}}{2} = \frac{2G^2 + (\Lambda^2 + \lambda + 1)E}{\Lambda^2 - \lambda - 1}.$$

Der Nenner ist nach (II.36) von 0 verschieden, wodurch nachträglich die vorgenommene Brucherweiterung gerechtfertigt wird. Speziell für das vierte Element der vierten Zeile, welches für $\frac{A + A^{-1}}{2}$ gleich a_{44} und für G^2 gleich $\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2$ ist, ergibt sich aus (II.37) und (II.34)

$$\begin{aligned} a_{44} &= \frac{2(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2) + \Lambda^2 + \lambda + 1}{\Lambda^2 - \lambda - 1} \\ &= \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2 + \Lambda^2 + 1}{\Lambda^2 - \lambda - 1}, \end{aligned}$$

und das wird positiv sein, die Matrix A also kinetisch, wenn $\Lambda^2 > \lambda + 1$ ist. *Man bekommt daher alle kinetischen Matrices A, für die $|A - E| \neq 0$ ist, durch die Formel* (II.30), *wobei G eine Matrix der Form* (II.32) *bedeutet und die Parameter λ_i so gewählt werden, daß $\Lambda^2 > \lambda + 1$ ist.*

Für eine charakteristische Wurzel ω von G ist nach (II.33)

$$\omega^2 = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\Lambda^2}}{2}.$$

Für eine Matrix $\varphi(G)$, wo φ ein Polynom ist, sind dann die charakteristischen Wurzeln gleich $\varphi(\omega)$ (siehe [2], S. 157–158). Nach (II.37) sind daher die charakteristischen Wurzeln σ von $\frac{A + A^{-1}}{2}$ gegeben durch

$$\sigma = \frac{2\omega^2 + \Lambda^2 + \lambda + 1}{\Lambda^2 - \lambda - 1} = \frac{\Lambda^2 + 1 \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\Lambda^2}}{\Lambda^2 - 1 - \lambda}.$$

Beim Pluszeichen vor der Quadratwurzel ist daher

$$\sigma \geqq \frac{\Lambda^2 + 1 + |\lambda|}{\Lambda^2 - 1 + |\lambda|},$$

also gewiß $\sigma > 1$.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß auch alle dreireihigen Unterdeterminanten der Determinante

$$\left|\frac{A+A^{-1}}{2}-\sigma E\right| \tag{II.38}$$

verschwinden. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ die charakteristischen Wurzeln von A, so sind

$$\frac{1}{2}(\varrho_1+\varrho_1^{-1}),\ \frac{1}{2}(\varrho_2+\varrho_2^{-1}),\ \frac{1}{2}(\varrho_3+\varrho_3^{-1}),\ \frac{1}{2}(\varrho_4+\varrho_4^{-1})$$

die von $\frac{A+A^{-1}}{2}$ (siehe [2], S. 163). Hier ist aber jede zweimal aufgeschrieben, weil ja etwa $\varrho_2=\varrho_1^{-1}$, $\varrho_4=\varrho_3^{-1}$ ist. Folglich ist das charakteristische Polynom ein Quadrat

$$\left|\frac{A+A^{-1}}{2}-\sigma E\right| = f(\sigma)^2. \tag{II.39}$$

Anderseits ist nach [2], S. 151 auch

$$\left|\frac{A+A^{-1}}{2}-\sigma E\right| = m(\sigma)\,\mu(\sigma), \tag{II.40}$$

wo m das sogenannte Minimalpolynom ist, das heißt, das Polynom niedersten Grades, für welches $m\left(\frac{A+A^{-1}}{2}\right)=0$ ist, und $\mu(\sigma)$ der größte gemeinsame Teiler aller dreireihigen Unterdeterminanten der Determinante (II.40) ist. Nun ist (II.10) die charakteristische Gleichung von A und es ist dabei $r=p$, $s=1$. Nach einem schon oben benutzten Satz ([2], S. 150–151) ist daher

$$A^4-pA^3+qA^2-pA+E=0,$$

also nach Multiplikation mit A^{-2}

$$A^2+A^{-2}-p(A+A^{-1})+qE=0,$$

wofür man nach Division durch 4 auch schreiben kann:

$$\left(\frac{A+A^{-1}}{2}\right)^2-\frac{p}{2}\left(\frac{A+A^{-1}}{2}\right)+\left(\frac{q}{4}-\frac{1}{2}\right)E=0.$$

Daher genügt die Matrix $\frac{A+A^{-1}}{2}$ einer quadratischen Gleichung. Ihr Minimalpolynom $m(\sigma)$ kann also höchstens vom zweiten Grad sein. Jede Wurzel von $f(\sigma)$ ist nach [2], S. 151 auch Wurzel von $m(\sigma)$. Wenn daher $f(\sigma)$ zwei verschiedene Wurzeln hat, muß $m(\sigma) = f(\sigma)$ sein und daher auch $\mu(\sigma) = f(\sigma)$. Wenn aber $f(\sigma)$ selbst ein Quadrat $(\sigma - \alpha)^2$ ist, kann $m(\sigma)$ nur gleich $\sigma - \alpha$ oder $(\sigma - \alpha)^2$ sein, so daß $\mu(\sigma)$ ebenfalls die Wurzel α hat. In jedem Fall sind also alle charakteristischen Wurzeln von $\frac{A+A^{-1}}{2}$ auch Wurzeln von $\mu(\sigma)$, so daß für eine charakteristische Wurzel σ auch alle dreireihigen Unterdeterminanten der Determinante (II.38) verschwinden. Das gilt also insbesondere auch für die oben nachgewiesene Wurzel σ, die größer als 1 ist, und damit ist unser Ziel erreicht.

§ 11. Die Bewegung, falls die kinetische Matrix nicht die charakteristische Wurzel 1 hat

Nach dem Bewiesenen hat die Matrix $C = \frac{A+A^{-1}}{2}$ eine charakteristische Wurzel $\sigma > 1$ und außer der charakteristischen Determinante $|C - \sigma E|$ verschwinden auch alle ihre dreireihigen Unterdeterminanten. Daher hat das Gleichungssystem

$$(\text{II}.41) \qquad C\begin{pmatrix} T \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} T \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$

eine lineare Schar von Lösungsvektoren. Ist dabei eine Lösung mit $T^2 + U^2 + V^2 < W^2$, so darf man $W > 0$ und $W^2 - T^2 - U^2 - V^2 = 1$ annehmen. Dann sind $X_1 = T$, $Y_1 = U$, $Z_1 = V$, $P_1 = W$ die W-Koordination eines Punktes 1. Nun definieren wir zwei weitere Punkte 2 und 3 durch die Gleichungen

(II.42)

$$A\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ \cdot\ \cdot \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ \cdot\ \cdot \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad A\begin{pmatrix} X_3 \\ \cdot\ \cdot \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\ \cdot \\ P_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist, weil X_1, Y_1, Z_1, P_1 eine Lösung von (II.41) ist.

(II.43)
$$\sigma \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\,\cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\,\cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{A + A^{-1}}{2}\right) \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot\,\cdot \\ P_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_2 + X_3 \\ \cdot\,\cdot\,\cdot \\ P_2 + P_3 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

(II.44)
$$2\sigma X_1 = X_2 + X_3, \quad 2\sigma Y_1 = Y_2 + Y_3, \quad 2\sigma Z_1 = Z_2 + Z_3,$$
$$2\sigma P_1 = P_2 + P_3.$$

Wenn man diese Gleichungen quadriert und dann die ersten drei von der letzten abzieht, kommt

$$4\sigma^2 = 1 + 1 + 2\cosh(23) = 4\cosh^2\left(\frac{23}{2}\right).$$

Daher ist $\sigma = \cosh\left(\frac{23}{2}\right)$ und die Gleichungen (II.44) besagen dann, daß die Punkte 1, 2, 3 auf einer Geraden liegen und daß 1 der Mittelpunkt der Strecke 23 ist. Durch die Bewegung wird daher die Gerade 213 um eine Strecke der Länge $c = 21 = 13 = \frac{23}{2}$ in sich verschoben, wobei $\cosh c = \sigma$ ist.

Um zu sehen, wie die Bewegung aussieht, gehen wir zu einem neuen Koordinatensystem über. Das bedeutet genau wie in § 5 lediglich den Übergang von der Matrix A zu eine „kinetisch ähnlichen" Matrix $\dot{A} = BAB^{-1}$, wo B eine kinetische Matrix ist. Dann ist auch $\dot{A}^{-1} = BA^{-1}B^{-1}$, also auch

$$\dot{C} = \frac{\dot{A} + \dot{A}^{-1}}{2} = B\,\frac{A + A^{-1}}{2}\,B^{-1} = BCB^{-1}.$$

Die (nichtkinetische) Matrix $\dot{C}$ ist also zu C ähnlich, und da ähnliche Matrices dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom $m(\sigma)$ haben (vgl. [2], S. 153) und daher auch dasselbe Polynom $\mu(\sigma)$, so bleibt unsere charakteristische Wurzel $\sigma > 1$ erhalten und das Verschwinden aller dreireihigen Unterdeterminanten der Determinante $|C - \sigma E|$ bleibt auch erhalten. Der Einfachheit halber werden wir aber für die Elemente von $\dot{A}$ und später auch $\dot{C}$ wieder die alte Bezeichnung a_{ik} und c_{ik} beibehalten. Wir wollen jetzt das neue Koordinatensystem so wählen, daß der

Punkt 1 der Nullpunkt ist, also die W-Koordinaten 0, 0, 0, 1 hat und daß die um die Strecke c in sich verschobene Gerade die z-Achse ist. Dann hat der Punkt 2 die W-Koordinaten 0, 0, $\sinh c$, $\cosh c$ und der Punkt 3 die W-Koordinaten 0, 0, $-\sinh c$, $\cosh c$. Zur Berechnung der a_{ik} hat man daher nach (II.42) die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{14} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{41} \cdot a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh c \\ \cosh c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{14} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{41} \cdot a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sinh c \\ \cosh c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese besagen

$$a_{14} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{34} = \sinh c, \quad a_{44} = \cosh c,$$
$$-a_{13} \sinh c + a_{14} \cosh c = 0, \quad -a_{23} \sinh c + a_{24} \cosh c = 0,$$
$$-a_{33} \sinh c + a_{34} \cosh c = 0, \quad -a_{43} \sinh c + a_{44} \cosh c = 1,$$

woraus sofort noch folgt:

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = \cosh c, \quad a_{43} = \sinh c.$$

Unsere Matrix A sieht also zunächst so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21}\, a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31}\, a_{32} & \cosh c & \sinh c \\ a_{41}\, a_{42} & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix}.$$

Aus den Formeln (II.9) folgt dann $a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0$ und außerdem

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0,$$

so daß man

$$a_{11} = \cos \alpha, \quad a_{12} = -\sin \alpha, \quad a_{21} = \pm \sin \alpha, \quad a_{22} = \pm \cos \alpha$$

setzen kann. Da aber die Determinante $|A|$ gleich 1 sein soll, muß noch $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ sein, also ist nur das obere Vorzeichen zulässig. Die Matrix A sieht daher so aus:

$$(\text{II}.45) \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh c & \sinh c \\ 0 & 0 & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix},$$

und diese ist auch, wie sofort zu sehen, wirklich kinetisch und die Transformation lautet:

$$(\text{II}.46) \qquad \begin{aligned} X' &= \cos\alpha X - \sin\alpha Y, & Y' &= \sin\alpha X + \cos\alpha Y, \\ Z' &= \cosh cZ + \sinh cP, & P' &= \sinh cZ + \cosh cP. \end{aligned}$$

Die Matrix (II.45) ist das Produkt der zwei kinetischen Matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh c & \sinh c \\ 0 & 0 & \sinh c & \cosh c \end{pmatrix}$$

in beliebiger Reihenfolge. Der erste Faktor bedeutet eine Drehung um die z-Achse um den Winkel α, der zweite eine Verschiebung der z-Achse in sich um die Strecke c, das Ganze also eine Schraubung um die z-Achse.

§ 12. Nachweis, daß es keine weiteren Bewegungstypen gibt

Es muß jetzt noch der Fall geprüft werden, daß die Gleichung (II.41) keinen Lösungsvektor mit $T^2 + U^2 + V^2 < W^2$ hat. In Analogie zu den verschiedenen Fällen in § 8 erwartet man vielleicht, daß dadurch der Katalog der Bewegungstypen noch ziemlich erweitert wird. Das trifft aber nicht zu. Denn eine kinetische Matrix A, bei der die Gleichung (II.41) keinen Lösungsvektor mit $T^2 + U^2 + V^2 < W^2$ hat, gibt es nicht. Zum Beweis nehmen wir an, wir hätten doch eine, und wollen einen Widerspruch herleiten. Dabei sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Die Gleichung (II.41) hat einen ersten Lösungsvektor mit $T_1^2 + U_1^2 + V_1^2 > W_1^2$. Dann muß sie, da die Lösungsvektoren eine stetige lineare Schar bilden, noch einen zweiten mit $T_2^2 + U_2^2 + V_2^2 > W_2^2$ haben und die Gleichungen

(II.47)

$$T_1X + U_1Y + V_1Z + W_1P = 0, \quad T_2X + U_2Y + V_2Z + W_2P = 0$$

stellen dann zwei Ebenen dar.

Erster Unterfall. Die Ebenen (II.47) schneiden sich in einer Geraden g. Dann wollen wir das Koordinatensystem so wählen, daß die erste Ebene die xy-Ebene $Z = 0$ ist und die Gerade g die x-Achse, so daß die Gleichung der zweiten Ebene $Y + aZ = 0$ lautet. Die Gleichungen (II.47) sind also $Z = 0$ und $Y + aZ = 0$, das heißt, die beiden Lösungsvektoren sind jetzt folgende:

$$T_1 = 0,\ U_1 = 0,\ V_1 = 1,\ W_1 = 0, \quad T_2 = 0,\ U_2 = 1,\ V_2 = a,\ W_2 = 0,$$

woraus durch Linearkombination ein dritter entsteht:

$$T_3 = 0, \quad U_3 = 1, \quad V_3 = 0, \quad W_3 = 0.$$

Nach (II.41) ist also

$$\begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{14} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ c_{41} \cdots c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{14} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ c_{41} \cdots c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichungen besagen unter anderm

$$c_{23} = 0, \quad c_{33} = \sigma, \quad c_{22} = \sigma,$$

oder nach (II.28) durch die a_{ik} ausgedrückt:

$$a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{33} = \sigma, \quad a_{22} = \sigma.$$

Die zweite und dritte Zeile der Matrix A sind daher diese:

$$\begin{matrix} a_{21} & \sigma & a_{23} & a_{24}, \\ a_{31} & -a_{23} & \sigma & a_{34}. \end{matrix}$$

Aus (II.9) folgt dann

$$a_{21}^2 - a_{24}^2 = a_{31}^2 - a_{34}^2, \quad \text{also} \quad a_{21}^2 - a_{31}^2 = a_{24}^2 - a_{34}^2,$$

und

$$a_{21}a_{31} = a_{24}a_{34}.$$

Hiernach ist

$(a_{21} + \sqrt{-1}\, a_{31})^2 = (a_{24} + \sqrt{-1}\, a_{34})^2$, also durch Wurzelziehen

$$a_{21} = \pm a_{24}, \quad a_{31} = \pm a_{34}.$$

Daher folgt aus der zweiten Zeile der Matrix nach (II.9)

$$\sigma^2 + a_{23}^2 = 1,$$

während doch $\sigma > 1$ ist. Wegen dieses Widerspruchs ist der erste Unterfall unmöglich.

Zweiter Unterfall: Die Ebenen (II.47) haben ein gemeinsames Lot. Dann wählen wir das Koordinatensystem so, daß die eine Ebene die xy-Ebene $Z = 0$ ist und das gemeinsame Lot die z-Achse. Die andere Ebene hat dann, wenn c die Länge des Lotes ist, die Gleichung $\cosh c Z - \sinh c P = 0$, so daß die beiden Lösungsvektoren einfach diese sind:

$$0,\ 0,\ 1,\ 0 \quad \text{und} \quad 0,\ 0,\ \cosh c,\ -\sinh c.$$

Durch Linearkombination ergibt sich aber auch der Lösungsvektor 0, 0, 0, 1, während es doch keinen mit $T^2 + U^2 + V^2 < W^2$ geben sollte. Der zweite Unterfall ist also ebenfalls unmöglich.

Dritter Unterfall: Die Ebenen (II.47) sind zueinander parallel. Dann wählen wir das Koordinatensystem so, daß die eine Ebene die xy-Ebene $Z = 0$ ist und daß der beiden Ebenen gemeinsame unendlich ferne Punkt das positive Ende der x-Achse ist. Die Gleichung der zweiten Ebene hat dann die Gestalt $X - P + aZ = 0$, so daß die beiden Lösungsvektoren diese sind: 0, 0, 1, 0 und 1, 0, a, -1, woraus durch Linearkombination auch 1, 0, 0, -1 entsteht. Daher ist diesmal nach (II.41)

$$\begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{14} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ c_{41} \cdots c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{14} \\ \\ \\ c_{41} \cdots c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichungen besagen:

$$c_{13} = 0, \quad c_{23} = 0, \quad c_{33} = \sigma, \quad c_{43} = 0,$$

$$c_{11} - c_{14} = \sigma, \quad c_{21} - c_{24} = 0, \quad c_{41} - c_{44} = -\sigma$$

oder nach (II.28) durch die a_{ik} ausgedrückt:

$$\text{(II.48)} \qquad a_{13} + a_{31} = 0, \quad a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{33} = \sigma, \quad a_{43} - a_{34} = 0,$$

$$\text{(II.49)} \quad 2\,a_{11} - a_{14} + a_{41} = 2\,\sigma, \quad a_{21} + a_{12} - a_{24} + a_{42} = 0,$$
$$a_{41} - a_{14} - 2\,a_{44} = -2\,\sigma.$$

Wir müssen zeigen, daß diese Gleichungen den Erfordernissen einer kinetischen Matrix widersprechen. Zunächst stellen wir fest, daß nicht $a_{41} = a_{14}$ sein kann. Wenn das so wäre, dann hätte man nach (II.49) $a_{11} = \sigma$, $a_{44} = \sigma$. Die erste und vierte Formel (II.5) links würden dann lauten:

$$\sigma^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - a_{14}^2 = 1, \quad a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - \sigma^2 = -1$$

und durch Addition würde folgen $a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 = 0$, also insbesondere $a_{34} = 0$, so daß man aus der dritten Zeile der Matrix nach (II.9) ablesen würde

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + \sigma^2 = 1,$$

während doch $\sigma > 1$ ist. Wir können daher feststellen:

$$\text{(II.50)} \qquad a_{41} \neq a_{14}.$$

Wenn man die zweiten Gleichungen von (II.5) und (II.9) links von einander abzieht, ergibt sich wegen der zweiten Formel (II.48)

$$a_{12}^2 - a_{21}^2 - a_{42}^2 + a_{24}^2 = 0, \qquad \text{also}$$
$$(a_{12} + a_{21})\,(a_{12} - a_{21}) + (a_{24} - a_{42})\,(a_{24} + a_{42}) = 0.$$

Nach (II.49) ist aber $a_{24} - a_{42} = a_{12} + a_{21}$, wodurch die vorige Formel übergeht in

$$\text{(II.51)} \qquad (a_{12} + a_{21})\,(a_{12} - a_{21} + a_{24} + a_{42}) = 0.$$

Das ergibt zwei Möglichkeiten.

Erste Möglichkeit: $a_{12} + a_{21} = 0$, also nach (II.49) auch $a_{42} = a_{24}$. Aus den Formeln

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - a_{41}^2 = 1, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 - a_{14}^2 = 1$$

folgt jetzt $a_{41}^2 = a_{14}^2$, wegen (II.50) also $a_{41} = -a_{14}$. Wegen (II.49) ist dann $a_{11} = \sigma + a_{14}$, $a_{44} = \sigma - a_{14}$, so daß die Matrix A jetzt so aussieht:

$$\begin{pmatrix} \sigma + a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & \sigma & a_{34} \\ -a_{14} & a_{24} & a_{34} & \sigma - a_{14} \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten und vierten Spalte und ebenso Zeile liest man jetzt nach (II.5) und (II.9) rechts ab:

$$a_{13}\,a_{14} + a_{23}\,a_{24} + \sigma a_{34} - a_{34}(\sigma - a_{14}) = 0, \quad \text{also} \quad a_{13}\,a_{14} + a_{23}\,a_{24} + a_{34}\,a_{14} = 0,$$

$$a_{13}\,a_{14} - a_{23}\,a_{24} + \sigma a_{34} - a_{34}(\sigma - a_{14}) = 0, \quad \text{also} \quad a_{13}a_{14} - a_{23}a_{24} + a_{34}a_{14} = 0.$$

Daher durch Addition:

$$a_{14}\,(a_{13} + a_{34}) = 0.$$

Für $a_{14} = 0$ folgt aus der ersten Spalte

$$\sigma^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$

und für $a_{13} + a_{34} = 0$ folgt aus der dritten Spalte

$$a_{23}^2 + \sigma^2 = 1,$$

was beides wegen $\sigma > 1$ nicht möglich ist. Die erste Möglichkeit scheidet also aus.

Zweite Möglichkeit: $a_{12} - a_{21} + a_{24} + a_{42} = 0$.

Wegen der zweiten Formel von (II.49) ist dann

(II.52) $$a_{12} + a_{42} = 0, \quad a_{21} - a_{24} = 0.$$

Die Matrix A sieht daher so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ -a_{13} & -a_{23} & \sigma & a_{34} \\ a_{41} & -a_{12} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten und dritten Spalte und ebenso Zeile liest man nach (II.5) und (II.9) rechts ab:

$$a_{12}\,a_{13} + a_{22}\,a_{23} - a_{23}\,\sigma + a_{12}\,a_{34} = 0,$$
$$-a_{21}\,a_{13} - a_{22}\,a_{23} + a_{23}\,\sigma - a_{21}\,a_{34} = 0.$$

Daraus folgt durch Addition

$$(a_{12} - a_{21})\;(a_{13} + a_{34}) = 0.$$

Wenn $a_{13} + a_{34} = 0$ ist, folgt jetzt aus der dritten Spalte $a_{23}^2 + \sigma^2 = 1$, was wegen $\sigma > 1$ unmöglich ist. Also muß $a_{12} - a_{21} = 0$ sein. Wenn man jetzt die ersten Formeln von (II.5) und (II.9) links voneinander abzieht, folgt $a_{41}^2 = a_{14}^2$ also wegen (II.50) $a_{41} = -a_{14}$, wonach wegen (II.49) auch wieder $a_{11} = \sigma + a_{14}$, $a_{44} = \sigma - a_{14}$ ist, so daß die Matrix A jetzt so aussieht:

$$\begin{pmatrix} \sigma + a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{12} \\ -a_{13} & -a_{23} & \sigma & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{12} & a_{34} & \sigma - a_{14} \end{pmatrix}.$$

Die auf die erste und vierte Spalte bezüglichen Formeln von (II.5) lehren ohne weiteres: $(a_{11} - a_{14})^2 + (a_{21} - a_{24})^2 + (a_{31} - a_{34})^2 - (a_{41} - a_{44})^2 = 0$. Wenn man diese Formel auf die obige Matrix anwendet, kommt

$$(a_{13} + a_{34})^2 = 0.$$

Folglich ist $a_{13} = - a_{34}$ und aus der dritten Spalte folgt dann

$$a_{23}^2 + \sigma^2 = 1$$

im Widerspruch gegen $\sigma > 1$. Damit scheidet auch die zweite Möglichkeit aus, womit der dritte Unterfall und folglich der gesamte erste Fall erledigt ist.

Zweiter Fall: Die Gleichung (II.41) hat auch keinen Lösungsvektor mit $T^2 + U^2 + V^2 > W^2$, also bloß solche mit $T^2 + U^2 + V^2 = W^2$. Dabei darf man natürlich $W = 1$ annehmen. Sind dann $T_1, U_1, V_1, 1$ und $T_2, U_2, V_2, 1$ zwei solche Vektoren, also

$$T_1^2 + U_1^2 + V_1^2 = 1, \quad T_2^2 + U_2^2 + V_2^2 = 1,$$

so ist gewiß $T_1 T_2 + U_1 U_2 + V_1 V_2 \neq 1$, weil sonst

$$(T_1 - T_2)^2 + (U_1 - U_2)^2 + (V_1 - V_2)^2 = 0$$

wäre, so daß wir zweimal denselben Vektor hätten. Betrachten wir nun die Linearkombination

$$T = T_1 + \lambda T_2, \quad U = U_1 + \lambda U_2, \quad V = V_1 + \lambda V_2, \quad W = 1 + \lambda,$$

so ist $T^2 + U^2 + V^2 - W^2 = 2\lambda(T_1 T_2 + U_1 U_2 + V_1 V_2 - 1)$,

also je nach dem Vorzeichen von λ positiv oder negativ, während es nach Voraussetzung doch keine solchen Vektoren geben sollte. Damit ist auch der zweite Fall erledigt und unser Ziel erreicht.

§ 13. Zusammenfassung und Nachwort zur räumlichen Paralleldrehung

Wir haben vier verschiedene Bewegungstypen kennen gelernt: Drehung um eine Achse, Schiebung längs einer Geraden, räumliche Paralleldrehung, Schraubung. Für jeden Typus wurde auch ein spezieller Vertreter angegeben:

(II.14) für Drehung (um die z-Achse, Drehwinkel α),

(II.19) für Schiebung (längs der z-Achse, Schubstrecke c),

(II.21) für räumliche Paralleldrehung (Parallelbüschel der Fixebenen $X + a(Y - P) = 0$, (II.46) für Schraubung (um die z-Achse, Schubstrecke c, Drehwinkel α).

Daß das wirklich verschiedene Typen sind und keine zwei von ihnen durch Koordinatentransformation ineinander übergehen, ist klar. Auch zwei Bewegungen des selben Typus, aber mit verschiedenen c oder α können nicht ineinander übergehen, wie aus der geometrischen Bedeutung von c und α unmittelbar folgt.[1] Aber bei der räumlichen Paralleldrehung sieht es wegen des doppelten Vorzeichens in (II.20) und (II.21) zunächst aus, als ob das zwei verschiedene Typen wären. Bei der ebenen Paralleldrehung war das auch so, weil die beiden Bewegungen spiegelbildlich zueinander waren (vgl. den letzten Absatz von § 5). Spiegelbilder können in der Ebene nicht durch Bewegung zur Deckung gebracht werden, wohl aber durch Bewegung im Raum, indem man die Orientierung der Ebene durch eine Kehrtwendung um die spiegelnde Gerade ändert.

Bei der Paralleldrehung (II.21) mit der Matrix (II.20) und dem Fixebenenbüschel $X + a(Y - P) = 0$ durchläuft speziell jeder Punkt der Fixebene $X = 0$ einen Grenzkreis $P - Y = D$ (> 0), der sich an der y-Achse spiegelt, und zwar beim oberen Vorzeichen in Richtung wachsender z, beim unteren Vorzeichen in Richtung abnehmender z. Diese zur y-Achse spiegelbildlichen Vorgänge können durch eine Kehrtwendung um die y-Achse, also durch die die Orientierung der Ebene $X = 0$ ändernde Transformation

$$X' = -X, \quad Y' = Y, \quad Z' = -Z, \quad P' = P$$

zur Deckung gebracht werden. Die übrigen Fixebenen permutieren sich bei dieser Transformation, aber auf jeder von ihnen durchlaufen die Punkte ihre Grenzkreise beim oberen Vorzeichen wieder in Richtung wachsender z, beim unteren Vorzeichen in

[1] Zwei Schiebungen mit den Schubstrecken c und $-c$ sind allerdings kinetisch ähnlich und im Gegensatz zur ebenen Bewegung sind es zwei Drehungen mit den Drehwinkeln α und $-\alpha$ auch gemäß der Formel

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Richtung abnehmender z. Somit wird diese Transformation mit der zu sich selbst reziproken Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Bewegung mit dem oberen Vorzeichen in die mit dem unteren Vorzeichen überführen. In der Tat rechnet man auch sofort nach:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix (II.20) mit dem oberen Vorzeichen ist also zu der mit dem unteren Vorzeichen kinetisch ähnlich.

Nachtrag. Als ich in der Sitzung meine Resultate vortrug, meinte Herr Kollege Fritz Bopp, etwas Ähnliches könne vielleicht in einer Arbeit von G. Herglotz vorkommen, die er dann auch fand und mir während des Korrekturlaufs dankenswerter Weise zusandte (Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als „starr" zu bezeichnenden Körper. Ann. d. Phys., vierte Folge, Bd. 31 (1910)). Und da ist in der Tat nebenbei auch kurz die Bewegung des hyperbolischen Raumes behandelt. Die Beweise sind von den meinen völlig verschieden und in ihrer gedrängten Kürze nur schwer durchschaubar. Es kommen aber ohne nähere Beschreibung die vier Bewegungstypen heraus. Die Rotation wird als elliptischer, die Schiebung als hyperbolischer, die räumliche Paralleldrehung als parabolischer, die Schraubung als loxodromischer Typus bezeichnet.

Literatur

[1] Baldus, R. und Löbell, F.: Nichteuklidische Geometrie, 4. Aufl. Berlin 1964 de Gruyter, Sammlung Göschen.

[2] Gröbner, W.: Matrizenrechnung. Mannheim 1966, Hochschultaschenbücherverlag.

[3] Hohenberg, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. 3. Aufl. Springer-Verlag Wien 1966.

[4] Liebmann, H. Nichteuklidische Geometrie, 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1923, de Gruyter-Verlag.

[5] Perron, O.: Algebra, Band II, 3. Aufl. Berlin 1951, de Gruyter-Verlag.

[6] –: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene, Teubner-Verlag Stuttgart 1962.

[7] –: Parameterdarstellung von Gerade, Ebene und Raum in der hyperbolischen Geometrie II. Math. Zeitschr. **101** S. 1–12 (1967).