

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Neue Methoden zur Quantisierung relativistischer Feldgleichungen

Von Fritz Bopp in München

Mit einer Figur

Vorgetragen am 8. Mai 1964

Übersicht

1. Teilchen und Antiteilchen	71
2. Zur Quantisierung relativistischer Feldgleichungen . .	73
3. Zur Lorentzinvarianz der Schrödingergleichung . . .	78
4. Die Mehrbahngleichung und das Bineutrino	81
5. Wellengleichung für Bispinoren und VA-Kopplung . .	85

1. Teilchen und Antiteilchen

Wir zweifeln an der Richtigkeit der Aussage, die Diracgleichung für kräftefreie Teilchen ergäbe u. a. Lösungen für Teilchen negativer Energie und zwänge, da es solche Teilchen nicht gibt, zu einer Umdeutung, die aus den Zuständen für Teilchen negativer Energie solche für Antiteilchen positiver Energie macht.¹ Dieser Aussage stellen wir die Behauptung entgegen, daß die Diracgleichung in Wirklichkeit nur Zustände mit positiver Energie liefert, und zwar solche für Teilchen und für Antiteilchen. These und Antithese gelten bei unveränderter Diracgleichung und bei gleichbleibender Lösungsmannigfaltigkeit. Dennoch handelt es sich nicht nur um eine verbale, sondern um eine inhaltliche Änderung. Denn wenn die Diracgleichung unmittelbar Teilchen und Antiteilchen liefert, fällt der für die bisherige relativistische Quantenfeldtheorie so charakteristische Rollentausch² von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Antiteilchen fort.

¹ P. A. M. Dirac: Die Prinzipien der Quantenmechanik, Hirzel 1930, § 79; Proc. Roy. Soc. London Ser. A 126, 360 (1930).

² Vgl. z. B. J. M. Jauch, F. Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons, Cambridge (Mass.) 1955, § 3-8.

Die herkömmliche Aussage stützt sich auf die beiden folgenden anscheinend ganz unproblematischen Argumente:

1. Die Diracgleichung hat Lösungen mit positiver und negativer Frequenz: $\omega > 0$ bzw. $\omega < 0$.
2. Nach der Planckschen Relation ist die Energie $E = \hbar \omega$, also $E > 0$ bzw. $E < 0$.

Gegen diese Argumentation sprechen zwei Gründe, ein anschaulicher und ein gruppentheoretischer.

Den anschaulichen Grund erkennen wir, wenn wir zwei ebene Wellen mit positiver und negativer Frequenz und mit entgegengesetztem Wellenvektor vergleichen:

$$\varphi_1 = u_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \varphi_2 = u_2 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Beide haben die gleiche Laufrichtung. Die Geschwindigkeit der Ebenen konstanter Phase ist in beiden Fällen die nämliche. Wenn die Zuordnung zwischen Wellen und Teilchen einen physikalischen Sinn haben soll, muß der Impuls in die Laufrichtung der Wellen zeigen. Wir haben also in beiden Fällen den gleichen Impuls $\mathfrak{p} = +\hbar \mathbf{k}$. Da der Impuls $\mathfrak{p}$ und die Energie E ebenso wie der Wellenvektor $\mathbf{k}$ und die Frequenz ω einen Vierervektor bilden, folgt daraus, daß die Energie in beiden Fällen positiv ist, nämlich gleich $+\hbar \omega$. — Die Relationen von De Broglie und Planck müssen daher bei relativistischen Gleichungen und bei Frequenzen beiderlei Vorzeichens wie folgt geschrieben werden:

$$(1) \quad \mathfrak{p} = \varrho \hbar \mathbf{k}, \quad E = \varrho \hbar \omega.$$

Darin ist

$$(2) \quad \varrho = \begin{cases} +1 & \text{für } \omega > 0, \\ -1 & \text{für } \omega < 0. \end{cases}$$

Dieses Ergebnis ist auch gruppentheoretisch zu erwarten. Wegen der Invarianz der Phase³

³ Mit dieser Aussage ist äquivalent, daß $-i\nabla$ ein gewöhnlicher kovarianter Vektor ist. Wenn man die Forderung hinzufügt, daß bei Zeitumkehrung $-i$ in i übergehe, so ist das gleichbedeutend mit der Einführung eines Pseudoskalars erster Art. Aus dem Unterschied zwischen der hier vorgeschlagenen und der herkömmlichen Quantisierung muß man schließen, daß die Auffassung, i sei ein Pseudoskalar erster Art, nicht konsequent durchführbar ist.

$$(3) \quad k \cdot x = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r} - \omega t$$

ist k ein zu x kontragredienter, also ein im gewöhnlichen Sinne kovarianter Vektor. Dagegen ist der Viererimpuls, wie schon aus

$$(4) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{p} = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

hervorgeht, nach der Definition von Jauch und Rohrlich⁴ ein Pseudovektor erster Art. Daher können $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}$ und E , ω nicht einfach proportional sein. Der Faktor, der $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{k}$ und E mit ω verbindet, ist vielmehr ein Pseudoskalar erster Art.

Die Diracgleichung liefert also zwar Lösungen mit positiver und negativer Frequenz; aber die Energie ist immer positiv, und der Impuls ist je nach dem Vorzeichen von ω zum Wellenvektor parallel oder antiparallel. Das ist ganz mit dem Feynmanschen Verfahren im Einklang, im Falle $\omega < 0$ für den Impuls $\mathfrak{p} = -\hbar \mathfrak{k}$ zu schreiben. Doch ist das hier nicht erst das Ergebnis einer Umdeutung. Es folgt vielmehr daraus, daß die Vektoren k^μ und p^μ verschiedenen Transformationscharakter haben. Wir können geradezu sagen:

Wellen mit $\omega > 0$ sind Teilchenzustände mit $E > 0$,

Wellen mit $\omega < 0$ sind Antiteilchenzustände mit $E > 0$.

Der Vorzeichenoperator ϱ liefert eine neue Quantenzahl, mit der Teilchen und Antiteilchen unterschieden werden:

Für Teilchen ist $\varrho = +1$,

für Antiteilchen ist $\varrho = -1$.

Die neue Quantenzahl ist mit der Leptonen- oder Barionenzahl vergleichbar, gilt aber universell. Vielleicht sollte man für ϱ einen Namen haben und in Analogie zu den Worten 'Parität' und 'Helizität' von 'Antizität' sprechen.

2. Zur Quantisierung relativistischer Feldgleichungen

Die Quantisierung relativistischer Feldgleichungen verläuft nach der neuen Antiteilchenkonzeption anders als nach der alten. Beiden Konzeptionen ist gemeinsam, daß Paare kanonisch kon-

⁴ I. c. 2): Appendix A 3; Paul Roman: Theory of Elementary Particles, Amsterdam 1961, I § 3j.

jugierter Operatoren existieren, etwa ψ und $\psi^\dagger$, die die Vernichtung bzw. die Erzeugung von Teilchenzuständen positiver und negativer Frequenz beschreiben:

Nach der alten Konzeption,⁵

nach der Frequenz- und Energievorzeichen übereinstimmen, werden durch ψ Teilchen mit positiver und negativer Energie vernichtet, und das wird als äquivalent mit der Vernichtung von Teilchen und mit der Erzeugung von Antiteilchen positiver Energie betrachtet. Die Operatoren ψ liefern also nach der Umdeutung zugleich Vernichtungs- und Erzeugungsprozesse; Entsprechendes gilt für $\psi^\dagger$. Die Doppelrolle der Operatoren führt zu den bekannten Komplikationen, z. B. dazu, daß sich das Vakuum Φ_0 nicht mehr einfach durch $\psi\Phi_0 = 0$ definieren läßt.

Nach der neuen Konzeption,

nach der Zustände mit positiver und mit negativer Frequenz Teilchen bzw. Antiteilchenzustände mit positiver Energie sind, bleiben die Operatoren ψ stets Vernichtungsoperatoren und die $\psi^\dagger$ Erzeugungsoperatoren. Die Vakuumgleichungen $\psi\Phi_0 = 0$ bleiben sinnvoll und die Quantisierung klassisch relativistischer Feldgleichungen verläuft genauso wie die nichtrelativistischer.

Wir können also die Quantenmechanik relativistischer Teilchen durch eine vergleichsweise naive Quantisierung klassisch relativistischer Feldgleichungen gewinnen. Doch ergibt sich eine unerwartete Komplikation. Wie wir an Beispielen sehen werden, kann Lorentzinvarianz durch kanonische Quantisierung zerstört werden. Man muß sich darum nach der Quantisierung davon überzeugen, ob die resultierenden Gleichungen lorentzinvariant sind.

Relativistische Feldgleichungen hängen eng mit den Darstellungen der Lorentzgruppe zusammen. Da man alle Darstellungen dieser Gruppe aus der spinoriellen, nämlich aus $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ableiten kann, ist die bereits auf Heisenberg⁶ zurückgehende Annahme verlockend, daß das 'Urfeld' ein Spinorfeld sei. Wir geben

⁵ l. c. 2), Roman § 3-8.

⁶ W. Heisenberg, Rev. Mod. Phys. 29, 229 (1957); H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki, Z. f. Naturf. 14a, 441 (1959).

hier dieser Verlockung nach, weil die neue Antiteilchenkonzeption bei Spinorfeldern zu besonders einfachen Ergebnissen führt. Vielleicht sind sie zu einfach, um wahr zu sein. Vielleicht ist die Einfachheit ein Siegel der Wahrheit. Jedenfalls ist sie zu einer ersten Prüfung der neuen Antiteilchenkonzeption willkommen.

Heisenberg folgend gehen wir von einer Feldtheorie mit folgender Lagrangedichte aus:

$$(5) \quad L = \hbar c \{ \bar{\psi} \gamma^n \partial_n \psi - \kappa \varepsilon \bar{\psi} \bar{\gamma} \gamma \times \gamma \psi \psi \}.$$

Darin ist der letzte Ausdruck durch

$$(6) \quad \bar{\psi} \bar{\gamma} \gamma \times \gamma \psi \psi = \sum_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} \bar{\psi}_{\mu_1} \bar{\psi}_{\mu_2} \gamma_{\mu_1 \nu_1} \gamma_{\mu_2 \nu_2} \psi_{\nu_1} \psi_{\nu_2}$$

definiert. L ist lorentzinvariant, falls

$$(7) \quad \gamma \times \gamma = 1 \times 1, \gamma^\mu \times \gamma_\mu, \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \times \gamma_{\mu\nu}, \gamma^{5\mu} \times \gamma_{5\mu} \text{ oder } \gamma^5 \times \gamma_5$$

ist. Die Indizes μ, ν laufen von 0 bis 3 und können mit dem metrischen Tensor $(g^{\mu\nu}) = (-1 +1 +1 +1) = (g_{\mu\nu})$ herauf- oder heruntergeholt werden. Der Index 5 wird nach Bequemlichkeit tief- oder hochgestellt. Die doppeltindizierten Matrizen seien durch

$$(8) \quad \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\gamma^{\nu\mu}$$

definiert.

Für die kanonische Quantisierung ist es bequemer, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$ zu setzen. In diesem Fall folgt aus Gl. (5):

$$(9) \quad L = \hbar c \left\{ \frac{i}{c} \psi^\dagger \dot{\psi} - i \psi^\dagger \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla \psi + \kappa \varepsilon \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \gamma \times \gamma_4 \gamma \psi \psi \right\},$$

und die Hamiltondichte lautet, wenn wir nun von der ersten Möglichkeit in Gl. (7) Gebrauch machen:

$$(10) \quad H = \hbar c \{ i \psi^\dagger \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla \psi - \kappa \varepsilon \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi \}.$$

Darin ist

$$(11) \quad \vec{\gamma}_{14} = (\gamma_{14}, \gamma_{24}, \gamma_{34}), \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, \psi_3^\dagger, \psi_4^\dagger),$$

und ψ_e und $\psi_e^\dagger$ sind in der klassischen Feldtheorie komplex konjugiert und nach der Quantisierung hermitesch konjugiert.

Zum Schrödingeroperator gelangen wir, wenn wir Gl. (10) über das Volumen integrieren und vorher die Feldkomponenten $\psi_e(\mathbf{r}, t)$ und $\psi_e(\mathbf{r}, t)^\dagger$ durch die zeitunabhängigen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\psi_e(\mathbf{r})$ und $\psi_e(\mathbf{r})^\dagger$ ersetzen, die den Fermischen Vertauschungsrelationen genügen:

(12)

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = \{\psi(\mathbf{r})^\dagger, \psi(\mathbf{r}')^\dagger\} = 0, \{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')^\dagger\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen Vielfache der 4×4 -Einheitsmatrix. Damit folgt aus Gl. (10) der Schrödingeroperator:

$$(13) \quad H = \hbar c \int dV \times \\ \times \{i \psi(\mathbf{r})^\dagger \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) - \kappa \varepsilon \psi(\mathbf{r})^\dagger \psi(\mathbf{r})^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})\}.$$

Die Aufspaltung des Kopplungsfaktors $\kappa \varepsilon$ in ein Volumen ε und eine Wellenzahl κ ist hier noch willkürlich.⁷

Mit den Vertauschungsrelationen (12) erhält man aus der Wechselwirkungsichte $\psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi$ durch Faktorumstellung

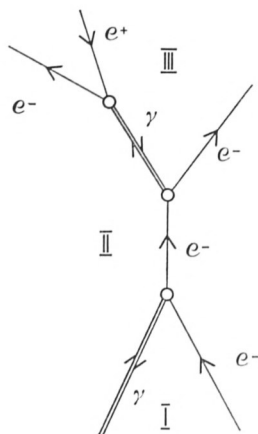
$$(14) \quad \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi = -(\psi^\dagger \gamma_4 \psi) (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) + \delta(0) \psi^\dagger \psi.$$

Darin ist $\delta(0)$ sozusagen der Wert der δ -Funktion $\delta(\mathbf{r})$ in $\mathbf{r} = 0$. Abgesehen von der zunächst unwesentlichen Problematik dieses Faktors, erhält man die Dichte $\psi^\dagger \psi$, die bekanntlich nicht lorentzinvariant ist. Von den beiden anderen Ausdrücken in (14) kann also höchstens einer lorentzinvariant sein, obwohl beide Anwärter sind, in der Quantenfeldtheorie an die Stelle des klassischen lorentzinvarianten Ausdrucks zu treten. Glücklicherweise kann man zeigen, daß der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (14) die Lorentzinvarianz nicht stört, also gerade derjenige Ausdruck, den man anschaulich erwartet, weil er nur die Wechselwirkung beschreibt und keinen verkappten Massenterm liefert.

⁷ Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse 1958, 167 bis 225, hier: F. Bopp, § 11, K. Laugwitz, § 12.

Wenn die Einfachheit spinorieller Theorien Ausdruck einer tieferen Einsicht sein sollte, so wird man diese in erster Linie nicht in der Wechselwirkungsmatrix suchen, sondern in dem, was allen diesen Theorien gemein ist. Sie zeigt sich darin, daß die Summanden der Fockdarstellung einzeln Lösungen der aus (15) folgenden Schrödingergleichung sind, daß es also wie beim nichtrelativistischen Mehrteilchenproblem Wellenfunktionen im Konfigurationsraum mit endlich vielen Argumenten gibt.

Der naheliegende Einwand, daß damit Teilchenerzeugungen ausgeschlossen wären, trifft nicht zu. Nebenstehender Graph⁸ zeigt einen Vorgang, der mit der Paarerzeugung von Elektronen



bei der Streuung eines Lichtquants an einem Elektron vergleichbar ist, wie die beigefügten Buchstaben zeigen. Die Pfeile im Graphen geben die Richtungen der Viererwellenvektoren an, lassen also bei Vergleichung mit der Zeitrichtung erkennen, was Teilchen und was Antiteilchen sind. In den den γ -Quanten entsprechenden Doppellinien ist je ein Teilchen und ein Antiteilchen verbunden. Obwohl wir offensichtlich eine Paarerzeugung haben, ist die Zahl der Argumente in der Wellenfunktion endlich, und zwar in unserem Beispiel gleich 3 (I, II, III in obiger Figur). Sie ist gleich der Zahl der Linien im Graphen oder der

⁸ l. c. 7), p. 181. Vgl. auch R. P. Feynman, Phys. Rev. 76, 749 (1949), Fig. 3c.

‘Bahnen’, wie wir sagen wollen. Dem n -Teilchen-Problem der nichtrelativistischen Quantenmechanik entspricht also in der relativistischen Quantenmechanik ein n -Bahn-Problem. Man beachte die Punkte o ; sie sind Scheitel, die man mit denen der Quantenelektrodynamik vergleichen kann. Sie sind aber auch wie bei der Fermiwechselwirkung Treffpunkt von vier Fermionenlinien, von denen hier allerdings zwei zusammenfallen. Weil beide Auffassungen möglich sind, ist es nicht von vorneherein abwegig, zu prüfen, ob die rein spinorielle Theorie mit der Wirklichkeit verträglich ist.

3. Zur Lorentzinvarianz der Schrödingergleichung

Wir müssen noch die Lorentzinvarianz der mit dem Operator in Gl. (15) gebildeten Schrödingergleichung

$$(16) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = H \Phi(t)$$

beweisen.

Seien P^μ und $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ die infinitesimalen Transformationen einer unitären Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe, seien also P^μ und $M^{\mu\nu}$ hermitesche Funktionale von $\psi_\nu(\mathbf{r})$ und $\psi_\nu(\mathbf{r})^\dagger$, die folgenden Vertauschungsrelationen genügen:

$$(17) \quad \begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, \quad [P^\lambda, M^{\mu\nu}] = i\hbar (P^\mu g^{\nu\lambda} - P^\nu g^{\mu\lambda}), \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i\hbar (M^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - M^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + M^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} - M^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}), \end{aligned}$$

so ist

$$(18) \quad H = c P^0$$

ein möglicher Operator einer lorentzinvarianten Schrödingergleichung. Zum Beweis der Lorentzinvarianz von Gl. (16) muß man also zeigen, daß man den Schrödingeroperator (15) in einen Lieschen Operatorring einbetten kann.

Das ist hier der Fall. Die Operatoren für die infinitesimalen Lorentztransformationen lauten:

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \hbar \int d\Pi_{\mathbf{r}} \{ i \psi^\dagger \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla \psi - \kappa \varepsilon \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi \}, \\
 \vec{P}^1 &= -i \hbar \int d\Pi_{\mathbf{r}} \psi^\dagger \nabla \psi, \\
 \vec{M}^{23} &= \hbar \int d\Pi_{\mathbf{r}} \psi^\dagger \left(-i \mathbf{r} \times \nabla + \frac{1}{2} \vec{\gamma}^{23} \right) \psi, \\
 \vec{M}^{01} &= \hbar \int d\Pi_{\mathbf{r}} \left\{ -\frac{i}{2} \psi^\dagger (\mathbf{r} \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla + \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \psi + \kappa \varepsilon_{\mathbf{r}} \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi \right\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Setzen wir zunächst $\kappa = 0$, so zeigt sich die Richtigkeit der Vertauschungsrelationen darin, daß auch die Operatoren

$$\begin{aligned}
 \vec{p}^1 &= -i \hbar \nabla, & p^0 &= i \vec{\gamma}_{14} \cdot \nabla, \\
 \vec{m}^{23} &= -i \hbar \mathbf{r} \times \nabla + \frac{\hbar}{2} \vec{\gamma}^{23}, & \vec{m}^{01} &= -\frac{1}{2} (\mathbf{r} p^0 + p^0 \mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{20}$$

den Relationen (17) genügen. Bezeichnen wir P^μ und $M^{\mu\nu}$ nun im Falle $\kappa = 0$ mit $\overset{\circ}{P}^\mu$ und $\overset{\circ}{M}^{\mu\nu}$ und die Wechselwirkungsterme in (19) gemäß

$$\begin{aligned}
 W &= -\hbar \kappa \varepsilon \int \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi d\Pi_{\mathbf{r}}, \\
 \vec{W}^1 &= +\hbar \kappa \varepsilon \int \mathbf{r} \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi d\Pi_{\mathbf{r}},
 \end{aligned} \tag{21}$$

mit W und $\vec{W}^1$, so ist

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \overset{\circ}{P}^0 + W, & \vec{P}^1 &= \overset{\circ}{P}^1, \\
 \vec{M}^{01} &= \overset{\circ}{M}^{01} + \vec{W}^1, & \vec{M}^{23} &= \overset{\circ}{M}^{23}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Durch Substitution in (17) erhält man folgende Vertauschungsrelationen¹⁰ für W und $\vec{W}^1$:

$$[\overset{\circ}{P}^i, W] = 0, \quad [\overset{\circ}{M}^{kl}, W] = 0, \tag{23}$$

$$[\overset{\circ}{P}^i, W^k] = i \hbar W g^{ik}, \quad [\overset{\circ}{M}^{kl}, W^i] = -i \hbar (W^k g^{li} - W^l g^{ki}), \tag{24}$$

$$[\overset{\circ}{P}^0, W^i] - [\overset{\circ}{M}^{0i}, W] + [W, W^i] = 0, \tag{25}$$

$$[\overset{\circ}{M}^{0k}, W^l] - [\overset{\circ}{M}^{0l}, W^k] + [W^k, W^l] = 0. \tag{26}$$

¹⁰ Die folgenden Rechnungen hat unabhängig auch Herr Dipl.-Phys. N. Vahedi überprüft.

Wenn die erste Gl. (24) gilt, folgt Gl. (25) durch Kommutation von Gl. (26) mit $\hat{P}^k$. Der Beweis der Gl. (23) ergibt sich beiläufig mit dem der Gl. (24). Zum Beweis von Gl. (24) brauchen wir die Kommutatoren:

$$(27) \quad \begin{aligned} [W^i, \psi] &= 2 \hbar \kappa \varepsilon x^i (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) \gamma_4 \psi, \\ [W^i, \psi^\dagger] &= -2 \hbar \kappa \varepsilon x^i \psi^\dagger \gamma_4 (\psi^\dagger \gamma_4 \psi). \end{aligned}$$

Entsprechend ist:

$$(28) \quad \begin{aligned} [W, \psi] &= 2 \hbar \kappa \varepsilon (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) \gamma_4 \psi, \\ [W, \psi^\dagger] &= -2 \hbar \kappa \varepsilon (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) \gamma_4 \psi. \end{aligned}$$

Hiernach ist:

$$(29) \quad \begin{aligned} [W^i, \hat{P}^k] &= \\ &= 2 \hbar \kappa \varepsilon \int d\Pi_r \{ \psi^\dagger p^k x^i (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) \gamma_4 \psi - x^i \psi^\dagger \gamma_4 (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) p^k \psi \}, \end{aligned}$$

d. i. nach partieller Integration im ersten Term und Umordnung der Faktoren

$$= -2 i \hbar^2 \kappa \varepsilon \int d\Pi_r x^i (\partial^k \psi^\dagger \cdot \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi + \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \partial^k \psi \cdot \psi)$$

und wegen der Möglichkeit von simultanen Faktorpermutationen

$$= -2 i \hbar^2 \kappa \varepsilon \int d\Pi_r x^i (\psi^\dagger \partial^k \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi + \psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \partial^k \psi).$$

Die halbe Summe ergibt:

$$(30) \quad [W^i, \hat{P}^k] = -i \hbar^2 \kappa \varepsilon \int d\Pi_r x^i \partial^k (\psi^\dagger \psi^\dagger \gamma_4 \times \gamma_4 \psi \psi).$$

Hieraus erhält man nach partieller Integration die erste Gl. (24). Bei Ersetzen von W^i durch W fällt in dem letzten Integral der Faktor x^i fort, so daß die Integration 0 ergibt, was mit der ersten Gl. (23) übereinstimmt.

Ersetzt man oben p^k durch m^{kl} , so liefert der Bahnanteil nach der nämlichen Rechnung die rechten Seiten der zweiten Gleichungen (23) und (24). Der Spinanteil muß also vertauschbar sein, wie man sofort sieht, wenn man p^k in Gl. (29) durch γ^{kl} ersetzt und die Glieder ordnet.

Es bleibt noch Gl. (26) übrig. Der letzte Term ist offensichtlich gleich 0. Der erste Summand ergibt in Anlehnung an Gl. (29):

$$(31) \quad [W^l, \overset{\circ}{M}{}^{0k}] = -2\hbar\kappa\varepsilon \int d\Pi_r \{ \psi^\dagger \overset{\circ}{m}{}^{0k} x^l (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) \gamma_4 \psi - x^l \psi^\dagger \gamma_4 (\psi^\dagger \gamma_4 \psi) \overset{\circ}{m}{}^{0k} \psi \}.$$

Nun ist

$$\overset{\circ}{m}{}^{0k} = \frac{1}{2} (x^k p^0 + p^0 x^k) = p^0 x^k + \frac{i\hbar}{2} \gamma^{k4} = x^k p^0 - \frac{i\hbar}{2} \gamma^{k4}.$$

Der Spinterm liefert als Beitrag zur geschweiften Klammer in Gl. (31):

$$-\frac{i\hbar}{2} x^l \psi^\dagger \psi^\dagger (\gamma^{k4} \gamma_4 + \gamma_4 \gamma^{k4}) \times \gamma_4 \psi \psi = 0.$$

Der Ableitungsterm ergibt einen in k, l symmetrischen Ausdruck, der ebenfalls verschwindet, nämlich:

$$-2\hbar\kappa\varepsilon \int d\Pi_r x^k x^l \psi^\dagger \psi^\dagger (p^0 \gamma_4 + \gamma_4 p^0) \times \gamma_4 \psi \psi = 0.$$

4. Die Mehrbahngleichung und das Bineutrino

Bei spinoriellen Gleichungen ist die Zahl der Bahnen konstant. Wir können daher für den Zustandsvektor folgenden Ansatz machen:

$$(32) \quad \Phi = \sum_{v_1 \dots v_n} \int_B d\Pi_{r_1 \dots r_n} \varphi_{v_1 \dots v_n}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n) \psi_{v_1}(\mathbf{r}_1)^\dagger \dots \psi_{v_n}(\mathbf{r}_n)^\dagger \Phi_0,$$

d. i. mit φ als einem Spinor n -ter Stufe spinoriell zusammengefaßt:

$$(33) \quad \Phi = \int_B d\Pi_{r_1 \dots r_n} \psi(\mathbf{r}_1)^\dagger \dots \psi(\mathbf{r}_n)^\dagger \varphi(r_1 \dots r_n) \Phi_0.$$

Der Spinor ist in $v = (v_1 \dots v_n)$ und $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n)$ antisymmetrisch. Bei simultaner Permutation P von v und $\mathbf{r}$ erhält man:

$$(34) \quad \varphi_{Pv}(P\mathbf{r}) = (-1)^P \varphi_v(\mathbf{r}).$$

Der Integrationsbereich B ist so zu wählen, daß in ihm keine zwei durch Permutation auseinander hervorgehenden Punkte $v, \mathbf{r}$ enthalten sind.

Damit erhalten wir als Schrödingergleichung für den mehrstufigen Spinor

$$(35) \quad i\hbar\dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) = i\hbar c (\vec{\alpha}_1 \cdot \nabla_1 + \dots + \vec{\alpha}_n \cdot \nabla_n) \varphi(\mathbf{r}, t) + 2\hbar c \kappa \varepsilon (\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \beta_1 \beta_2 + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \beta_1 \beta_3 + \dots) \varphi(\mathbf{r}, t).$$

Hierin sind $\vec{\alpha}_i$ und β_i Matrizen, die auf den i -ten Spinorindex wirken. Es ist eine auf n Neutrinen verallgemeinerte Neutrino-gleichung vom Diractyp. Sie ähnelt der schon früher vorgeschlagenen Mehrbahngleichung. Doch war das eine ad hoc formulierte mehrzeitige Gleichung, bei der es nicht gelungen war, die Mehrzeitigkeit richtig zu deuten.

Im Einbahnfall erhält man die vierkomponentige Neutrino-gleichung. Wir betrachten hier den Zweibahnfall als nächst einfachen. Im Schwerpunktsystem lauten die stationären Lösungen:

$$(36) \quad \varphi = \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\Omega t}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

und Gl. (35) nimmt folgende Form an:

$$(37) \quad \Omega \varphi(\mathbf{r}) = i c (\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2) \cdot \nabla \varphi + 2 c \kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \beta_1 \beta_2 \varphi.$$

Einen Bispinor kann man als quadratische Matrix schreiben. Dabei geht (37) in

$$(38) \quad \Omega \varphi = i c \nabla \cdot (\vec{\alpha} \varphi - \varphi \vec{\alpha}^T) + 2 c \kappa \varepsilon \delta(r) \beta \varphi \beta^T$$

über. Wegen

$$(39) \quad \beta^T = \beta, \quad \vec{\alpha}^T = -a_2 \vec{a} a_2$$

folgt mit dem Ansatz

$$(40) \quad \varphi = \chi \alpha_2$$

nach Rechtsmultiplikation mit α_2 aus (38):

$$(41) \quad \Omega \chi = i c \nabla \cdot (\vec{\alpha} \chi + \chi \vec{\alpha}) - 2 c \kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \beta \chi \beta.$$

Diese Gleichung beschreibt die Streuung zweier Teilchen, die Lösungen der Einbahngleichung sind, vielleicht von Neutrinen,

und die Bindung zweier Neutrinen zu einem ruhenden Teilchen. Bei gebundenen Zuständen verschwindet die Divergenz:

$$(42) \quad \operatorname{div} (\vec{\alpha} \chi + \chi \vec{\alpha}) = 0.$$

In diesem Fall bleibt aus Gl. (41)

$$(43) \quad \Omega \chi = -2c\kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \beta \chi \beta$$

übrig. Sie liefert χ , die zu $\delta(\mathbf{r})$ oder $\nabla \delta(\mathbf{r})$ proportional sind, und zu Frequenzen $\Omega = \pm 2c\kappa$ bzw. $\Omega = \pm c\kappa$, wenn man für $\varepsilon \delta(\mathbf{r})$ die aus der Quantenmechanik im Gitterraum stammende Relation

$$(44) \quad (\varepsilon \delta(0))^2 = \varepsilon \delta(0)$$

fordert, was der Gleichung $(\delta_{\mu\nu})^2 = \delta_{\mu\nu}$ für das Kroneckersymbol entspricht. Dieselbe quantenmechanisch, wie wir meinen, wohlbegründete Relation bewirkt, daß $(\delta(\mathbf{r}))^2$ normiert werden kann. Sie hilft aber nicht bei $(\nabla \delta(\mathbf{r}))^2$. Wir scheiden darum die Wellenfunktionen mit $\nabla \delta(\mathbf{r})$ als nicht normierbar aus.

Damit muß nicht nur die Divergenz in Gl. (42), sondern auch

$$(45) \quad \vec{\alpha} \chi + \chi \vec{\alpha} = 0$$

sein; d. h. χ ist zu γ_4 bzw. γ_{45} proportional, φ also zu $\gamma_4 \alpha_2 = i \gamma_2$ bzw. zu $\gamma_{45} \alpha_2 = -i \gamma_{52}$. Da $\delta(\mathbf{r})$ eine gerade Funktion ist, ist nur bei antisymmetrischer Matrix das Pauliprinzip erfüllt. Es gibt also nur den folgenden Bineutrinozustand:

$$(46) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \gamma_{52} \delta(\mathbf{r}), \quad \Omega = +2c\kappa.$$

Die Normierung ergibt sich aus

$$(47) \quad \int \varphi r_1 r_2(\mathbf{r})^* \varphi r_1 r_2(\mathbf{r}) d\pi_{\mathbf{r}} = \text{Spur} \int \varphi^\dagger \varphi d\pi_{\mathbf{r}} = \int \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d\pi_{\mathbf{r}} = 1.$$

Bispinoren φ transformieren sich als Matrix wie das dyadische Produkt zweier einfacher Spinoren ψ :

$$\varphi \sim \psi \psi^\dagger.$$

Darin können wir ψ^T durch den ladungskonjugierten Spinor ersetzen:

$$\psi_c = \gamma_2 \psi^*, \quad \psi_c^T = \psi_c^\dagger \gamma_2.$$

Das ergibt:

$$(48) \quad \varphi \sim \psi \psi_c^\dagger \gamma_2 \sim \psi \bar{\psi}_c \gamma_{24}.$$

Somit transformiert sich

$$(49) \quad \text{Spur} (\varphi \gamma_{24} I) \sim \bar{\psi}_c I \psi,$$

also wie einer der fünf spinorbestimmten Tensoren. Wegen der Antisymmetrie von φ sind Vektor und Schiefentensor gleich 0; nur

$$(50) \quad \begin{aligned} \text{der Skalar:} \quad & \text{Spur} (\varphi \gamma_{24}) = i \text{ Spur } \chi \\ \text{der Pseudovektor:} \quad & \text{Spur} (\varphi \gamma_{24} \gamma^{5\mu}) = i \text{ Spur } (\chi \gamma^{5\mu}) \\ \text{der Pseudoskalar:} \quad & \text{Spur} (\varphi \gamma_{24} \gamma^5) = \text{Spur } (\chi \gamma^5) \end{aligned}$$

können von 0 verschieden sein. In unserem speziellen Falle ist nur

$$(51) \quad \text{Spur} (\varphi \gamma_{24} \gamma^{50}) = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \delta(\mathbf{r}) \neq 0.$$

Hiernach ist das ruhende Bineutrino ein pseudovektorielles Teilchen, dessen Vektor in die Richtung seiner Weltlinie zeigt.

Der Spin des Teilchens ist 0. Das folgt aus der Hauptachsengleichung

$$(52) \quad \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \varphi = s \varphi.$$

Denn aus

$$s \varphi = \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \varphi + \varphi \vec{\sigma}^T) = \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \chi - \chi \vec{\sigma}) \alpha_2$$

erhält man wegen

$$(53) \quad \vec{\sigma} \chi - \chi \vec{\sigma} \sim \vec{\gamma}_{23} \gamma_{52} - \gamma_{52} \vec{\gamma}_{23} = 0 : s = 0.$$

Das Teilchen hat die Parität 1. Denn aus

$$(54) \quad (\gamma_4 \times \gamma_4) \varphi = P \varphi$$

folgt:

$$(55) \quad P\varphi = \gamma_4 \varphi \gamma_4 = \varphi, \text{ also } P = 1.$$

Es ist zu sich selbst ladungskonjugiert:

$$(56) \quad \varphi_c = (\gamma_2 \times \gamma_2) \varphi^* = -\gamma_2 \varphi \gamma_2 = +\varphi.$$

Seine Wellenfunktion ändert sich bei Zeitumkehrung nicht:

$$(57) \quad (\gamma_{31} \times \gamma_{31}) \varphi^* = \gamma_{31} \varphi^* \gamma_{31}^T = +\gamma_{31} \varphi \gamma_{31} = \varphi.$$

Die Anwendung der drei Operatoren TCP ergibt:

$$(\gamma_4 \times \gamma_4) (\gamma_2 \times \gamma_2) (\gamma_{31}^* \times \gamma_{31}^*) \varphi = (\gamma_4 \gamma_2 \gamma_{31} \times \gamma_4 \gamma_2 \gamma_{31}) \varphi.$$

Hieraus folgt

$$(58) \quad -(\gamma_5 \times \gamma_5) \varphi = -\gamma_5 \varphi \gamma_5 = \varphi.$$

Das Teilchen ist TCP invariant.

Das Bineutrino ist ein hochsymmetrisches Gebilde. Der δ -Faktor bedeutet, daß beide Neutrinen stets in einem Punkt vereinigt sind. Die Bineutrinen sind also ebenso wie die Neutrinen selbst punktförmige Teilchen. Da sich die Spins von Neutrinen in einem Punkt paarweise absättigen, kann es darin nicht mehr als zwei Neutrinen geben. Denn jeder dritte kann sich nicht zugleich mit den beiden vorhandenen paaren.

Damit nimmt das Bineutrino eine Sonderstellung ein. Sollte es noch andere gebundene Zustände geben, so müssen diese eine gewisse Ausdehnung haben. Wenn es ausgedehnte Verbundsysteme gibt, muß das Bineutrino ähnlich wie das intermediäre Boson beteiligt sein. Ohne daß Massenterme im Spiele sind, kann es keine nach außen exponentiell abklingenden Wellenfunktionen geben.

5. Wellengleichung für Bispinoren und VA -Kopplung

In Gl. (46) haben wir die Wellenfunktion für einen gebundenen Zweibahnzustand in Ruhe angegeben. Zur Wellengleichung dieses neuen Teilchens gelangen wir, wenn wir das Schwerpunktsystem verlassen. Da sich das Bineutrino frei bewegt, machen wir für die Wellenfunktion folgenden Ansatz:

$$(59) \quad \varphi = \varphi(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} - \Omega t)} \equiv \varphi(\mathbf{r}) e^{iK_\mu x^\mu}.$$

Darin sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ der Teilchenmittelpunkt und der Relativvektor:

$$(60) \quad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2}{2}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2.$$

Substitution dieses Ansatzes in die Schrödingergleichung (35) ergibt:

$$(61) \quad \Omega \varphi(\mathfrak{r}) = -c\mathfrak{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2}{2} \varphi(\mathfrak{r}) + ic(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2) \cdot \nabla \varphi(\mathfrak{r}) + \\ + 2c\kappa\varepsilon\delta(\mathfrak{r})\beta_1\beta_2\varphi(\mathfrak{r}),$$

d. i. in der Matrixschreibweise

$$\Omega \varphi = -\frac{1}{2}c\mathfrak{R} \cdot (\vec{\alpha}\varphi + \varphi\vec{\alpha}^T) + icV \cdot (\vec{\alpha}\varphi - \varphi\vec{\alpha}^T) + 2c\kappa\varepsilon\delta(\mathfrak{r})\beta\varphi\beta^T.$$

Wegen

$$(62) \quad \beta^T = \beta, \quad \vec{\alpha}^T = -\alpha_2\vec{\alpha}\alpha_2$$

und mit

$$(63) \quad \varphi = \chi\alpha_2$$

kann man dafür schreiben:

$$(64) \quad \Omega \chi = -\frac{1}{2}c[\mathfrak{R} \cdot \vec{\alpha}, \chi] + ic\{\vec{\alpha} \cdot \nabla, \chi\} - 2c\kappa\varepsilon\delta(\mathfrak{r})\beta\chi\beta.$$

Wir suchen die Bispinorlösung dieser Gleichung, können uns aber nicht mehr mit dem Ansatz $\chi \sim \gamma_{45}$ begnügen, weil

$$(65) \quad [\vec{\alpha}, \gamma_{45}] = 2i\vec{\gamma}_{51} \neq 0$$

ist. Es werden mindestens die $\vec{\gamma}_{51}$ eingekoppelt, also diejenigen Matrizen, die zusammen mit γ_{45} den Pseudovektor $\gamma^{5\mu}$ bilden, was in einer relativistischen Theorie sehr natürlich ist. Setzen wir auch die neugebildeten Matrizen in die Kommutatoren mit $\vec{\alpha}$ ein, so ergibt sich:

$$(66) \quad \{\gamma_{k4}, \gamma_{52}\} = 2\gamma_i, \quad [\gamma_{i4}, \gamma_k] = 2i\gamma_4 g_{ik}.$$

Wir erhalten neben dem Pseudovektor die Vektorgröße γ^μ . Durch weitere Benutzung der beiden Kommutatoren erhält man keine weiteren Matrizen mehr. Der Bispinor verbindet also die

V - und A -Felder. Mit Rücksicht auf das, was wir am Ende von Ziff. 4 gesagt haben, wird man erwarten dürfen, daß die spinorielle Theorie überwiegend zu VA -Kopplung führt. Unser Ansatz für χ lautet nunmehr:

$$(67) \quad \chi = \gamma^\mu U_\mu + \gamma^{5\mu} G_\mu.$$

Die Buchstaben U und G weisen darauf hin, daß die c -Zahl-Koeffizienten ungerade bzw. gerade Funktionen von $\mathbf{r}$ sein müssen, damit φ dem Pauliprinzip genügt. In der Tat sind

$$\gamma^\mu \alpha_2 = i\gamma_2, \gamma_{53}, -i\gamma_4, -\gamma_{51}$$

symmetrische und

$$\gamma^{5\mu} \alpha_2 = -i\gamma_{52}, -\gamma_3, +i\gamma_{45}, -\gamma_1$$

antisymmetrische Matrizen.

Auch die Kommutatoren in Gl. (64) wollen wir nach Möglichkeit explizit lorentzinvariant schreiben. Dazu führen wir in der geschweiften Klammer formal eine mehrzeitige Theorie ein, indem wir

$$(68) \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial \tau} \text{ mit } \tau = t_1 - t_2, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

subtrahieren und wieder addieren:

$$\{\vec{\alpha} \cdot V, \chi\} = (-\partial_0 \chi + \vec{\alpha} \cdot V \chi) + (V \chi \cdot \vec{\alpha} + \partial_0 \chi).$$

Multiplikation der ersten Summe von links mit $\gamma_0 \gamma^0$ und der zweiten von rechts mit $\gamma^0 \gamma_0$ ergibt

$$(69) \quad \{\vec{\alpha} \cdot V, \chi\} = -\gamma_0 \gamma^\mu \partial_\mu \chi + \partial_\mu \chi \cdot \gamma^\mu \gamma_0.$$

Die eckige Klammer fassen wir mit $\Omega \chi$ zusammen und erhalten

$$\Omega \chi + \frac{1}{2} c [\mathfrak{K} \cdot \vec{\alpha}, \chi] = -\frac{1}{2} c ((K_0 - \mathfrak{K} \cdot \vec{\alpha}) \chi + \chi (K_0 + \mathfrak{K} \cdot \vec{\alpha})).$$

Durch eine ähnliche Umformung wie vorher erhält man

$$\Omega \chi + \frac{1}{2} c [\mathfrak{K} \cdot \vec{\alpha}, \chi] = -\frac{1}{2} c K_\mu (\gamma_0 \gamma^\mu \chi + \chi \gamma^\mu \gamma_0).$$

Damit lautet Wellengleichung (65):

$$+ \frac{1}{2} c K_{\mu} (\gamma_0 \gamma^{\mu} \chi + \chi \gamma^{\mu} \gamma_0) = i c (\gamma_0 \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \chi - \partial_{\mu} \chi \gamma^{\mu} \gamma_0) + \\ = + 2 c \kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \gamma_0 \chi \gamma_0$$

oder

(70)

$$\gamma_0 \gamma^{\mu} (K_{\mu} - 2 i \partial_{\mu}) \chi + (K_{\mu} + 2 i \partial_{\mu}) \chi \gamma^{\mu} \gamma_0 = 4 \kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \gamma_0 \chi \gamma_0.$$

Hier ist es nun zweckmäßig, zu φ zurückzukehren. Mit Gl. (63) folgt aus (70)

$$\gamma_0 \gamma^{\mu} \left(\frac{1}{2} K_{\mu} - i \partial_{\mu} \right) \varphi + \left(\frac{1}{2} K_{\mu} + i \partial_{\mu} \right) \varphi \gamma_{24} \gamma^{\mu} \gamma_0 \gamma_{24} = \\ = 2 \kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \gamma_0 \varphi \gamma_{24} \gamma_0 \gamma_{24}.$$

Nun ist

$$\gamma_{24} \gamma^{\mu} \gamma_0 \gamma_{24} = -\gamma_{24} \gamma^{\mu} \gamma_{24} \gamma_0 = \gamma^{\mu T} \gamma_0^T = (\gamma_0 \gamma^{\mu})^T.$$

Rückkehr zur Bispinorschreibweise liefert:

$$(71) \quad ((\gamma_0 \gamma^{\mu} \times 1) \partial_{\mu}^{(1)} + (1 \times \gamma_0 \gamma^{\mu}) \partial_{\mu}^{(2)}) \varphi = -2 \kappa \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \gamma_0 \times \gamma_0 \varphi.$$

Kehren wir nun zu φ auf der linken Seite zu Gl. (59) zurück, so ist

$$\partial_{\mu}^{(1)} = -i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right), \quad \partial_{\mu}^{(2)} = -i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right).$$

Die Gl. (60) und (68) lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$X^{\mu} = \frac{1}{2} (x_1^{\mu} + x_2^{\mu}), \quad x^{\mu} = x_1^{\mu} - x_2^{\mu}.$$

Daraus erhält man

$$(72) \quad \frac{\partial}{\partial x_1^{\mu}} = \partial_{\mu}^{(1)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2^{\mu}} = \partial_{\mu}^{(2)}.$$

Multiplizieren wir Gl. (71) noch mit $\gamma^0 \times \gamma^0$ und beachten wir, daß $\frac{\partial}{\partial \tau}$ überhaupt nicht vorkommt, daß wir also

$$(73) \quad \varphi \rightarrow \Phi(x_1, x_2) = \varphi \delta(\tau)$$

und danach (mit $\varepsilon = l^3$)

$$(74) \quad \varepsilon \delta(\mathbf{r}) \rightarrow l^4 \delta(x_1 - x_2)$$

ersetzen können, so erhalten wir beinahe unsere früher ad hoc eingeführte Mehrbahnwellengleichung:⁹

$$(75) \quad ((\gamma^\mu \times \gamma^0) \partial_\mu^{(1)} + (\gamma^0 \times \gamma^\mu) \partial_\mu^{(2)}) \Phi(x_1, x_2) = -2\kappa l^4 \delta(x_1 - x_2) \bar{\Phi}(x_1, x_2).$$

Lediglich die Faktoren γ^0 auf der linken Seite sind neu hinzugekommen. Daß sie aus relativistischen Gründen notwendig sind, ist auch jetzt noch nicht unmittelbar ersichtlich. Sie bewirken, daß die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \tau}$ herausfällt, so daß der Ansatz (73) möglich wird und die Mehrzeitigkeit keine Rolle spielt.

Es scheint, daß der Faktor γ_0 das Gegenstück zum Faktor $\delta(\tau)$ ist. Bei der Integration über die inneren Variablen $\mathbf{r}$ haben wir ursprünglich $d\pi \mathbf{r}$, also ein Integral über irgendeine Dichte $\int \varrho d\Pi_{\mathbf{r}}$ oder $\int \varrho d\sigma_0 = \int \varrho^\mu d\sigma_\mu$ in der Schwingerschen Schreibweise. Nach dem Übergang zur Mehrzeitigkeit müssen wir dieses Integral noch über τ integrieren. Als Möglichkeit bietet sich: $d\tau_0 = \gamma_\mu dx^\mu$, d. i. in unserem speziellen Koordinatensystem:

$$(76) \quad d\tau_0 = \gamma_0 dx^0 = c \gamma_0 d\tau.$$

Der Beweis von Gl. (75) steckt in ihrer Ableitung. Die letzte Überlegung macht jedoch den Faktor γ_0 in der Mehrbahnwellengleichung verständlich.

Nicht eigentlich um der früher eingeführten Mehrbahnwellengleichung willen, sondern um die Wellengleichung in explizit lorentzinvarianter Form zu heben, sind wir von Gl. (64) zu Gl. (75) übergegangen. Inhaltlich dürfte Gl. (67) von größerer Bedeutung sein, nach der das Bineutrino ein VA -Teilchen ist.

⁹ l. c. 7), p. 182.