

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

3760

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1965

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

## Bemerkungen zum Brückensatz

Von Hans-Joachim Kowalsky in Braunschweig

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 8. November 1963

Von OTTO HAUPT, GEORG NÖBELING und CHRISTIAN PAUC wurde in [1] ein allgemeiner Brückensatz bewiesen. Als Sonderfall enthält er den sogenannten speziellen Brückensatz, der auch als unmittelbare Konsequenz aus zwei Sätzen von R. L. MOORE [4] gewonnen werden kann. Eine Folgerung aus dem speziellen Brückensatz ist schließlich der Randsatz von Z. JANISZEWSKI [2]. Alle diese Sätze beziehen sich auf einen zusammenhängenden und kompakten metrisierbaren Raum  $X$ . Nachstehend soll nun gezeigt werden, daß die Voraussetzungen abgeschwächt bzw. abgeändert werden können: Einerseits kann man nämlich die Metrisierbarkeit durch die schwächere Forderung ersetzen, daß  $X$  lediglich das Trennungaxiom  $T_4$  erfüllt. Zweitens aber kann man auch unter Beibehaltung des Zusammenhangs auf die Kompaktheit und die Metrisierbarkeit verzichten und statt dessen verlangen, daß  $X$  lokal zusammenhängend ist. Gerade diese Abänderung gestattet in allen Fällen eine verhältnismäßig kurze Beweisführung.

Im folgenden verweisen die Zahlenangaben in runden Klammern auf die entsprechenden Sätze in [3].

Herrn OTTO HAUPT bin ich für Hinweise auf die Problemstellung zu Dank verpflichtet.

### 1. Der Randsatz

Das Komplement einer Teilmenge  $A$  von  $X$  wird stets mit  $\mathbf{C}A$  bezeichnet. Ist  $M$  eine zweite Teilmenge von  $X$ , so bedeutet  $\mathbf{C}_M A$  das relative Komplement von  $A$  in  $M$ ; es gilt also  $\mathbf{C}_M A = M \cap \mathbf{C}A$ . Der Begriff „kompakt“<sup>1</sup> wird immer ohne Einschluß von Trennungseigenschaften benutzt. Ebenso soll das Tren-

---

<sup>1</sup> In [3] „vollkompakt“.

nungsaxiom  $T_4$  nicht etwa  $T_1$  einschließen; es besagt also lediglich: zu je zwei nicht-leeren, abgeschlossenen und punktfremden Mengen  $A, B$  existieren offene Mengen  $U, V$  mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Jeder abgeschlossene Unterraum eines kompakten  $T_4$ -Raumes ist selbst ein kompakter  $T_4$ -Raum (9.5, 11.6). Hingewiesen sei schließlich noch auf das folgende

**Lemma 1:** *Es sei  $X$  ein kompakter  $T_4$ -Raum, und  $K$  sei eine Komponente von  $X$ . Ferner bedeute  $\mathfrak{S}$  das System aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen  $S$  von  $K$  mit  $K \subseteq S$ .*

*Dann gilt*

$$K = \bigcap \{ S : S \in \mathfrak{S} \}.$$

Zum Beweis vgl. (14.9).

**Randsatz:** *Es sei  $X$  ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) *lokal zusammenhängend*

*oder*

(b) *ein kompakter  $T_4$ -Raum*

*ist. Ferner sei  $A$  eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von  $X$ . Dann gilt für jede Komponente  $K$  von  $\mathfrak{CA}$*

$$\bar{K} \cap A \neq \emptyset.$$

*Beweis:* Es kann  $A \neq X$  vorausgesetzt werden, weil andernfalls  $\mathfrak{CA}$  leer ist und somit keine Komponente besitzt. Weiter sei nun  $K$  eine Komponente von  $\mathfrak{CA}$ , und es werde  $\bar{K} \cap A = \emptyset$  angenommen. Diese Annahme soll in den Fällen (a) und (b) einzeln zum Widerspruch geführt werden.

*Fall (a):* Als Komponente von  $\mathfrak{CA}$  ist  $K$  abgeschlossen in  $\mathfrak{CA}$ , wegen  $\bar{K} \cap A = \emptyset$  aber sogar abgeschlossen in  $X$ . Außerdem ist  $K$  als Komponente einer offenen Menge wegen des lokalen Zusammenhangs von  $X$  aber auch offen in  $X$ . Da  $K \neq \emptyset$  und  $K \neq X$  gilt, ist dies ein Widerspruch zum Zusammenhang von  $X$ .

*Fall (b):* Wegen  $T_4$  gibt es zu  $A$  und  $\bar{K}$  offene Mengen  $U$  und  $V$  mit  $A \subseteq U$ ,  $\bar{K} \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Wegen  $K \subseteq \mathfrak{CU}$  und  $\mathfrak{CU} \subseteq \mathfrak{CA}$  ist  $K$  auch eine Komponente von  $\mathfrak{CU}$ . Es sei nun  $\mathfrak{S}$  das System aller in  $\mathfrak{CU}$  gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen  $S$  von  $\mathfrak{CU}$  mit  $K \subseteq S$ . Für jedes  $S \in \mathfrak{S}$  werde ferner

$B_S = S \cap \bar{U}$  gesetzt und zunächst  $B_S \neq \emptyset$  für alle  $S \in \mathfrak{S}$  angenommen. Es gilt  $B_{S_1 \cap S_2} = B_{S_1} \cap B_{S_2}$ . Wegen der Abgeschlossenheit der Mengen  $B_S$  und wegen der Kompaktheit von  $\bar{U}$  folgt daher, daß die Menge

$$D = \bigcap \{B_S : S \in \mathfrak{S}\}$$

nicht leer ist (11.19). Nun gilt aber  $D \subseteq \bar{U}$  und wegen Lemma 1 auch  $D \subseteq \bigcap \{S : S \in \mathfrak{S}\} = K$ . Es folgt  $K \cap \bar{U} \neq \emptyset$  im Widerspruch zu  $K \subseteq V \subseteq \mathbf{C}\bar{U}$ . Somit kann  $B_S \neq \emptyset$  nicht für alle  $S \in \mathfrak{S}$  erfüllt sein; d. h. es gibt ein  $S_0 \in \mathfrak{S}$  mit  $S_0 \cap \bar{U} = \emptyset$ . Es ist  $S_0$  abgeschlossen in  $\mathbf{C}U$ , wegen der Abgeschlossenheit von  $\mathbf{C}U$  aber sogar abgeschlossen in  $X$ . Weiter ist  $S_0$  auch offen in  $\mathbf{C}U$ . Wegen  $S_0 \subseteq \mathbf{C}\bar{U}$  ist  $S_0$  aber auch offen in  $\mathbf{C}\bar{U}$  und damit sogar in  $X$ . Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von  $X$ , weil ja  $S_0 \neq \emptyset$  wegen  $K \subseteq S_0$  und  $S_0 \neq X$  wegen  $S_0 \subseteq \mathbf{C}\bar{U} \subseteq \mathbf{C}A$  gilt.

## 2. Der spezielle Brückensatz

Zur Vorbereitung sollen zunächst zwei Hilfssätze bewiesen werden.

**Lemma 2:** *Es sei  $X$  ein zusammenhängender und kompakter  $T_4$ -Raum. Ferner seien  $A$  und  $B$  zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von  $X$ . Dann gibt es in dem System  $\mathfrak{Z}$  aller zusammenhängenden und abgeschlossenen Teilmengen  $Z$  von  $X$  mit  $Z \cap A \neq \emptyset$  und  $Z \cap B \neq \emptyset$  eine minimale Menge.*

*Beweis:* (Vgl. [1].) Wegen  $X \in \mathfrak{Z}$  ist  $\mathfrak{Z}$  nicht leer. Weiter sei das Teilsystem  $\mathfrak{C}$  von  $\mathfrak{Z}$  eine Kette (hinsichtlich der mengentheoretischen Inklusion). Dann ist auch

$$D = \bigcap \{Z : Z \in \mathfrak{C}\}$$

eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von  $X$  (14.6). Wegen  $Z \cap A \neq \emptyset$  für alle  $Z \in \mathfrak{C}$  und wegen der Kompaktheit von  $A$  gilt außerdem  $D \cap A \neq \emptyset$  (11.18) und analog  $D \cap B \neq \emptyset$ . Es folgt  $D \in \mathfrak{Z}$ , und die Behauptung ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des ZORNSchen Lemmas.

**Lemma 3:** *Es sei  $X$  ein kompakter  $T_4$ -Raum, und  $\mathfrak{K}$  sei ein nicht-leeres System nicht-leerer, zusammenhängender Teilmengen von  $X$ . Schließlich sei  $\mathfrak{v}$  ein Ultrafilter von  $\mathfrak{K}$ . Setzt man dann für jede Menge  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$*

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{B}} &= \overline{\bigcup \{K : K \in \mathfrak{B}\}}, \\ \text{so ist} \\ C &= \bigcap \{C_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \in \mathfrak{v}\} \end{aligned}$$

*eine nicht-leere, zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von  $X$ .*

*Beweis:* Die nicht-leeren und abgeschlossenen Mengen  $C_{\mathfrak{B}}$  bilden eine Filterbasis. Wegen der Kompaktheit von  $X$  ist daher  $C$  ebenfalls nicht leer und abgeschlossen (11.19). Angenommen werde, daß  $C$  nicht zusammenhängend ist, daß es also nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen  $C'$  und  $C''$  von  $C$  mit  $C' \cup C'' = C$  gibt. Wegen  $T_4$  existieren dann offene Mengen  $U'$  und  $U''$  mit  $C' \subseteq U'$ ,  $C'' \subseteq U''$  und  $U' \cap U'' = \emptyset$ . Wegen  $C' \subseteq C \subseteq C_{\mathfrak{B}}$  und  $C' \subseteq U'$  gibt es zu jedem  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$  mindestens ein  $K \in \mathfrak{B}$  mit  $K \cap U' \neq \emptyset$ . Für die Menge  $\mathfrak{K}'$  aller  $K \in \mathfrak{K}$  mit  $K \cap U' \neq \emptyset$  gilt daher  $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{v}$ , weil  $\mathfrak{v}$  ein Ultrafilter ist (3.12). Ebenso erhält man für die Menge  $\mathfrak{K}''$  aller  $K \in \mathfrak{K}$  mit  $K \cap U'' \neq \emptyset$  auch  $\mathfrak{K}'' \in \mathfrak{v}$ . Für alle  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$  mit  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}''$  und für alle  $K \in \mathfrak{B}$  folgt somit  $K \cap U' \neq \emptyset$  und  $K \cap U'' \neq \emptyset$ . Für alle diese  $K$  muß daher auch  $K \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$  gelten, weil andernfalls die Gleichung  $K = (K \cap U') \cup (K \cap U'')$  dem Zusammenhang von  $K$  widersprechen würde. Es folgt  $C_{\mathfrak{B}} \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$  für alle  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$  und schließlich wegen der Kompaktheit von  $\mathbf{C}(U' \cup U'')$  auch  $C \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$ . Dies aber widerspricht  $C = C' \cup C'' \subseteq U' \cup U''$ .

**Spezieller Brückensatz:** *Es sei  $X$  ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

- oder*
- (a) *lokal zusammenhängend*
  - (b) *ein kompakter  $T_4$ -Raum*

*ist. Ferner seien  $A$  und  $B$  zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von  $X$ . Dann gibt es eine Komponente  $K$  von  $\mathbf{C}(A \cup B)$  mit  $K \cap A \neq \emptyset$  und  $K \cap B \neq \emptyset$ .*

*Beweis:* Die Behauptung wird einzeln für die Fälle (a) und (b) bewiesen.

*Fall (a):* Wegen des Zusammenhangs von  $X$  gilt  $A \cup B \neq X$ , also  $\mathbf{C}(A \cup B) \neq \emptyset$ . Es sei nun  $\mathfrak{R}$  das System aller Komponenten von  $\mathbf{C}(A \cup B)$ . Da  $A \cup B$  eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von  $X$  ist, gilt für jedes  $K \in \mathfrak{R}$  nach dem Randsatz  $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$  oder  $\overline{K} \cap B \neq \emptyset$ . Angenommen werden soll, daß für kein  $K \in \mathfrak{R}$  gleichzeitig  $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$  und  $\overline{K} \cap B \neq \emptyset$  erfüllt ist. Und diese Annahme muß zum Widerspruch geführt werden.

Es werde gesetzt

$$\mathfrak{R}_A = \{ K' : K' \in \mathfrak{R}, \overline{K'} \cap A \neq \emptyset \} \quad \text{und} \\ \mathfrak{R}_B = \{ K'' : K'' \in \mathfrak{R}, \overline{K''} \cap B \neq \emptyset \}.$$

Dann gilt  $\mathfrak{R}_A \cap \mathfrak{R}_B = \emptyset$ . Setzt man noch

$$K_A = A \cup \bigcup \{ K' : K' \in \mathfrak{R}_A \} \quad \text{und} \\ K_B = B \cup \bigcup \{ K'' : K'' \in \mathfrak{R}_B \},$$

so folgt  $K_A \cap K_B = \emptyset$ ,  $K_A \cup K_B = X$  und außerdem  $K_A \neq \emptyset$ ,  $K_B \neq \emptyset$ . Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von  $X$ , wenn jetzt abschließend noch gezeigt wird, daß  $K_A$  (und aus Symmetriegründen dann auch  $K_B$ ) eine offene Menge ist.

Es gelte  $x \in A$ . Wegen des lokalen Zusammenhangs existiert dann eine zusammenhängende, offene Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $U \cap B = \emptyset$  (15.1). Es werde zunächst  $U \cap K'' \neq \emptyset$  für ein  $K'' \in \mathfrak{R}_B$  angenommen. Als Komponente von  $\mathbf{C}(A \cup B)$  ist  $K''$  offen in  $X$  und abgeschlossen in  $\mathbf{C}(A \cup B)$ . Wegen  $K'' \in \mathfrak{R}_B$ , also  $\overline{K''} \cap A = \emptyset$ , ist  $K''$  aber sogar abgeschlossen in  $\mathbf{C}B$ . Da  $U \subseteq \mathbf{C}B$  gilt, ist somit  $U \cap K''$  eine in  $U$  gleichzeitig offene und abgeschlossene Menge. Wegen des Zusammenhangs von  $U$  folgt  $U \cap K'' = U$ , was jedoch  $x \in U$  und  $x \in K''$  ( $x \in A$ !) widerspricht. Daher muß  $U \cap K'' = \emptyset$  für alle  $K'' \in \mathfrak{R}_B$  erfüllt sein. Es folgt  $U \cap K_B = \emptyset$ , also  $U \subseteq K_A$ . Außerdem sind die Mengen  $K' \in \mathfrak{R}_A$  als Komponenten von  $\mathbf{C}(A \cup B)$  offen. Zusammen ergibt sich hieraus schließlich, daß auch  $K_A$  eine offene Menge ist.

*Fall (b):* Nach Lemma 2 existiert eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge  $Z$  von  $X$  mit  $Z \cap A \neq \emptyset$  und  $Z \cap B \neq \emptyset$ ,

die hinsichtlich dieser Eigenschaften minimal ist. Wenn also  $C \subseteq Z$  ebenfalls eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von  $X$  mit  $C \cap A \neq \emptyset$  und  $C \cap B \neq \emptyset$  ist, so muß  $C = Z$  gelten.

Es ist  $Z$  ein zusammenhängender und kompakter  $T_4$ -Raum. Setzt man  $A^* = Z \cap A$  und  $B^* = Z \cap B$ , so sind  $A^*$  und  $B^*$  zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von  $Z$ , und das relative Komplement  $Y = \mathbf{C}_Z(A^* \cup B^*)$  ist nicht leer. Außerdem gilt  $\bar{Y} \cap A^* \neq \emptyset$  und  $\bar{Y} \cap B^* \neq \emptyset$ , weil z. B. aus  $\bar{Y} \cap A^* = \emptyset$  folgen würde, daß die zusammenhängende Menge  $Z$  Vereinigung der nicht-leeren, abgeschlossenen und punktfremden Mengen  $A^*$  und  $\bar{Y} \cup B^*$  ist.

Nimmt man nun zunächst an, daß  $Y$  zusammenhängend ist, so gibt es wegen  $Y \subseteq \mathbf{C}(A \cup B)$  eine Komponente  $K$  von  $\mathbf{C}(A \cup B)$  mit  $Y \subseteq K$ . Für sie gilt  $\bar{K} \cap A \supseteq \bar{Y} \cap A^* \neq \emptyset$  und entsprechend  $\bar{K} \cap B \supseteq \bar{Y} \cap B^* \neq \emptyset$ . Damit ist die Behauptung des speziellen Brückensatzes unter dieser zusätzlichen Annahme bewiesen.

Weiterhin soll daher vorausgesetzt werden, daß  $Y$  unzusammenhängend ist. Und diese Annahme muß noch zum Widerspruch geführt werden.

Jetzt gibt es nicht-leere und punktfremde Teilmengen  $M_1$  und  $M_2$  von  $Y$ , die beide in  $Y$  abgeschlossen sind. Für jede Komponente  $K$  von  $Y$  gilt  $K \subseteq M_1$  oder  $K \subseteq M_2$ . Bedeutet daher  $\mathfrak{R}_i$  das System aller Komponenten  $K$  von  $Y$  mit  $K \subseteq M_i$  ( $i = 1, 2$ ), so gilt  $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = \emptyset$ , und  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$  ist das System aller Komponenten von  $Y$ . Für jedes  $K \in \mathfrak{R}$  gilt nach dem Randsatz (angewandt auf  $Z$  statt  $X$  und  $A^*, B^*$  statt  $A, B$ )  $\bar{K} \cap A^* \neq \emptyset$  oder  $\bar{K} \cap B^* \neq \emptyset$ . Aber für kein  $K \in \mathfrak{R}$  sind beide Beziehungen gleichzeitig erfüllt, weil sonst  $C = \bar{K}$  eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von  $Z$  (und also auch von  $X$ ) mit  $C \cap A \neq \emptyset$  und  $C \cap B \neq \emptyset$  wäre, für die jedoch nicht  $C = Z$  erfüllt ist (s. o.). Setzt man daher weiter für  $i = 1, 2$

$$\mathfrak{R}_{i,A} = \{K : K \in \mathfrak{R}_i, \bar{K} \cap A^* \neq \emptyset\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{R}_{i,B} = \{K : K \in \mathfrak{R}_i, \bar{K} \cap B^* \neq \emptyset\},$$

so sind die Systeme  $\mathfrak{R}_{i,A}, \mathfrak{R}_{i,B}$  ( $i = 1, 2$ ) paarweise elementfremd, und es gilt  $\mathfrak{R}_{i,A} \cup \mathfrak{R}_{i,B} = \mathfrak{R}_i$ . Schließlich werde

$$K_{i,A} = A^* \cup \bigcup \{K : K \in \mathfrak{R}_{i,A}\} \quad \text{und}$$

$$K_{i,B} = B^* \cup \bigcup \{K : K \in \mathfrak{R}_{i,B}\} \quad (i = 1, 2)$$

gesetzt. Von diesen Mengen kann zunächst festgestellt werden, daß nicht gleichzeitig

$$\overline{K_{i,A}} \cap K_{i,B} = \emptyset \quad \text{und} \quad K_{i,A} \cap \overline{K_{i,B}} = \emptyset \quad \text{für } i = 1, 2$$

gelten kann: Da nämlich die Mengen  $M_i$  in  $Y$  abgeschlossen sind, würde folgen, daß die nicht-leeren und punktfremden Mengen  $K_{1,A} \cup K_{2,A}$  und  $K_{1,B} \cup K_{2,B}$  abgeschlossen sind. Da aber  $Z$  die Vereinigung dieser beiden Mengen ist, würde dies dem Zusammenhang von  $Z$  widersprechen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann daher weiter die Existenz eines Punktes  $p \in \overline{K_{1,A}} \cap K_{1,B}$  vorausgesetzt werden. Dann gibt es zu jeder Umgebung  $U$  aus dem Umgebungsfilter  $\mathfrak{u}$  von  $p$  mindestens ein  $K \in \mathfrak{R}_{1,A}$  mit  $K \cap U \neq \emptyset$ . Setzt man daher

$$\mathfrak{B}_U = \{K : K \in \mathfrak{R}_{1,A}, K \cap U \neq \emptyset\} \quad (U \in \mathfrak{u}),$$

so sind die Mengen  $\mathfrak{B}_U$  nicht leer, und  $\{\mathfrak{B}_U : U \in \mathfrak{u}\}$  ist Basis eines Filters von  $\mathfrak{R}_{1,A}$ , der zu einem Ultrafilter  $\mathfrak{v}$  von  $\mathfrak{R}_{1,A}$  verfeinert werden kann. Mit

$$C_{\mathfrak{B}} = \overline{\bigcup \{K : K \in \mathfrak{B}\}} \quad \text{und} \quad C = \bigcap \{C_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \in \mathfrak{v}\}$$

gilt dann nach Lemma 3, daß  $C$  eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von  $Z$  ist. Ferner ergibt sich laut Konstruktion  $C \cap U \neq \emptyset$  für alle  $U \in \mathfrak{u}$ , wegen der Abgeschlossenheit von  $C$  also  $p \in C$ . Schließlich gilt  $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$  für alle  $K \in \mathfrak{R}_{1,A}$  und somit  $C_{\mathfrak{B}} \cap A \neq \emptyset$  für alle  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$ . Wegen der Kompaktheit von  $A$  folgt daher  $C \cap A \neq \emptyset$  (11.18).

Aus  $p \in K_{1,B}$  ergibt sich  $p \in B^*$  oder  $p \in K'$  für ein  $K' \in \mathfrak{R}_{1,B}$ . Setzt man im ersten Fall  $C^* = C$  und im zweiten Fall  $C^* = C \cup \overline{K'}$ , so ist  $C^*$  in jedem Fall eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von  $Z$  mit  $C^* \cap A \neq \emptyset$  und  $C^* \cap B \neq \emptyset$  (wegen  $K' \in \mathfrak{R}_{1,B}$  gilt ja  $\overline{K'} \cap B \neq \emptyset$ ). Es folgt

(s. o.)  $C^* = Z$  und damit  $M_2 \subseteq C^*$ . Dies ist ein Widerspruch, weil  $C^*$  offenbar in der zu  $M_2$  punktfremden Menge  $A^* \cup M_1 \cup B^*$  enthalten ist.

### 3. Verallgemeinerungen

Abschließend soll jetzt noch der eingangs erwähnte allgemeine Brückensatz unter den hier gemachten Voraussetzungen bewiesen werden. Vorausgeschickt wird eine entsprechende Verallgemeinerung des Randsatzes.

Ist  $Q$  eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$ , und ist  $\mathfrak{K}$  das System aller Komponenten von  $\mathbf{C}Q$ , so werde

$$\langle Q, X \rangle = Q \cap \bigcup \{K : K \in \mathfrak{K}\}$$

gesetzt. Gilt  $Q = X$ , so ist  $\mathfrak{K}$  leer und daher auch  $\langle Q, X \rangle$ .

**Lemma 4:** *Es sei  $X$  ein lokal zusammenhängender Raum, und  $Q$  sei eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ . Weiter sei  $Z$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $X$  mit  $Z \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$ . Dann gilt  $Z \subseteq Q$  oder  $Z \subseteq \mathbf{C}Q$ .*

*Beweis:* Es werde  $Z \cap \mathbf{C}Q \neq \emptyset$  angenommen. Dann gibt es eine Komponente  $K$  von  $\mathbf{C}Q$  mit  $K \cap Z \neq \emptyset$ . Als Komponente der offenen Menge  $\mathbf{C}Q$  ist  $K$  wegen des lokalen Zusammenhangs offen, also  $K \cap Z$  offen in  $Z$ . Weiter ist  $K$  als Komponente von  $\mathbf{C}Q$  auch abgeschlossen in  $\mathbf{C}Q$ . Wegen  $K \cap Q \subseteq \langle Q, X \rangle$  ist  $K$  aber sogar abgeschlossen in  $\mathbf{C}\langle Q, X \rangle$ . Daher ist schließlich  $K \cap Z$  abgeschlossen in  $Z$ , weil ja  $Z \subseteq \mathbf{C}\langle Q, X \rangle$  gilt. Wegen des Zusammenhangs von  $Z$  folgt  $K \cap Z = Z$ , also  $Z \subseteq K \subseteq \mathbf{C}Q$ .

**Lemma 5:** *Es sei  $X$  ein kompakter  $T_4$ -Raum,  $Q$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  und  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$  mit  $\langle Q, X \rangle \subseteq U$ . Ist dann  $Z$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $X$  mit  $Z \cap U = \emptyset$ , so gilt  $Z \subseteq Q$  oder  $Z \subseteq \mathbf{C}Q$ .*

*Beweis:* Es werde  $Z \cap Q \neq \emptyset$  und  $Z \cap \mathbf{C}Q \neq \emptyset$  angenommen. Es ist  $Z$  ein zusammenhängender und kompakter  $T_4$ -Raum,  $A = Z \cap Q$  ist eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von  $Z$ , und das relative Komplement  $Y = \mathbf{C}_Z Q$  ist nicht leer. Es gibt daher eine Komponente  $K'$  von  $Y$ , und für sie gilt nach dem

Randsatz  $\overline{K'} \cap A \neq \emptyset$ . Wegen  $Y \subseteq \mathbf{C}Q$  gibt es weiter eine Komponente  $K$  von  $\mathbf{C}Q$  mit  $K' \subseteq K$ . Es folgt  $\overline{K'} \cap A \subseteq \overline{K} \cap Q \subseteq \langle Q, X \rangle$  und wegen  $\overline{K'} \subseteq \overline{Z}$  sogar  $\overline{K'} \cap A \subseteq \overline{Z} \cap \langle Q, X \rangle$ . Wegen  $Z \cap U = \emptyset$  und  $\langle Q, X \rangle \subseteq U$  gilt aber  $\overline{Z} \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$ , also erst recht  $\overline{K'} \cap A = \emptyset$  im Widerspruch zu  $\overline{K'} \cap A \neq \emptyset$ .

**Verallgemeinerter Randsatz:** *Es sei  $X$  ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) *lokal zusammenhängend*

oder

(b) *ein kompakter  $T_4$ -Raum*

*ist. Ferner gelte  $\langle Q, X \rangle \subseteq A \subseteq Q$  mit nicht-leeren und abgeschlossenen Teilmengen  $A$  und  $Q$  von  $X$ . Ist dann  $K$  eine Komponente des relativen Komplements  $Y = \mathbf{C}_Q A$ , so gilt  $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$ .*

*Beweis:*

*Fall (a):* Jedenfalls ist  $K$  in einer Komponente  $Z$  von  $\mathbf{C}A$  enthalten, für die dann nach dem Randsatz  $\overline{Z} \cap A \neq \emptyset$  gilt. Wegen  $\langle Q, X \rangle \subseteq A$  erhält man  $Z \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$ . Wegen  $K \subseteq Z$  und  $K \subseteq Q$  gilt  $Z \cap Q \neq \emptyset$ , und aus Lemma 4 folgt  $Z \subseteq Q$ , also  $Z \subseteq Q \cap \mathbf{C}A = Y$ . Da  $K$  aber eine Komponente von  $Y$  ist, muß  $K = Z$  und damit  $\overline{K} \cap A = \overline{Z} \cap A \neq \emptyset$  erfüllt sein.

*Fall (b):* Es werde  $\overline{K} \cap A = \emptyset$  angenommen.  $K$  ist abgeschlossen in  $Y$ , wegen  $\overline{K} \cap A = \emptyset$  aber sogar abgeschlossen in  $Q$  und damit in  $X$ ; d. h. es gilt  $\overline{K} = K$ . Wegen  $T_4$  gibt es offene Mengen  $U$  und  $V$  mit  $A \subseteq U$ ,  $K \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Es folgt  $K \cap \overline{U} = \emptyset$ , und nach dem speziellen Brückensatz gibt es eine Komponente  $Z$  von  $\mathbf{C}(K \cup \overline{U})$  mit  $\overline{Z} \cap K \neq \emptyset$  und  $\overline{Z} \cap \overline{U} \neq \emptyset$ . Die Menge  $K^* = K \cup Z$  ist zusammenhängend und wegen  $K^* \cap \overline{U} \neq \emptyset$ ,  $K \cap \overline{U} = \emptyset$  eine echte Obermenge von  $K$ . Da aber  $K$  eine Komponente von  $Y$  ist, kann  $K^*$  und somit  $\overline{Z}$  nicht in  $Y$  enthalten sein. Wegen  $\overline{Z} \cap A \subseteq \overline{Z} \cap U = \emptyset$  muß daher  $\overline{Z} \cap \mathbf{C}Q \neq \emptyset$  gelten. Hieraus folgt aber wegen  $\langle Q, X \rangle \subseteq A \subseteq U$  und  $\overline{Z} \cap U = \emptyset$  nach Lemma 5 sogar  $\overline{Z} \subseteq \mathbf{C}Q$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $\overline{Z} \cap Q \supseteq \overline{Z} \cap K \neq \emptyset$ .

Setzt man in dem verallgemeinerten Randsatz  $Q = X$ , so erhält man als Spezialfall den Randsatz.

**Allgemeiner Brückensatz:** *Es sei  $X$  ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

- oder
- (a) *lokal zusammenhängend*
  - (b) *ein kompakter  $T_4$ -Raum*

*ist. Ferner gelte  $A \subseteq Q, B \subseteq Q, A \cap B = \emptyset$  und  $\langle Q, X \rangle \subseteq A \cup B$ , mit nicht-leeren und abgeschlossenen Teilmengen  $A, B$  und  $Q$  von  $X$ . Dann gibt es eine zusammenhängende Teilmenge  $Z$  von  $\mathbf{C}(A \cup B)$  mit  $Z \cap A \neq \emptyset$  und  $Z \cap B \neq \emptyset$ , für die  $Z \subseteq Q$  oder  $Z \subseteq \mathbf{C}Q$  gilt.*

*Beweis:* Nach dem speziellen Brückensatz gibt es eine Komponente  $K$  von  $\mathbf{C}(A \cup B)$  mit  $K \cap A \neq \emptyset$  und  $K \cap B \neq \emptyset$ .

*Fall (a):* Wegen  $\langle Q, X \rangle \subseteq A \cup B$  gilt  $K \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$ , und nach Lemma 4 folgt  $K \subseteq Q$  oder  $K \subseteq \mathbf{C}Q$ . Die Behauptung ist also mit  $Z = K$  erfüllt.

*Fall (b):* Es seien  $A_0$  und  $B_0$  Komponenten von  $A$  bzw.  $B$  mit  $K \cap A_0 \neq \emptyset$  und  $K \cap B_0 \neq \emptyset$ . Dann ist  $X^* = A_0 \cup K \cup B_0$  ein zusammenhängender und kompakter  $T_4$ -Raum. Weiter seien  $A^*$  und  $B^*$  diejenigen Komponenten von  $Q^* = X^* \cap Q$ , für die  $A_0 \subseteq A^*$  und  $B_0 \subseteq B^*$  gilt. Dann sind  $A^*, B^*, Q^*$  nicht-leere und abgeschlossene Teilmengen von  $X^*$  mit  $A^* \subseteq Q^*, B^* \subseteq Q^*, A^* \cap B^* = \emptyset$  und  $\langle Q^*, X^* \rangle \subseteq A^* \cup B^*$ . Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

1.  $A^* \cap B^* \neq \emptyset$ : Dann folgt  $A^* = B^*$ , und  $A^*$  ist ein zusammenhängender, kompakter  $T_4$ -Raum mit  $A_0 \subseteq A^*$  und  $B_0 \subseteq A^*$ . Nach dem speziellen Brückensatz existiert daher eine Komponente  $Z$  von  $\mathbf{C}(A_0 \cup B_0) \cap A^*$  mit  $Z \cap A_0 \neq \emptyset$  und  $Z \cap B_0 \neq \emptyset$ . Erst recht folgt  $Z \cap A \neq \emptyset$  und  $Z \cap B \neq \emptyset$ . Wegen  $Z \subseteq \mathbf{C}(A_0 \cup B_0) \cap A^*$  erhält man  $Z \subseteq \mathbf{C}(A \cup B)$  und wegen  $A^* \subseteq Q^* \subseteq Q$  schließlich auch  $Z \subseteq Q$ .
2.  $A^* \cap B^* = \emptyset$ : Nach dem verallgemeinerten Randsatz (angewandt auf  $X^*, Q^*, A^* \cup B^*$  statt  $X, Q, A$ ) müßte für jede Komponente  $K^*$  von  $\mathbf{C}(A^* \cup B^*) \cap Q^*$  entweder  $\overline{K^*} \cap A^* \neq \emptyset$  oder  $\overline{K^*} \cap B^* \neq \emptyset$  gelten, was in jedem Fall dem widerspricht, daß  $A^*$  und  $B^*$  Komponenten von  $Q^*$  sind. Es folgt  $A^* \cap B^* = \emptyset$ . Nach dem speziellen Brückensatz existiert daher eine Kompo-

nente  $Z$  von  $\mathbf{C}(A^* \cup B^*) \cap X^* = \mathbf{C}Q \cap X^*$  mit  $\bar{Z} \cup A^* \neq \emptyset$  und  $\bar{Z} \cap B^* \neq \emptyset$ . Wegen  $Z \subseteq \mathbf{C}Q$  gibt es weiter eine Komponente  $Z'$  von  $\mathbf{C}Q$  mit  $Z \subseteq Z'$ . Es folgt  $\bar{Z} \cap A^* \subseteq \bar{Z}' \cap Q \cap A^* \subseteq \langle Q, X \rangle \cap A^* \subseteq A$ , also  $\bar{Z} \cap A \neq \emptyset$ , und entsprechend  $\bar{Z} \cap B \neq \emptyset$ .

Damit ist in beiden Fällen die Behauptung bewiesen.

Setzt man in dem allgemeinen Brückensatz  $Q = X$ , so erhält man wieder als Spezialfall den speziellen Brückensatz.

### Literatur

- [1] HAUPT-NÖBELING-PAUC, Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen, Journ. f. r. u. a. Math. 182 (1940), 105–121.
- [2] JANISZEWSKI, Sur les continus irréductibles entre deux points, Thèse (Paris 1911) = Journ. École Polyt. (2) 16 (1912), 100.
- [3] KOWALSKY, Topologische Räume, Birkhäuser (Basel) 1961.
- [4] MOORE, Foundations of point set theory, Colloquium Publications of the Amer. Math. Soc. 13, New York 1932.